

ブートストラップ仮説検定を用いた統計的損傷同定手法について

Statistical approach for structural damage diagnosis using bootstrap hypothesis testing

古川愛子*, 大塚久哲**, 清野純史***
Aiko Furukawa, Hisanori Otsuka and Junji Kiyono

*工修 九州大学助手, 工学研究院建設デザイン部門 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

** 工博 九州大学教授, 工学研究院建設デザイン部門 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

*** 工博 京都大学助教授, 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

In this paper, a statistical approach for structural damage diagnosis that uses uncertain frequency response functions (FRFs) was presented. Structural damage was detected from the changes in FRFs from the original intact state. The measurements are always contaminated by noise, and sufficient data often are difficult to obtain; those making difficult to detect damage with a finite number of data. To surmount this, we introduced the bootstrap hypothesis testing to statistically prevent identification error due to measurement noise. The proposed method iteratively zooms in the damaged elements by excluding the elements which were assessed undamaged from damage candidates step by step. The proposed approach was applied to numerical simulations using 2-dimensional frame structure and its efficiency was confirmed.

Key Words: damage diagnosis, measurement error, frequency responses function, bootstrap hypothesis testing.

1. はじめに

1995 年の兵庫県南部地震では非常に多くの構造物が様々なレベルの被害を受けた。地震の 2 次被害を防止する上で、地震直後に防災上の中核となる病院・消防署・交通施設等のインフラの損傷を即座に評価し、適切な補修・補強を行うことは非常に重要である。しかしながら、崩壊・半壊にまで至った構造物については、被害の激しさを目視で十分に評価することができるが、外見から被害の程度を評価できない構造物については、外装を取り除いて損傷箇所を調べるか、非破壊検査を行わなければならない、膨大なコストと時間が必要となる。

また、構造物は風化・降雨・地震等の作用によって年々老朽化し、微小な損傷が累積する。その累積された損傷の程度が大きければ大きい程、地震等の自然災害に対する耐力が弱いことは言うまでもない。兵庫県南部地震においては 11 万戸以上の住宅が倒壊に至ったが、耐震補強が十分に施されておればその被害の程度を最小限に抑えることができたと思われる。以降、地震の研究は大きく進歩し、社会的に重要度の高いインフラ施設の耐震化はかなりのペースで進んできた。しかしながら、個人の所有する住宅や一般構造物については、耐震化が進んだとは言いがたい。近い将来に南海トラフ沿いの大地震が起こると騒がれ

ている昨今、次の大地震に備えて各種構造物の耐震診断、耐震改修を促進することは管理者の責務であり、その為にも構造物の健全度を評価する簡易なシステムの構築は急務である。そして、耐震診断手法としての地位を確立する為には、高精度であるだけでなく、簡易でかつ経済的な手法であることが必要不可欠である。

以上の様な背景に鑑み、筆者らは構造物の健全度を簡便に評価するシステムの開発を行ってきた¹⁾。具体的には、小型起振器を用いて構造物の振動実験を行い、計測結果を基に逆解析を行い、構造物の各種パラメータを同定して損傷箇所および損傷の程度の評価を行うものであり、数値解析を通して手法の有用性は検証済みである。しかしながら、実構造物に手法を適用するにあたっては、計測ノイズや構造物を物理モデルに近似する際の自由度の縮小化による誤差など、様々な誤差が存在する。この為、小さい損傷がノイズに埋もれて検出できなかったり、健全な部材に損傷が検出されたり、手法がうまく機能しない可能性がある。

このような不確定性の影響を考慮するため、数々の統計的な同定手法が提案されている。予測誤差法²⁾、カルマンフィルタ³⁾、 H_∞ フィルタ⁴⁾を利用した手法は、初期値の不確定性、システムの不確定性および観測ノイズの確率分布をすべて正規分布と仮定するシステム同定手法である。また、Xia らは、計測データとモデル化の不確定性が正規分布に従うという仮定のもと、摂動法を用いて剛性の期待値

と分散を算出し、モンテカルロ法を用いて確率分布を求めている⁵⁾。Yeo らは摂動法によりシステムパラメータの分布を算出し、正規分布を用いた仮説検定を通して損傷を評価している⁶⁾。これらの手法はいずれもデータの正規性を仮定するものであるが、実際の計測ノイズやモデル低次元化による誤差は正規分布に従うとは限らない。より一般性を持たせるためには、正規分布以外の確率分布を取り扱う理論の構築が必要となる。

そこで本研究では、近年統計科学の分野で脚光を浴びているブートストラップ法⁷⁾を援用した仮説検定により、これら不確定性の影響を考慮した損傷同定手法を提案する。ブートストラップ法はスタンフォード大学の統計学教授の Bradley Efron が 1979 年に発表したリサンプリングの手法であり、標本からの無作為抽出を多数回繰り返すことによって統計量の分布の性質を調べることが出来る。この方法は、正規分布を仮定できないデータに対しても適用することが出来るというメリットを有している。

