

レイノルズ応力を考慮した格子ボルツマン法の構築

Development of Reynolds Averaged Model based on Lattice Boltzmann Equation

藤岡 奨*・牛島 省**

Susumu FUJIOKA and Satoru USHIJIMA

*学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (同上)

A Reynolds averaged model is derived from Lattice Boltzmann Equation to obtain a new Lattice Boltzmann Method to predict turbulent flows. The velocity distribution function in LBM has been taken as an ensemble average of velocity density of the ideal particles. In this paper, the velocity distribution function is regarded as an instantaneous value so that it is divided into ensemble-averaged value and fluctuating components. By using Chapman-Enskog procedure, a component of Reynolds stress, which has to be evaluated by other turbulent models, is introduced into the equilibrium function. The validity of the proposed model using 0-equation model is also discussed by applying to a plane compound shear layer.

Key Words : LBE, RANS model, LBM, Reynolds stress, Chapman-Enskog expansion
0-equation model

1. はじめに

1990 年代から盛んに研究されるようになってきた格子 Boltzmann 法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM) は, Navier-Stokes 方程式を差分化して利用する非圧縮性流体解析法と比較して, 計算アルゴリズムが簡潔であること, 原理的に質量および運動量の保存を満足すること, 圧力に関するポアソン方程式を解く必要がないこと, また, 非線形項の取り扱いが必要ないことなどの利点を有する新しい流体解析法である¹⁾. また LBM は近年, 気液混相流や固液混相流などの各種多相流れへの有効性が示されており^{2),3)}, 新しい流体解析法として注目されている.

本論文では, 非圧縮性流体計算法に基づく解法ではなく, 以上に挙げたような利点を持つ LBM を用いた乱流計算法を考察する. LBM の乱流への適用という問題に関しては, 近年, LES, SGS 応力モデルなどのサブグリッドスケールモデルを用いた乱流解析の報告がなされている^{4),5)}. 一方で, LBM の乱流への適用を試みた研究例は数少なく, 工学的に有用性のある RANS 方程式を用いた LBM についての考察は, ほとんど見られない.

RANS 方程式を用いた乱流解析は LES を用いた乱流解析と比較して得られる情報は少ないが, 工学的に利用される場面が少なくない. このため, 本論文では Reynolds 平均された LBM に基づく Reynolds

Averaged-LBM(以下, RA-LBM) の誘導について考察を行う.

RA-LBM は, 体積力を考慮した LBM⁶⁾ から導いた. RA-LBM の導出過程においては, 速度分布関数 f_i は, アンサンブル平均値 f_{i*} と変動成分 $f_{i\oplus}$ に分けられる. そして, 格子 Boltzmann 方程式 (以下, LBE) から RANS 方程式が導かれるように局所平衡分布関数に Reynolds 応力を表す項が導入された. 新しく定義された LBE から RANS 方程式を導出するに当たっては, 通常 LBE から Navier-Stokes 式を導出する際によく用いられる Chapman-Enskog 展開を用いた.

本論文では, 0 方程式乱流モデルを用いて, 提案した RA-LBM を 2 次元せん断層に適用し, 理論解および実験値との比較を行い, その妥当性を確認した.

2. 本論文で取り扱う LBM のモデル

以下, 本論文では, 正方形又は立方体格子を用いた 2d9v, 3d15v, 3d19v, 3d27v モデルについてのみ考察する. 六角形格子を用いる 2d7v, 4d24v モデルなどは, 取り扱わない. LBM では, 仮想粒子の速度分布関数 f_i は以下の LBE に従って, 時間発展する.

$$f_i(\mathbf{r} + c\mathbf{e}_i\delta_t, t + \delta_t) - f_i(\mathbf{r}, t) = \Omega(f) \quad (1)$$

ここで, $\mathbf{r}$ は位置ベクトル, δ_t は時間刻み, c は仮想粒子の並進速度, $\mathbf{e}_i$ は各速度の方向 i に向かう単位ベクトルである. また, 以下では $c\mathbf{e}_i = \mathbf{c}_i$ と表記する. f_i

は速度分布関数であり、時間 t , 位置 $\mathbf{r}$ における、 i 方向の速度ベクトルをもつ仮想粒子の密度である。 $\Omega(f)$ は、衝突演算子で、一般的には、次の Bhatnagar-Gross-Krook(BGK) モデル ⁷⁾ が使われることが多い。

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{(eq)}(\mathbf{r}, t)] \quad (2)$$

τ は、緩和時間であり、 $\tau > 1/2$ を満たすように決められる。 $f_i^{(eq)}$ は局所平衡分布関数であり、以下に示すように、流体の流速 $\mathbf{u}$ および密度 ρ から求められる。

$$f_i^{(eq)} = w_i \rho \left[1 + \frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2c^2} \right] \quad (3)$$

ここで、 w_i は、 $\mathbf{c}_i$ に応じて決まる定数であり、本論文で取り扱うモデルにおいては、次のように決められている。 2d9v モデルでは、