本研究では、各部材の損傷率の同定値を確率変数とみなし、仮説検定を用いた統計的解釈によって、同定された損傷率が本来の損傷によるものなのか、それとも計測ノイズ等の不確定な要因によるものなのかを判断する手法を提案する。2次元フレーム構造物に提案手法を適用し、数値解析により手法の妥当性を検証する。

2. 損傷同定手法

2.1 損傷のモデル化

構造物の損傷は、剛性の減少および減衰の増加とみなすことができる。本研究では、剛性が低下した要素および減衰が増加した要素を損傷箇所とみなし、その減少および増加割合を損傷の指標として用いる。また、構造物の質量は損傷前後で不変とする。

構造物全体系の剛性マトリクス $[K]$ および減衰マトリクス $[C]$ は、各要素の剛性・減衰マトリクスの集合体として次式のようにモデル化できる。

$$[K] = \sum_{e=1}^n [K^e] \quad (1)$$

$$[C] = \sum_{e=1}^n [C^e] \quad (2)$$

ここで、 n は梁要素の総数であり、 $[K^e]$ 、 $[C^e]$ はそれぞれ e 番目の梁要素の剛性・減衰マトリクスである。

損傷により e 番目の梁要素の剛性マトリクスが一律に δk_e (無次元) の割合で減少し、減衰マトリクスが一律に δc_e (無次元) の割合で増加したとすると、 e 番目の梁要素の剛性マトリクスの減少分 $[\delta K^e]$ および減衰マトリクスの増分 $[\delta C^e]$ は、

$$[\delta K^e] = \delta k_e [K^e] \quad (3)$$

$$[\delta C^e] = \delta c_e [C^e] \quad (4)$$

と表される。よって、全体剛性マトリクスおよび全体減衰マトリクスの変分は、

$$[\delta K] = \sum_{e=1}^n \delta k_e [K^e] \quad (5)$$

$$[\delta C] = \sum_{e=1}^n \delta c_e [C^e] \quad (6)$$

となる。損傷率を表す δk_e および δc_e が同定の対象となるパラメータである。

2.2 損傷前の構造物の応答

非比例減衰系の構造物の損傷同定方程式を誘導する。損傷前の運動方程式は以下の通りである。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \cos \omega t \quad (7)$$

ここで、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はそれぞれ損傷前の質量マトリクス、減衰マトリクスおよび剛性マトリクスであり、 $\{x\}$ 、 $\{f\}$ はそれぞれ変位ベクトルおよび外力ベクトルである。外力は起振振動数 ω の調和外力と仮定する。

変位応答は次式の通りである。

$$\{x\} = [R(\omega)]\{f\} \cos \omega t - [I(\omega)]\{f\} \sin \omega t \quad (8)$$

ここでは、伝達関数を実数部 $[R(\omega)]$ と虚数部 $[I(\omega)]$ に分け以下のようにおく。

$$[R(\omega)] = \text{Re} \left\{ \left[-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K] \right]^{-1} \right\} \quad (9)$$

$$[I(\omega)] = \text{Im} \left\{ \left[-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K] \right]^{-1} \right\} \quad (10)$$

2.3 損傷後の構造物の応答

損傷により剛性マトリクスが $[\delta K]$ 低下、減衰マトリクスが $[\delta C]$ 増加し、変位が $\{\delta x\}$ 増加すると、損傷後の運動方程式は次式のようになる。

$$[M]\{(\ddot{x}) + \{\delta \ddot{x}\}\} + ([C] + [\delta C])\{(\dot{x}) + \{\delta \dot{x}\}\} + ([K] - [\delta K])\{x + \{\delta x\}\} = \{f\} \cos \omega t \quad (11)$$

本研究では、過去の地震等の作用によって部材が損傷を受け、初期剛性が低下および減衰が増加した状態を想定している。さらに、小型起振器を用いた微小の起振力を想定しているため、応答の線形性を仮定している。

式(5),(6)および(7)を式(11)に代入し、さらに2次の微小項を無視すると、変位の増分 $\{\delta x\}$ に関する次の方程式となる。

本研究では式(25)を「損傷同定方程式」と呼ぶこととする。ここで、

$$X_{l,e} = -\omega^2 S_{ij}^e(\omega) \quad (26)$$

$$X_{l,n+e} = -\omega^2 T_{ij}^e(\omega) \quad (27)$$

$$X_{m+l,e} = -\omega^2 U_{ij}^e(\omega) \quad (28)$$

$$X_{m+l,n+e} = -\omega^2 V_{ij}^e(\omega) \quad (29)$$

$$\{\alpha\} = \{\delta k_1, \dots, \delta k_n, \delta c_1, \dots, \delta c_n\}^T \quad (30)$$

$$y_l = a_R(i, j, \omega) + \omega^2 R_{ij}(\omega) \quad (31)$$

$$y_{m+l} = a_I(i, j, \omega) + \omega^2 I_{ij}(\omega) \quad (32)$$

である。\$m\$ は計測数を表し、\$l(l=1, \dots, m)\$ は異なる \$i, j, \omega\$ の組み合わせに対応する計測データ番号である。

減衰系の構造物に対しては、\$[X]\$ は \$2m \times 2n\$ のマトリックス、\$\{\alpha\}\$ は \$2n\$ の未知ベクトル、そして \$\{y\}\$ が \$2m\$ の既知のベクトルとなる。式(25)を解くことにより、損傷箇所と損傷の程度を表す \$\{\alpha\}\$ を求めることができる。

提案する損傷同定手法は、以下の2つのデータを必要とする。

1. 損傷前の構造物の構造パラメータ \$([M], [C], [K])\$
2. 損傷後の構造物から求めた FRF(\$a_R(i, j, \omega)\$, \$a_I(i, j, \omega)\$)

計測点 \$i\$、起振点 \$j\$、起振振動数 \$\omega\$ の組み合わせを様々に変えることにより、異なる損傷同定方程式を得ることができる。要素数に等しい数の計測を行えば、損傷同定方程式は、「未知数=方程式数」となり唯一の解が期待される。要素数に対して計測数が少ない場合は、ムーアペンローズの一般化逆行列を用い、逆に計測数が多い場合は最小二乗法を用いることとする。

3. ブートストラップ法を用いた同定値の有意性評価

3.1 ブートストラップ法

ブートストラップ法とは、Efron⁷⁾ によって定式化されたりサンプリングの手法であり、データからの無作為再抽出を繰り返すことにより、任意の統計値の標準偏差や信頼区間等を評価したり、経験的密度関数を推定したりすることができる。特定の正規分布等の確率分布を前提とせず、データのリサンプリングによりデータそのものから計算機で自動的に推定量の確率分布を導き、標準偏差や信頼区間を推定するというノンパラメトリックな手法である。

3.2 ブートストラップ仮説検定

仮説検定とは、観測されたデータが想定する仮説に矛盾していないかどうかを統計学的手法で判定する方法である。有意水準を定め、データから計算された確率が有意水準より大きい場合に仮説は採択され、小さい場合に仮説を棄却される。

今、あるデータを確率変数 \$X(X_1, X_2, \dots, X_m)\$ とみなし、その平均を \$\mu\$ とする。\$m\$ はデータ数である。ここで、\$\mu\$ が 0.0 であるという仮説検定(右側検定)をする問題を考える。帰無仮説は

$$H_0: \mu = 0.0 \quad (33)$$

と表され、対立仮説は

$$H_1: \mu > 0.0 \quad (34)$$

と表され、母集団からの標本に基づいた検定統計量によって判断される。

ここでは、母分散が未知であるため、\$t\$ 検定を用いることとする。検定統計量は次式で表される。

$$T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{S/(m-1)}} \quad (35)$$

ここで、\$\bar{X}\$ と \$S\$ はそれぞれ標本平均と標本標準偏差を表しており、次式で与えられる。

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m} \quad (36)$$

$$S = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_m - \bar{X})^2}{m}} \quad (37)$$

変数 \$T\$ は自由度 \$m-1\$ の \$t\$ 分布に従うこととなる。計測データを式(35)に代入することにより、検定統計量の実現値である \$t\$ 値 \$t_{obs}\$ が求まる。この \$t_{obs}\$ が大きいと判断されるかどうかは、\$p\$ 値

$$p = \Pr\{T \geq t_{obs} | H_0\} \quad (38)$$

で判断される。\$p\$ 値は、仮説の母数が真であるとしたときに、標本推定値が極端に大きい値になる確率のことである。\$p\$ 値があらかじめ設定した有意水準より大きい小さいかによって、帰無仮説の採択・棄却の決定がなされる。

ここで、帰無仮説のもとでの \$T\$ の分布が必要となる。伝統的な手法では、全ての確率変数が独立で、正規分布に従うといった理想的な仮定をするが、ブートストラップ法を用いれば、このような仮定をせず、帰無仮説の下での分布を近似的にデータだけを用いて計算機で自動的に生成することができる⁸⁾。

本研究では、観測値 \$X_i\$ より次式で表される平均 0.0 の確率変数 \$X_i^*\$ を用いて帰無仮説に従う \$T\$ の分布を求めることとする。

$$X_i^* = X_i - \bar{X} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & [M]\{\ddot{\delta x}\} + [C]\{\dot{\delta x}\} + [K]\{\delta x\} \\ & = \sum_{e=1}^n \delta K_e [K^e]\{x\} - \sum_{e=1}^n \delta C_e [C^e]\{\dot{x}\} \end{aligned} \quad (12)$$