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & (i = 0) \\ (\pm 1, 0), (0, \pm 1) & (i = 1, \dots, 4) \\ (\pm 1, \pm 1) & (i = 5, \dots, 8) \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & (i = 0) \\ 1/9 & (i = 1, \dots, 4) \\ 1/36 & (i = 5, \dots, 8) \end{cases}$$

3d15v モデルでは、

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0, 0) & (i = 0) \\ (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1) & (i = 1 \dots 6) \\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1) & (i = 7, \dots, 14) \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} 2/9 & (i = 0) \\ 1/9 & (i = 1, \dots, 6) \\ 1/72 & (i = 7, \dots, 14) \end{cases}$$

3d19v モデルでは、

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0, 0) & (i = 0) \\ (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1) & (i = 1 \dots 6) \\ (\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1) & (i = 7, \dots, 14) \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} 1/3 & (i = 0) \\ 1/18 & (i = 1, \dots, 6) \\ 1/36 & (i = 7, \dots, 18) \end{cases}$$

3d27v モデルでは、

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0, 0) & (i = 0) \\ (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1) & (i = 1 \dots 6) \\ (\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1) & (i = 7, \dots, 18) \\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1) & (i = 19, \dots, 26) \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} 8/27 & (i = 0) \\ 2/27 & (i = 1, \dots, 6) \\ 1/54 & (i = 7, \dots, 18) \\ 1/216 & (i = 19, \dots, 26) \end{cases}$$

となる。これら全てのモデルの $w_i, \mathbf{c}_i$ に対して、次の関係式が成り立つことが確かめられる。

$$\sum_i w_i = \mathcal{W}^{(0)} = 1 \quad (4)$$

$$\sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = \mathcal{W}^{(2)} = \frac{c^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \quad (5)$$

$$\sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} = \mathcal{W}^{(4)} = \frac{c^4}{9} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (6)$$

$$= \frac{c^4}{9} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は、 x, y, z を表す指標である。また、 $\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタ記号である。以下では簡単のため、 $\mathbf{c}_i$ の n 次のモーメントを $\mathcal{W}^{(n)}$ で表すこととした。これらの全てのモデルの $w_i, \mathbf{c}_i$ に対して、 $\mathbf{c}_i$ の奇数次のモーメントは全て 0 となることも確認できる。

$$\sum_i w_i c_{i\alpha} = \sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = \mathcal{W}^{(1)} = \mathcal{W}^{(3)} = 0 \quad (7)$$

である。LBM においては、流体の流速 $\mathbf{u}$, 密度 ρ , 圧力 p は、以下の式で速度分布関数と関連づけられる。

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho u_\alpha = \sum_i f_i e_{i\alpha}, \quad p = c_s^2 \sum_i f_i \quad (8)$$

また、 $c_s = c/\sqrt{3}$ である。これらの式から導かれる連続式と Navier-Stokes 方程式は、以下の通りとなる。

$$\partial_t \rho + \partial_\alpha (\rho u_\alpha) = 0 \quad (9)$$

$$\partial_t (\rho u_\alpha) + \partial_\beta (\rho u_\alpha u_\beta) = -\partial_\alpha P + \nu \nabla^2 u_\alpha \quad (10)$$

このように、これらのモデルでは、Navier-Stokes 式、連続式を満たすようなモデル構成になっているが、体積力、Reynolds 応力の項は考慮されていない。ただし、 ∂_x は、 x による偏微分を示す。

3. RA-LBM の構築

3.1 重力を考慮した LBM の概要

体積力 $\mathbf{F}$ が存在する場合の LBM は、体積力 $\mathbf{F}$ を考慮した以下の Boltzmann 方程式 ⁷⁾ から導出されている ⁶⁾。

$$\partial_t f + c_\alpha \partial_{r\alpha} f + F_\alpha \partial_{c\alpha} f = \Omega(f) \quad (11)$$

LBM に体積力を表す項を付け加える方法は、経験的に様々な手法が提案されてきた。J.Buick and C.Greated ⁶⁾ は、LBM に体積力を考慮する複数の手法を比較検討している。ここでは、彼らが検討した手法のうち、最も妥当と判断されたモデルを用いること

とする。彼らのモデルでは、LBE は体積力を考慮して以下のように定義される。

$$f_i(\mathbf{r} + c\mathbf{e}_i\delta_t, t + \delta_t) - f_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\tau}[f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{(eq)}(\mathbf{r}, t)] + \frac{3mw_i}{c^2}F_\alpha c_{i\alpha} \quad (12)$$

ここで、 α に関しては、アインシュタインの総和の規約が用いられている。また、 $m = (2\tau - 1)\delta_t/(2\tau)$ である。 F_α は、 α 方向に働く体積力である。このモデルでは流速 v_α は、

$$\rho v_\alpha = \rho u_\alpha + \frac{F_\alpha \delta_t}{2} \quad (13)$$

で表される。ただし、

$$\rho u_\alpha = \sum_i f_i c_{i\alpha} \quad (14)$$

である。以下では $\mathbf{u}$ を、外力がない場合の流速と呼ぶ。その他の事項については、通常の LBM と同様である。

3.2 変数の Chapman-Enskog 展開

LBE から、連続式や Navier-Stokes 式を導く際には、Chapman-Enskog 展開が用いられることが多い⁶⁾。Chapman-Enskog 展開を用いるために、式 (12) の左辺を二次まで Taylor 展開する。

$$f_i(\mathbf{r} + c\mathbf{e}_i\delta_t, t + \delta_t) - f_i(\mathbf{r}, t) \cong \left[(\partial_t + c_{i\alpha}\partial_\alpha)\delta_t + \frac{1}{2}(\partial_t + c_{i\alpha}\partial_\alpha)^2\delta_t^2 \right] f_i \quad (15)$$

Knudsen 数に相当する微量量 ε を用いて、 $f_i, f_i^{(eq)}, \partial_t, \partial_\alpha, F_\alpha$ を次のように二次まで展開する⁶⁾。

$$f_i = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} \quad (16)$$

$$f_i^{(eq)} = f_i^{(eq0)} + \varepsilon f_i^{(eq1)} + \varepsilon^2 f_i^{(eq2)} \quad (17)$$

$$\partial_t = \varepsilon \partial_{t1} + \varepsilon^2 \partial_{t2} \quad (18)$$

$$\partial_\alpha = \varepsilon \partial_\alpha \quad (19)$$

$$F_\alpha = \varepsilon F_\alpha \quad (20)$$

ここで、 $f^{(l)}$ は、 ε の l 次の非平衡量である。

3.3 速度分布関数の Reynolds 分解

本論文では、平均量に関しては $*$ 、変動成分に関しては $\oplus$ の記号を用いる。ただし、局所平衡分布関数 $f_i^{(eq)}$ に対して $*$ を用いるときは、平均化された流速 $u_{*\alpha}$ 、圧力から計算される量を示すものとし、平均化された局所平衡分布関数を表すわけではないことに注意する。瞬間の速度分布関数の l 次の非平衡量 $f_i^{(l)}$ 、局所平衡分布関数の l 次の非平衡量 $f_i^{(eq l)}$ 、外力がない場合の流速 $\mathbf{u}$ 、

体積力 $\mathbf{F}$ に関して Reynolds 分解すると、

$$f_i^{(l)} = f_{i*}^{(l)} + f_{i\oplus}^{(l)} \quad (l = 0, 1, \dots) \quad (21)$$

$$f_i^{(eq l)} = f_{i*}^{(eq l)} + f_{i\oplus}^{(eq l)} \quad (l = 0, 1, \dots) \quad (22)$$

$$u_\alpha = u_{*\alpha} + u_{\oplus\alpha} \quad (23)$$

$$F_\alpha = F_{*\alpha} + F_{\oplus\alpha} \quad (24)$$

また、速度分布関数 f_i 、局所平衡分布関数 $f_i^{(eq)}$ について Reynolds 分解したときの平均量と変動量の、 l 次の非平衡成分との関係は、それぞれ式 (21)、式 (22) から、

$$f_{i*} = \sum_l \varepsilon^l f_{i*}^{(l)}, \quad f_{i\oplus} = \sum_l \varepsilon^l f_{i\oplus}^{(l)} \quad (25)$$

$$f_{i*}^{(eq)} = \sum_l \varepsilon^l f_{i*}^{(eq l)}, \quad f_{i\oplus}^{(eq)} = \sum_l \varepsilon^l f_{i\oplus}^{(eq l)} \quad (26)$$

となる。外力のない場合の流速 $\mathbf{u}$ は速度分布関数と線形の関係にあるので、流速 v_α を平均量 $u_{*\alpha}$ と変動成分 $u_{\oplus\alpha}$ に分けると、それぞれ、

$$\rho v_{*\alpha} = \rho u_{*\alpha} + \frac{1}{2} F_{*\alpha} \delta_t \quad (27)$$

$$\rho v_{\oplus\alpha} = \rho u_{\oplus\alpha} + \frac{1}{2} F_{\oplus\alpha} \delta_t \quad (28)$$

となる。

3.4 LBE の Reynolds 平均操作

前節で得られた Reynolds 分解の表現を用いて、式 (12) 全体を Reynolds 分解し、Reynolds 平均操作を行う。まず、前節で得られた式 (21)、(22)、(24) を式 (12) に代入すると、

$$f_{i*}(\mathbf{r} + c\mathbf{e}_i\delta_t, t + \delta_t) + f_{i\oplus}(\mathbf{r} + c\mathbf{e}_i\delta_t, t + \delta_t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)(f_{i*} + f_{i\oplus}) + \frac{1}{\tau}(f_{i*}^{(eq)} + f_{i\oplus}^{(eq)}) + \frac{3mw_i}{c^2}(F_{*\alpha} + F_{\oplus\alpha})c_{i\alpha} \quad (29)$$