式(8)を式(12)に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & [M]\{\ddot{\delta x}\} + [C]\{\dot{\delta x}\} + [K]\{\delta x\} \\ & = \sum_{e=1}^n \delta K_e [K^e]([R(\omega)]\cos \omega t - [I(\omega)]\sin \omega t)\{f\} \\ & + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e [C^e]([R(\omega)]\sin \omega t + [I(\omega)]\cos \omega t)\{f\} \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)を損傷による応答の増分 $\{\delta x\}$ について解くと、

$$\begin{aligned} & \{\delta x\} \\ & = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{e=1}^n \delta K_e \begin{pmatrix} [R(\omega)][K^e][R(\omega)] \\ -[I(\omega)][K^e][I(\omega)] \end{pmatrix} \\ & + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e \begin{pmatrix} [R(\omega)][C^e][I(\omega)] \\ +[I(\omega)][C^e][R(\omega)] \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \{f\} \cos \omega t \\ & + \left\{ \begin{aligned} & -\sum_{e=1}^n \delta K_e \begin{pmatrix} [R(\omega)][K^e][I(\omega)] \\ +[I(\omega)][K^e][R(\omega)] \end{pmatrix} \\ & + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e \begin{pmatrix} [R(\omega)][C^e][R(\omega)] \\ -[I(\omega)][C^e][I(\omega)] \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \{f\} \sin \omega t \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

式(8)に示した損傷前の変位 $\{x\}$ に、上式(14)で求めた損傷による変位増分 $\{\delta x\}$ を加えることにより、損傷後の応答 $\{x'\}$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \{x'\} & = \{x\} + \{\delta x\} = \\ & \left\{ [R(\omega)] + \sum_{e=1}^n \delta K_e [S^e(\omega)] + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e [T^e(\omega)] \right\} \{f\} \cos \omega t \\ & - \left\{ [I(\omega)] + \sum_{e=1}^n \delta K_e [U^e(\omega)] + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e [V^e(\omega)] \right\} \{f\} \sin \omega t \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $[S^e(\omega)]$, $[T^e(\omega)]$, $[U^e(\omega)]$, $[V^e(\omega)]$ は次式のとおりである。

$$[S^e(\omega)] = [R(\omega)][K^e][R(\omega)] - [I(\omega)][K^e][I(\omega)] \quad (16)$$

$$[T^e(\omega)] = [R(\omega)][C^e][I(\omega)] + [I(\omega)][C^e][R(\omega)] \quad (17)$$

$$[U^e(\omega)] = [R(\omega)][K^e][I(\omega)] + [I(\omega)][K^e][R(\omega)] \quad (18)$$

$$[V^e(\omega)] = -[R(\omega)][C^e][R(\omega)] + [I(\omega)][C^e][I(\omega)] \quad (19)$$

損傷後の応答 $\{x'\}$ のフーリエ振幅 $\{X'(\omega)\}$ は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} & \{X'(\omega)\} \\ & = \left([R(\omega)] + \sum_{e=1}^n \delta K_e [S^e(\omega)] + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e [T^e(\omega)] \right) \{f\} \\ & + i \left([I(\omega)] + \sum_{e=1}^n \delta K_e [U^e(\omega)] + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e [V^e(\omega)] \right) \{f\} \end{aligned} \quad (20)$$

2.4 損傷同定方程式の構築

本研究では、起振振動数における加速度応答のフーリエ振幅を、入力である調和外力の振幅で除したものを周波数応答関数(FRF)と定義する。計測点をノード i 、起振点をノード j 、起振振動数を ω としたとき、FRFの実数部 $a_R(i, j, \omega)$ および虚数部 $a_I(i, j, \omega)$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} a_R(i, j, \omega) & = \\ & -\omega^2 \left(R_{ij}(\omega) + \sum_{e=1}^n \delta K_e S_{ij}^e(\omega) + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e T_{ij}^e(\omega) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_I(i, j, \omega) & = \\ & -\omega^2 \left(I_{ij}(\omega) + \sum_{e=1}^n \delta K_e U_{ij}^e(\omega) + \omega \sum_{e=1}^n \delta C_e V_{ij}^e(\omega) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

上式において、FRFの実数部 $a_R(i, j, \omega)$ および虚数部 $a_I(i, j, \omega)$ は、計測点 i 、起振点 j 、および起振振動数 ω の関数である。

式(21)および(22)において、 $R_{ij}(\omega)$, $I_{ij}(\omega)$, $[S^e(\omega)]$, $[T^e(\omega)]$, $[U^e(\omega)]$, $[V^e(\omega)]$ はいずれも損傷前の構造物のパラメータ $[M]$, $[C]$, $[K]$ および起振振動数 ω から求まる既知の値である。また、 $a_R(i, j, \omega)$ と $a_I(i, j, \omega)$ は損傷後の周波数応答関数であり、計測により得られる値である。

式(21)と(22)を整理し、左辺に未知の項、右辺に既知の項を移項すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \sum_{e=1}^n \delta K_e S_{ij}^e(\omega) - \omega^3 \sum_{e=1}^n \delta C_e T_{ij}^e(\omega) \\ & = a_R(i, j, \omega) + \omega^2 R_{ij}(\omega) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \sum_{e=1}^n \delta K_e U_{ij}^e(\omega) - \omega^3 \sum_{e=1}^n \delta C_e V_{ij}^e(\omega) \\ & = a_I(i, j, \omega) + \omega^2 I_{ij}(\omega) \end{aligned} \quad (24)$$