が得られる。ここで、式全体に対して Reynolds 平均操作を施す。変動成分 $f_{i\oplus}$ の平均は 0 と考えることができる。ここで、 $\overline{f_{i\oplus}^{(eq)}}$ が 0 にならない理由について述べる。 $f_i^{(eq)}$ は、式 (3) で示されるように、流速 $\mathbf{u}$ 、圧力 p により計算され、流速 $\mathbf{u}$ に関する二次の項を含む。従って、局所平衡分布関数 $f_i^{(eq)}$ の時間平均は、時間平均された流速 $\mathbf{u}$ 、圧力 p から計算される局所平衡分布関数 $f_{i*}^{(eq)}$ とは異なる値を取る。 $\overline{f_{i\oplus}^{(eq)}}$ の項は、それらの差を表す項である。体積力については、変動成分は 1 次の項なので、平均をとって 0 とする。その結果、式 (29) は以下の通りとなる。

$$f_{i*}(\mathbf{r} + c\mathbf{e}_i\delta_t, t + \delta_t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)f_{i*} + \frac{1}{\tau}(f_{i*}^{(eq)} + \overline{f_{i\oplus}^{(eq)}}) + \frac{3mw_i}{c^2}F_{*\alpha}c_{i\alpha} \quad (30)$$

となる。ただし、 $\bar{\cdot}$ は、平均された量であることを示す。

3.5 RANS 方程式の導出

本節では、式 (30) から、Chapman-Enskog 展開を用いて RANS 方程式を導く。式 (30) の左辺は、式 (15) のように展開される。ここに、式 (16)-(20) を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left((\varepsilon \partial_{t1} + \varepsilon^2 \partial_{t2} + \varepsilon c_{i\alpha} \partial_\alpha) \delta_t \right. \\ & \left. + \frac{\delta_t^2}{2} (\varepsilon \partial_{t1} + \varepsilon^2 \partial_{t2} + \varepsilon c_{i\alpha} \partial_\alpha)^2 \right) \cdot \left(f_{i*}^{(0)} + \varepsilon f_{i*}^{(1)} \right. \\ & \left. + \varepsilon^2 f_{i*}^{(2)} \right) = -\frac{1}{\tau} \left(f_{i*}^{(0)} + \varepsilon f_{i*}^{(1)} + \varepsilon^2 f_{i*}^{(2)} - f_{i*}^{(eq0)} \right. \\ & \quad \left. - \overline{f_{i*}^{(eq0)}} - \varepsilon f_{i*}^{(eq1)} - \varepsilon \overline{f_{i*}^{(eq1)}} - \varepsilon^2 f_{i*}^{(eq2)} \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon^2 \overline{f_{i*}^{(eq2)}} \right) + \frac{\varepsilon 3m w_i}{c^2} F_{*\alpha} c_{i\alpha} \quad (31) \end{aligned}$$

ここで、 ε の次数についてまとめていくと次式が得られる。ただし、以下の式で、 $D_{t1} = \partial_{t1} + c_{i\alpha} \partial_\alpha$ である。

$$(\varepsilon^0) \quad f_{i*}^{(0)} = f_{i*}^{(eq0)} + \overline{f_{i*}^{(eq0)}} \quad (32)$$

$$(\varepsilon^1) \quad D_{t1} \delta_t f_{i*}^{(0)} = -\frac{1}{\tau} \left(f_{i*}^{(1)} - f_{i*}^{(eq1)} - \overline{f_{i*}^{(eq1)}} \right) + \frac{3m w_i}{c^2} F_{*\alpha} c_{i\alpha} \quad (33)$$

$$(\varepsilon^2) \quad \left(\partial_{t2} \delta_t + \frac{1}{2} D_{t1}^2 \delta_t^2 \right) f_{i*}^{(0)} + D_{t1} \delta_t f_{i*}^{(1)} = -\frac{1}{\tau} \left(f_{i*}^{(2)} - f_{i*}^{(eq2)} - \overline{f_{i*}^{(eq2)}} \right) \quad (34)$$

式 (33) を用いて、式 (34) の左辺を変形し、式 (33)、式 (34) の辺々を足しあわせると、

$$\begin{aligned} & (\partial_{t2} + D_{t1}) f_{i*}^{(0)} + \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) D_{t1} f_{i*}^{(1)} + \frac{1}{2\tau} D_{t1} f_{i*}^{(eq1)} \\ & + \frac{3m \delta_t}{2c^2} D_{t1} F_{*\alpha} c_{i\alpha} = -\frac{1}{\tau \delta_t} \left(f_{i*}^{(2)} + f_{i*}^{(1)} - f_{i*}^{(eq2)} - f_{i*}^{(eq1)} \right. \\ & \left. - \overline{f_{i*}^{(eq1)}} - \overline{f_{i*}^{(eq2)}} \right) + \frac{3m w_i}{c^2 \delta_t} F_{*\alpha} c_{i\alpha} \quad (35) \end{aligned}$$

となる。ここで得られた式を、式 (32) を考慮して i について足しあわせる。左辺第一項は、付録で示した式 (III.7)、式 (III.13) を利用し、 $\partial_{t1} + \partial_{t2} = \partial_t$ とすることで、

$$(\text{左辺第一項}) = \partial_t \rho + \partial_\alpha \rho u_{*\alpha} \quad (36)$$

となる。左辺第二項と第三項の和は、式 (I.3)、式 (I.4)、式 (III.9)、式 (III.15) より、 $1/(2\tau) \cdot \partial_\alpha F_{*\alpha} \delta_t/2$ となる。重力の強さが場所によらず、一定の場合は、この項は 0 となる。左辺第四項も重力が一定のもとでは 0 となる。一方、右辺の前半の括弧の中は、式 (III.9) - (III.12) などにより全て 0 となり、後半は、速度ベクトルの等方性により 0 となる。以上より、平均流に対する連続式

$$\partial_t \rho + \partial_\alpha \rho u_\alpha = 0 \quad (37)$$

が得られる。一方、運動方程式の導出の為に式 (35) に $c_{i\gamma}$ を乗じてその後に i について和を取ることを考える。式 (35) の左辺第二項と第三項を変形するために、 $\sum_i f_{i*}^{(1)} c_{i\alpha} c_{i\beta}$ を求める必要があるので、式 (33) を用いて次のように計算する。

$$\begin{aligned} f_{i*}^{(1)} &= f_{i*}^{(eq1)} + \overline{f_{i*}^{(eq1)}} + \frac{3m w_i \tau}{c^2} F_{*\alpha} c_{i\alpha} - D_{t1} \delta_t \tau f_{i*}^{(0)} \\ \text{辺々に } c_{i\beta} c_{i\gamma} \text{ を乗じて和を取ると,} \\ \sum_i f_{i*}^{(1)} c_{i\beta} c_{i\gamma} &= \sum_i f_{i*}^{(eq1)} c_{i\beta} c_{i\gamma} + \sum_i \overline{f_{i*}^{(eq1)} c_{i\beta} c_{i\gamma}} \\ &+ \frac{3m \tau}{c^2} F_{*\alpha} \sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} \\ &- \left(\partial_{t1} \sum_i f_{i*}^{(0)} c_{i\beta} c_{i\gamma} + \partial_\alpha \sum_i f_{i*}^{(0)} c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} \right) \delta_t \tau \\ &= \sum_i f_{i*}^{(eq1)} c_{i\beta} c_{i\gamma} + \overline{u_{\oplus\beta} F_{\oplus\gamma}} + \overline{u_{\oplus\gamma} F_{\oplus\beta}} \\ &- D_{t1} \sum_i f_{i*}^{(0)} c_{i\beta} c_{i\gamma} \delta_t \tau \quad (38) \end{aligned}$$

となる。これを利用して式 (35) の左辺第二項と第三項を変形する。外力として重力を考え、これが時間的、空間的に一定とすると、 $\partial_{t1} \sum_i f_{i*}^{(eq1)} c_{i\gamma} = \partial_{t1} F_{*\gamma} \delta_t/2 = 0$ となる。式 (35) に $c_{i\gamma}$ を乗じて i について和を取る。

$$\begin{aligned} & \partial_t \sum_i f_{i*}^{(0)} c_{i\gamma} + \partial_\alpha \sum_i f_{i*}^{(0)} c_{i\alpha} c_{i\gamma} + \partial_\beta \left(\left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \cdot \right. \\ & \left. (\overline{u_{\oplus\beta} F_{\oplus\gamma}} + \overline{u_{\oplus\gamma} F_{\oplus\beta}} - D_{t1} \sum_i f_{i*}^{(0)} c_{i\beta} c_{i\gamma} \delta_t \tau) \right. \\ & \left. + \sum_i f_{i*}^{(eq1)} c_{i\beta} c_{i\gamma} \right) + \frac{3m \delta_t}{2c^2} D_{t1} F_{*\alpha} \sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\gamma} \\ & = -\frac{1}{\tau \delta_t} \left(\sum_i (f_{i*}^{(2)} + f_{i*}^{(1)} - f_{i*}^{(eq2)} - f_{i*}^{(eq1)} \right. \\ & \left. - \overline{f_{i*}^{(eq2)}} - \overline{f_{i*}^{(eq1)}}) c_{i\gamma} \right) + \frac{3m}{c^2 \delta_t} F_{*\alpha} \sum_i w_i c_{i\alpha} c_{i\gamma} \quad (39) \end{aligned}$$