式(23)と(24)は、計測点 i 、起振点 j 、起振振動数 ω の組み合わせ毎に成り立つ方程式である。よって、 i , j , ω の組み合わせを様々に変え、 m 種類の計測を行うと、次式に示すような未知数 $2n$ 個に対する $2m$ 個の連立方程式が成立する。

$$[X]\{\alpha\} = \{y\} \quad (25)$$

まず、 X_i^* から作られる経験分布を

$$F_m(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta(X_i^* \leq X) \quad (40)$$

を求める。ただし、 $\delta(\cdot)$ は定義関数である。

次に、ブートストラップ法により、 $F_m(X)$ から無作為に標本 $X^{*b} = \{X_i^{*b}, \dots, X_m^{*b}\}$ を抽出することで、検定統計量 T の分布を求めることができる。

このようにして求めた T の分布を用いて式(38)より p 値を計算することができる。有意水準を α とすると、 $p > \alpha$ のとき帰無仮説は採択され、 $p \leq \alpha$ のときに棄却されることとなる。

3.3 ブートストラップ仮説検定を用いた損傷同定

本研究では、各要素の損傷率（剛性の低下率 δk および減衰の低下率 δc ）が0.0であればその要素は損傷しておらず、0.0以上であれば損傷しているとみなされる。

2章で述べた手法では、1組の時系列データの組み合わせから1組の損傷率の同定値が得られる。時系列データを時間領域において細かく分割するブロックサンプリングによって、 m 組の時系列データが得られれば、それに対応して m 組の損傷率の同定値が得られる。これによって、各要素の損傷率（ δk や δc ）を確率変数とみなすことができる。

要素が損傷していないという仮説を立てた場合、3.2の要領で検定を行うことができ、仮説が採択されればこの要素は損傷しておらず、棄却されれば損傷しているということになる。

このような仮説検定を用いた統計的解釈によって、2章で述べた手法により同定された損傷率が、本来の損傷によるものなのか、それとも計測ノイズ等の不確定要因によるものかの判断が可能となる。

本研究で提案する手法は以下の通りである。

ステップ1：振動実験によって得られた1組の時刻歴データを時間領域で分割し、 m 組の時刻歴データを抽出する。

ステップ2： m 組のデータに前章の手法を適用して損傷同定方程式を解き、全ての要素の損傷率（ m 組）を求める。

ステップ3：各要素の損傷率に対して、ブートストラップ仮説検定を適用し、同定された損傷率が有意なものであるかを判断する。

ステップ4：損傷していないと判断された要素を損傷同定の候補から外す。候補から外す要素がなければ計算を打ち切る。

ステップ5：候補から外れた要素の損傷率は0.0であるとして、損傷同定方程式の未知数から外し、候補に残った要素を対象に

損傷同定方程式を再構築する。ステップ2に戻る。

上記のように、仮説検定により計測ノイズ等の不確定性の影響を考慮することができる。仮説が採択された（無損傷と判断された）要素を同定の候補から外すプロセスを繰り返すことにより、効率的に解を求めることができる。

4 数値解析による検証

4.1 解析モデル

解析に用いた2次元フレーム構造物は、10層2棟からなる鉄骨フレームであり、概念図を図-1に示す。高さ30m（各層高さ3m）、幅10m、奥行き10mである。材質はヤング率 21500 kg/m^3 、ポアソン比0.28、単位体積重量が 7.1 kg/m^3 の鉄である。節点数は33であり、左下から右上に向かって1～33とした。要素数は50であり、1～30は柱を、31～50は梁を表す。損傷前の減衰マトリックスはレーリー減衰を採用し、1次および2次モードに対する減衰定数を共に2%とした。

2次元フレームの損傷モデルとして、図-2に示す損傷率を想定した。横軸は要素番号、縦軸は各要素の剛性低下率および減衰の増加率を表す無次元量である。要素10（柱）が40%、要素14（柱）が20%、要素47（梁）が30%の損傷を受けている。

解析条件としては、ノード22を起振振動数1Hzで60秒間水平方向に加振し、水平方向の応答を30個ある全ての自由節点において計測することを想定する。50個の要素に対して30個のデータが得られることになるので、損傷同定方程式を解く際にはムーアペンローズの一般化逆行列を用いた。