式 (32) を考慮して i について和を取る。式 (III.13) - (III.21) などより、

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho u_\gamma + \partial_\alpha \left(\frac{\rho c^2}{3} \delta_{\alpha\gamma} + \rho (u_{*\alpha} u_{*\gamma} + \overline{u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\gamma}}) \right) \\ & + \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \partial_\beta (\overline{u_{\oplus\beta} F_{\oplus\gamma}} + \overline{u_{\oplus\gamma} F_{\oplus\beta}}) \\ & - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \partial_\beta \partial_{t1} (u_{*\beta} F_{*\gamma} + u_{*\gamma} F_{*\beta}) \delta_t \tau \\ & - \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \partial_\beta \partial_\alpha \frac{\rho c^2}{3} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\delta} \delta_t \tau \\ & + \frac{1}{2} \partial_\beta (u_{*\beta} F_{*\gamma} + u_{*\gamma} F_{*\beta}) = \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{m}{\delta_t} \right) F_{*\alpha} \quad (40) \end{aligned}$$

となる。ところで、付録 III に示されるように、 $\sum_i f_i c_i^2$ は圧力を含んだ広義の運動量を表している。運動量は

保存されるので、 $\partial_t \sum_i f_i c_i^2 = 0$ となる。また、重力場に変動がないとすると、 $F_\oplus = 0$ であるので、

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho u_{*\gamma} + \partial_\alpha \left(\frac{\rho c^2}{3} \delta_{\alpha\gamma} + \rho(u_{*\alpha} u_{*\gamma} + \overline{u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\gamma}}) \right) \\ & + \frac{1}{2} (u_{*\alpha} F_{*\gamma} + u_{*\gamma} F_{*\alpha}) \\ & = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\delta_t c^2}{3} \partial_\beta \partial_\alpha \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} u_\delta + F_{*\gamma} \end{aligned} \quad (41)$$

となる。流速は式(13)で定義されるが、 F_α は時間的・空間的に一定と考えると、

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho v_{*\gamma} + \partial_\alpha \rho v_{*\alpha} v_{*\gamma} + \partial_\gamma \frac{\rho c^2}{3} + \partial_\alpha \overline{\rho v_{\oplus\alpha} v_{\oplus\gamma}} = \\ & \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\delta_t c^2}{3} \nabla^2 v_{*\gamma} + \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{2\delta_t c^2}{3} \partial_\gamma (\partial_\alpha v_{*\alpha}) + F_{*\gamma} \end{aligned} \quad (42)$$

となり、RANS方程式に相当する基礎式が導かれる。上式の左辺第一項、第二項が移流項に相当する。また、左辺第三項は式(8)より、圧力 p の勾配を表す。左辺第四項は Reynolds 応力の項を示す。右辺第一項は粘性応力項を示す。動粘性係数 ν は、

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \delta_t c^2 \quad (43)$$

と表されるが、これは通常の LBM と同様である。右辺第二項は、非圧縮性流体の連続式により、0 となる。右辺第三項は外力項である。

3.6 Reynolds 応力を考慮した局所平衡分布関数

前節では式(30)で示される LBE から RANS 方程式が導かれることが示された。式(30)によれば、通常の LBM と比べると局所平衡分布関数に、変動成分の平均の項が加わっていることがわかる。変動成分は、式(III.2)で表されるので、その平均は、次式で表される。

$$\overline{f_{i\oplus}^{(eq0)}} = \frac{3\rho w_i}{2c^2} (3e_{i\alpha} e_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \overline{u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}} \quad (44)$$

一様な重力場では、 $\mathbf{F}_\oplus = 0$ となるので、式(28)より、 $\overline{u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}} = \overline{v_{\oplus\alpha} v_{\oplus\beta}}$ となる。このことにより、Reynolds 応力を考慮した LBM、すなわち RA-LBM における局所平衡分布関数は、以下のように示される。

$$\begin{aligned} f_i^{(eq)} &= \rho w_i \left[1 + \frac{3c_{i\alpha} u_{*\alpha}}{c^2} + \frac{9c_{i\alpha} c_{i\beta} u_{*\alpha} u_{*\beta}}{2c^4} - \right. \\ & \left. \frac{3u_{*\alpha} u_{*\beta} \delta_{\alpha\beta}}{2c^2} + \frac{3}{2c^2} (3e_{i\alpha} e_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \overline{v_{\oplus\alpha} v_{\oplus\beta}} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

また、 $\mathbf{u}_*$ は式(14)で、定義され、流速 $\mathbf{v}_*$ は式(13)で定義される。また、 $\overline{v_{\oplus\alpha} v_{\oplus\beta}}$ は Reynolds 応力であり、乱流モデルを用いて別に求める。圧力は、式(8)で求められる。

4. 検証計算

4.1 0 方程式モデルを用いた乱流解析

本論文で導かれた RA-LBM を用いて、乱流解析を行う場合、乱流モデルを用いることが必要であることは、先に述べたとおりである。本節では、乱流モデルの中でも最も簡素な形をした 0 方程式モデルを用いた乱流解析法を示す。

0 方程式モデルでは、Reynolds 応力は、以下の式でモデル化される⁸⁾。

$$-\overline{v_{\oplus\alpha} v_{\oplus\beta}} = \nu_t \left(\partial_\beta v_{*\alpha} + \partial_\alpha v_{*\beta} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} \quad (46)$$

ただし、 ν_t は渦動粘性係数で、乱流の代表的な長さスケールと時間スケールから決定される。

4.2 二次元せん断層流れ

本節では、本論文で提案した RA-LBM の妥当性を確認するために、二次元せん断層の計算を行い、理論解及び Watt(1967)による実験値⁹⁾と比較した。計算領域は図-1に示されるように、x 方向(流下方向)に 4.0、y 方向(流れに対して横断方向)に 1.0 の長方形の領域である。計算では、x 方向に 81、y 方向に 21 の格子点を等間隔に配置した。従って格子幅 dx は 0.05 である。領域の左側の上半分から流速 U_0 、下半分からは U_1 の流速で流体が平行に進入する。本計算では、Watt の実験条件と同じく $U_1 = 0.51U_0$ とした。

領域の上下は Free-Slip 条件とした。領域の左側の境界条件は、圧力勾配が 0、速度は一定とし、右側の境界条件は圧力一定で、速度勾配は 0 となるようにした。このような条件下では、 u の y 軸方向の速度分布は、相似な形となることが知られている。その速度分布の形は Goertler により理論的に導かれており、次式で与えられる¹⁰⁾。

$$\frac{u - U_1}{U_0 - U_1} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf}(\xi)) \quad (47)$$

ξ は、 $(u - U_1)/(U_0 - U_1) = U' = 0.5$ となる点を基準にとったものである。また、 $y' = \sigma y/x$ である。ここで、 σ は定数であり、本計算では $\sigma = \sqrt{(U_1 + U_0) \cdot x / (c_1 b U_0)} / 2$ となる。 b は混合層の幅、 c_2 は混合距離に関する定数で 0.07 を用いた。図-2は、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ において、 y', U' をプロットしたものである。また、渦動粘性係数を定数として計算したものが uL-fixed で表されている。すなわち、 $\nu_t = dx \cdot U_0$ とした。また、代表長さを混合層の幅、代表速度を U_0 とした渦動粘性係数を用いたものが u-fixed で表されている。この場合は、 $\nu_t = U_0 b c_2$ と評価した。

図-2 のとおり、流速分布の相似性が良好に再現されており、更に速度分布の形状も理論解、実験値と比べてもほぼ一致している。境界付近での流速の減少は、混合層の幅が計算領域全体に広がったことにより生じたものと考えられる。以上により RA-LBM の妥当性が認められた。

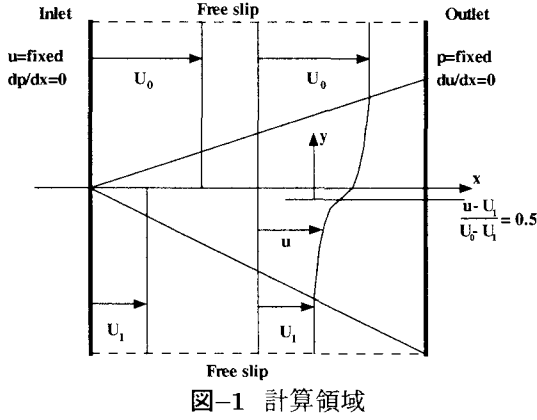


図-1 計算領域

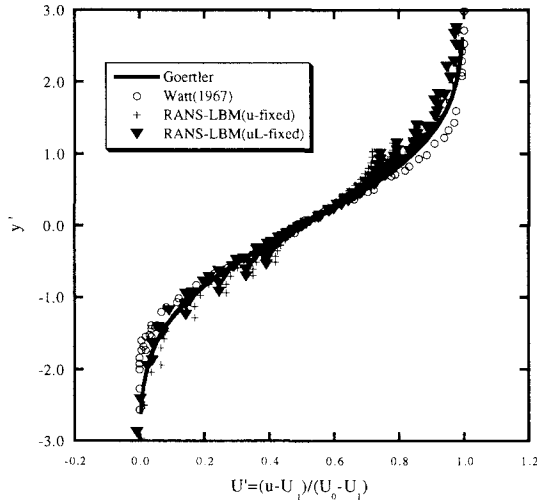


図-2 速度分布の相似性

5. おわりに

本論文では、LBM の乱流への適用を簡潔に実現する方法の一つとして、LBM に Reynolds 平均操作を施して得られる RA-LBM を提案した。また、RA-LBM を用いた乱流解析の最も簡潔な例として、0 方程式モデルを用いた解法について若干の考察を加えた。そして、モデルの検証として二次元せん断層の計算を行い、その妥当性を確かめた。本論文では 0 方程式を用いて Reynolds 応力を評価したが、更に高度な $k-\varepsilon$ モデルを用いることも考えられる。その際には、 k, ε に関する方程式を差分法で解き、流速と圧力を RA-LBM で評価する方法が考えられる。 k, ε に関する方程式を解くことは圧力計算に比べて計算負荷が軽いので、この計算により著しく計算負荷が増大することはないと考え