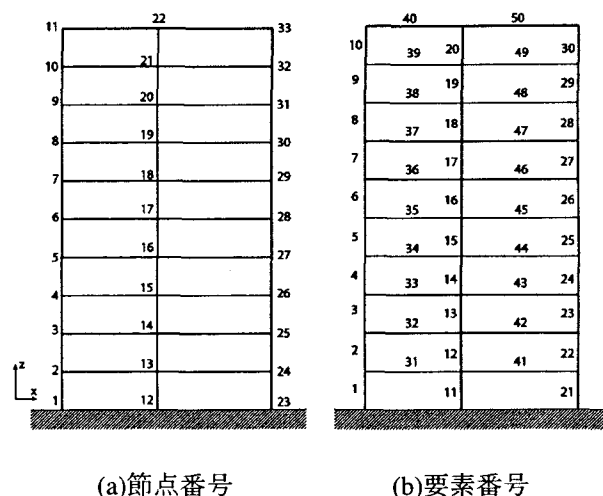


図-1. 解析モデル

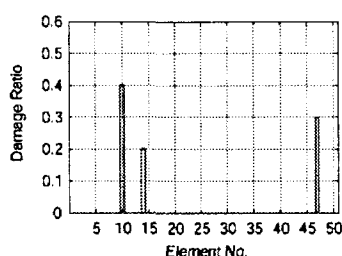
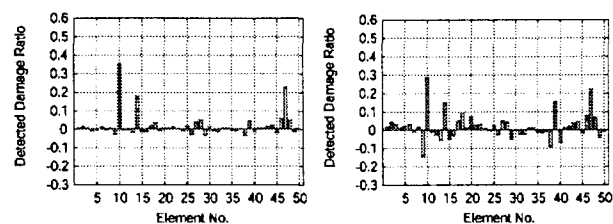


図-2 損傷モデル

4.2 ノイズが無い場合

まず、ノイズが無い場合に対して、2章で述べた手法を用いた同定結果を図-3に示す。実際に損傷している3要素の同定に関しては非常に高い精度で成功している。損傷していない要素39(梁)に減衰で約18%の損傷が、要素9(柱)に減衰で約-15%の負の損傷が検出されている。これは、要素10がノード9において要素39と要素接触しており、要素10の損傷が実際よりも小さく見積もられた分の影響が2要素の結果に表れていると言える。また、全体的に見て損傷している要素は小さく見積もられており、その分周辺の要素に微小な損傷が検出されている。負の剛性低下率(剛性の増加)と負の減衰増加率(減衰の低下)を持つと判定された要素も存在する。要素数に対して計測数が少ない為、方程式を満たす解は無限個存在するが、ムーアペンローズの一般化逆行列はそのうちノルムと誤差を最小とする解を選択するため、3要素の損傷が全体的に分散され、かつ負の値をとる要素が出てくるものと考えられる。

とは言え、全体的に見れば精度は良く、ノイズが無い状況においては、2章で述べた手法によって損傷の同定が可能となることを示すことができた。



(a)剛性低下率

(b)減衰増加率

図-3 ノイズが無い場合の同定結果

4.3 ノイズがある場合

次に、ノイズがある場合に対して、2章で述べた手法の検討を行った。

観測ノイズの影響を考慮する為、数値計算によっ

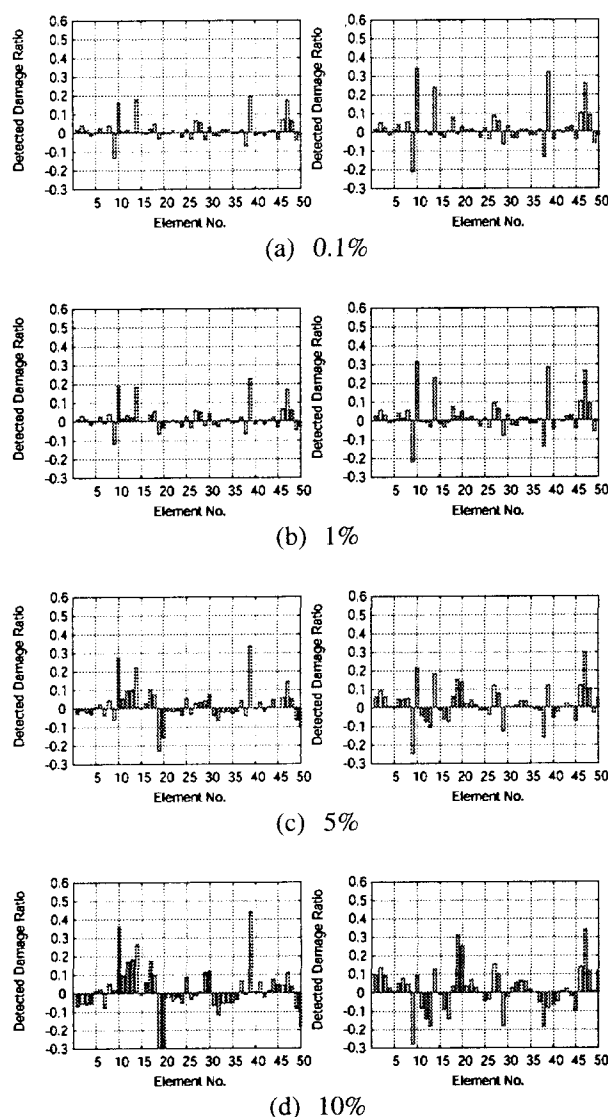


図-4 ノイズがある場合の同定結果
(左：剛性低下率，右：減衰増加率)

て得られた応答の時刻歴波形にガウス分布を有するノイズを与えた。応答波形に混入するノイズは、応答値と観測ノイズの標準偏差の比を基準にして次式により求めた⁹⁾。

$$\nu = \frac{\sigma_{noise}}{\sigma_{resp}} \times 100(\%) \quad (41)$$

ここで、 σ_{resp} は観測ノイズを含まない真の観測波形の標準偏差、 σ_{noise} は観測ノイズの標準偏差である。

本研究では、 $\nu=0.1\%$ 、 1% 、 5% 、 10% の4通りのノイズレベルに対して解析を行った。それぞれの同定結果を図-4(a)~(d)に示す。

ノイズの割合の少ない 0.1% 、 1% に対しては、比較的よい精度で同定が可能となっている(図4-(a)(b))。損傷している3要素10、14、47に他より大きな損傷が検出されている。要素10の損傷が過

小評価であるが、その分隣接する要素 39 に大きな正の損傷、要素 9 に負の損傷が検出されている。ノイズの割合が大きくなるにつれて、同定精度が低下している。5%、10%のノイズレベルでは、実際に損傷していない要素に比較的大きな損傷が検出されたり(positive falsity)している(図 4-(c)(d))。また、損傷率の小さい要素ほどノイズに埋もれてしまう傾向にある。この理由は、本研究で用いる同定手法が、損傷前後の応答の差から損傷を同定するからであり、損傷による応答の差よりもノイズのレベルが大きければ手法がうまく機能しないのは当然のことと言える。

次に、同定精度の悪かったノイズレベル 10%に対して、水平・鉛直両方向の計測データを用いることにより、同定に用いるデータ数を増加させた。これにより、要素数 50 に対してデータ数が 60 となるため、最小二乗法を用いて損傷同定方程式を解いた。

同定結果を図-5に示す。水平方向だけのデータを用いた図-4(d)の結果と比べて、あまり同定精度は向上しておらず、要素によっては精度が悪化したものもある。ノイズを多く含んだデータを追加しても、ほとんど精度は変わらないか、逆に精度を悪化させる可能性のあることが示された。

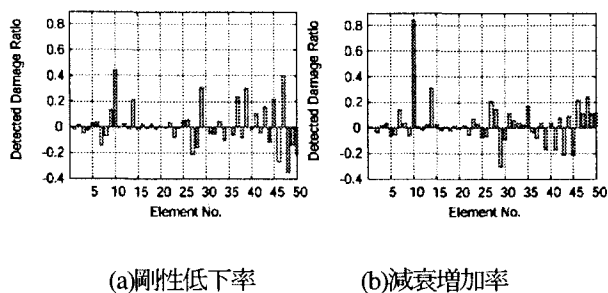


図-5 計測データ数を増やした場合の同定結果
(ノイズレベル 10%)

4.4 ブートストラップ 仮説検定を用いた損傷同定

次に、ノイズがある場合に対して、3章で提案したブートストラップ仮説検定を用いた統計的手法を適用した。有意水準 α として大きな値を採用すれば損傷の候補に残る要素数が増え、繰り返し計算回数が増えることになる。逆に α の値が小さければ、損傷しているのに損傷していないと判断される可能性が増える。本研究では、統計学でよく用いられる 5% を採用した。ここで注意しなくてはならないのは、仮説が棄却されるということは、仮説が正しくないというわけではなく、仮説が非常に疑わしいということの意味するということである。これは、観測値が確率的である限り、確定的な判断は絶対に出来ないためである。

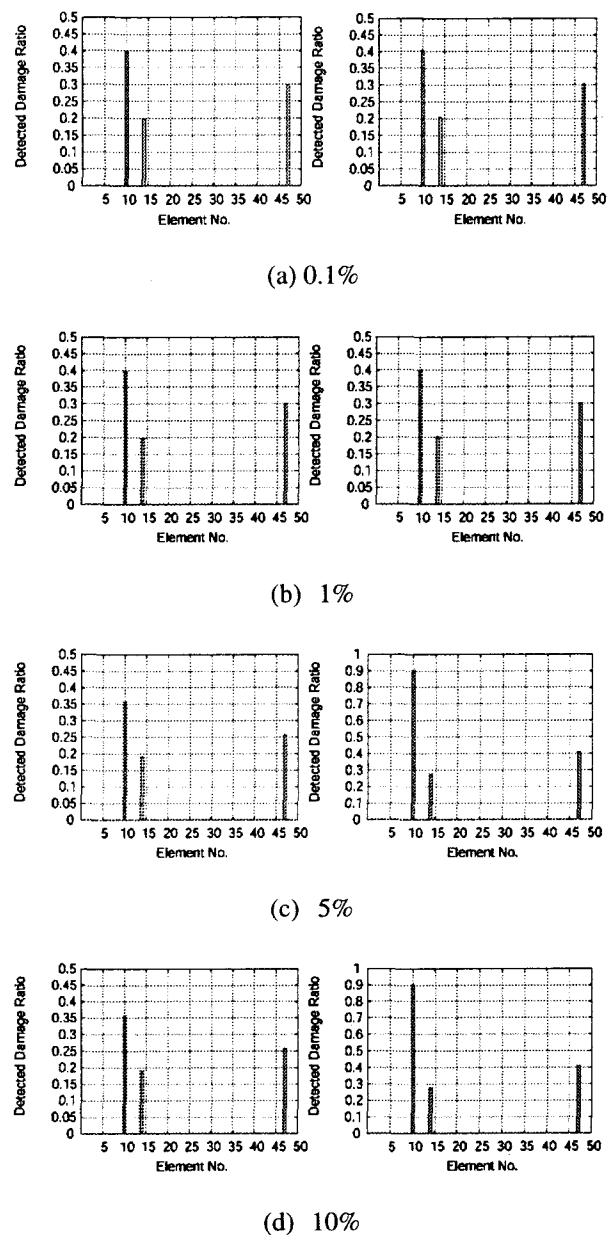


図-6 ブートストラップ仮説検定を用いた同定結果
(左：剛性低下率，右：減衰増加率)

4.3 と同様に、 $\nu=0.1\%$, 1% , 5% , 10% の 4 通りのノイズレベルに対して解析を行った。データ数を 30 組とし、ブートストラップ反復回数を 10000 とした。具体的には、60 秒間の計測データから、30 秒間のデータを 1 秒ずらして 30 組得る。このように時間領域のブロックリサンプリングによって 30 組の時系列データを得て、全ての要素に対して 30 組の同定結果を求める。次に、各要素毎に 30 組の同定値の中から重なりを許して 30 個の値を選び出し、それより T の値を求める。これを 10000 回繰り返すことにより、T の値の分布を求めたということである。

それぞれの同定結果を図-6(a)~(d)に示す。剛性

の低下率と減衰の増加率の両方が0.0であるという帰無仮説が採択された要素を候補から外し、剛性の低下率と減衰の増加率のどちらか一方でも0.0以上であると判断された要素は損傷の可能性のある要素とみなす。3.3で述べた手法により、候補から外す要素がなくなるまで計算を繰り返し、候補から外す要素がなくなった段階で、要素毎に30組の同定値の平均値を求めたものが、図-6に示した結果である。

4.3で既に比較的精度良い同定値が得られていたノイズレベル0.1%, 1%に対しては、2回の繰り返し計算でほとんど真の解に近い同定結果が得られた。4.3で精度が悪かった5%, 10%に関しても、本統計的手法を用いることで、3回の繰り返し計算で最終回が得られ、同定精度が格段に向上したことが分かる。このように、計測数を増やしても解決しない計測ノイズの問題に対して、時系列データの分割とブートストラップ法を用いた仮説検定により、損傷している要素が損傷していないと判断されたり(negative falsity)、実際に損傷していない要素に比較的大きな損傷が検出されたり(positive falsity)する問題が解決されることがわかる。

5 結論

本研究では、起振器を用いた構造物の損傷検出手法を実際の構造物に適用するに際して直面する計測ノイズの影響を考慮する為の手法を提案した。提案手法は、近年統計科学の分野で脚光を浴びているブートストラップ法を用いた仮説検定によるものである。起振応答の時刻歴データを時間領域で分割することで数多くの同定値を集め、これらを確率変数とみなす。そして、仮説検定を利用した統計的解釈によって、正の損傷率が得られた場合であっても、それが本来の損傷によるものなのか、それとも計測ノイズ等の不確定性によるものなのかを判断することが出来る。2次元のフレーム構造物を対象とした数値実験を通して、仮説検定を用いない確定的手法では非常に判定誤りの多かったノイズレベルの

高いケースに対しても、本手法を用いることで格段に精度が向上できることを示すことができた。

参考文献

- 1) Furukawa, A. and Kiyono, J.: Structural damage identification based on harmonic excitation force, *Structural Health Monitoring and Intelligent Infrastructure*, Vol.1, pp.535-542, 2003
- 2) Ljung, L.: *System identification*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987,
- 3) 佐藤忠信, 竹井賢二: 適応型カルマンフィルタの開発とその応用, *土木学会論文集*, No.584/I-42, pp.162-173, 1998
- 4) Takaba, K. and Hoshiba, M.: Discrete-time H^∞ algebraic Riccati equation and parameterization of all H^∞ filters, *International journal of Control*, 64(6), pp.1129-1149, 1996
- 5) Xia, Y., Hao, H., Brownjohn, J.M.W., Xia, P.: Damage identification of structures with uncertain frequency and mode shape data, *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, 31, pp. 1053-1066, 2002
- 6) Yeo, I., Shin, S., Lee, H.S., and Chang, S.P.: Statistical Damage Assessment of Framed Structures from Static Responses, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 4, pp. 414-421, 2000
- 7) Davison, A.C.: *Bootstrap methods and their application*, Cambridge University Press, 1997
- 8) 汪金芳, 田栗正章, 手塚集, 樺島祥介, 上田修功: *計算統計 I*, 岩波書店, 2003
- 9) 佐藤忠信, 梶啓介: 非線形構造システムの線形同定法, *土木学会論文集*, No.647/I-51, pp.155-165, 2000

(2004年4月16日 受付)