られる。

付録 I 非平衡量に関する関係式

以下では、これまで自明でないにも関わらず省略されることの多い速度分布関数 f_i と粒子の速度ベクトル c_i の積和について詳細に検討する。

本論文で扱う非熱流体モデルでは、衝突演算において、質量保存と運動量保存が満たされなければならない。衝突直後の速度分布関数を、 $f_i^{(t)}$ で表し、式 (12) の両辺の質量、運動量の保存について検討する。式 (12) の両辺を i について足しあわせると、以下の式が得られる。

$$\sum_i f_i^{(t)} = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \sum_i f_i + \frac{1}{\tau} \sum_i f_i^{(eq)} \quad (\text{I.1})$$

$$\sum_i f_i^{(t)} c_{i\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \sum_i f_i c_{i\alpha} + \frac{1}{\tau} \sum_i f_i^{(eq)} c_{i\alpha} + \frac{3m}{c^2} \sum_i F_\beta w_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \quad (\text{I.2})$$

ここで、 $\sum_i F_\alpha w_i c_{i\alpha} = 0$ を用いた。質量保存、運動量保存が満たされているとすると、 $\sum_i f_i^{(t)} = \sum_i f_i$, $\sum_i f_i^{(t)} c_{i\alpha} = \sum_i f_i c_{i\alpha} + F_\alpha \delta_t$ であるので、 $\sum_i f_i = \sum_i f_i^{(eq)}$, $\sum_i f_i c_{i\alpha} = \sum_i f_i^{(eq)} c_{i\alpha} - F_\alpha \delta_t / 2$ となる。従って、 ε の l 次の非平衡量に関して、

$$\sum_i f_i^{(l)} = \sum_i f_i^{(eq l)} \quad (\text{I.3})$$

$$\sum_i f_i^{(l)} c_{i\alpha} = \sum_i f_i^{(eq l)} c_{i\alpha} - F_\alpha^{(l)} \frac{\delta_t}{2} \quad (\text{I.4})$$

が成り立つ。ただし、式 (20) より、 $F^{(l)}$ は $l = 1$ 以外は 0 である。

付録 II 局所平衡分布関数の Chapman-Enskog 展開

局所平衡分布関数を Chapman-Enskog 展開し、そのあと、Reynolds 平均操作を行い、RANS 方程式を導く。局所平衡分布関数は、以下のように表される。重力を考慮したモデルでは、流速 $\mathbf{v}$ は式 (13) で表されるので以下の式のようなる。

$$f_i^{(eq)}(\rho, \mathbf{u} + \frac{\varepsilon \delta_t}{2\rho} \mathbf{F}) = \rho w_i \left[1 + \frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{3\varepsilon \delta_t (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F})}{2\rho c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} + 2 \frac{\varepsilon \delta_t}{2\rho} \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F})}{2c^4} + \frac{\varepsilon^2 \delta_t^2}{4\rho^2} \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F})^2}{2c^4} - \frac{3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2c^2} - \frac{3}{2c^2} \frac{\varepsilon \delta_t}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) - \frac{3}{2c^2} \frac{\varepsilon^2 \delta_t^2}{4\rho^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) \right] \quad (\text{II.1})$$

式 (II.1) を, ε の次数に応じて整理する. すると, 次式が得られる.

$$(\varepsilon^0) f_i^{(eq0)} = \rho w_i \left[1 + \frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2c^2} \right] \quad (\text{II.2})$$

$$(\varepsilon^1) f_i^{(eq1)} = \rho w_i \delta_t \left[\frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F})}{2\rho c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F})}{2\rho c^4} - \frac{3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{F})}{2\rho c^2} \right] \quad (\text{II.3})$$

$$(\varepsilon^2) f_i^{(eq2)} = \rho w_i \delta_t^2 \left[\frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F})^2}{8\rho^2 c^4} - \frac{3(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})}{8c^2 \rho^2} \right] \quad (\text{II.4})$$

付録 III 局所平衡分布関数の平均成分と変動成分

式 (II.2)-(II.4) で求めた局所平衡分布関数の非平衡成分を平均成分と変動成分に分ける. すなわち, 式 (23), 式 (24) を代入する. 整理すると以下ようになる.

$$f_{i*}^{(eq0)} = \rho w_i \left[1 + \frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_*)}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_*)^2}{2c^4} - \frac{3(\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{u}_*)}{2c^2} \right] \quad (\text{III.1})$$

$$f_{i\oplus}^{(eq0)} = \rho w_i \left[\frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_\oplus)}{c^2} + \frac{9}{2c^4} \left(2(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_*)(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_\oplus) + (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_\oplus)^2 \right) - \frac{3}{2c^2} \left(2(\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{u}_\oplus) + (\mathbf{u}_\oplus \cdot \mathbf{u}_\oplus) \right) \right] \quad (\text{III.2})$$

$$f_{i*}^{(eq1)} = \rho w_i \delta_t \left[\frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_*)}{2\rho c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_*)(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_*)}{2\rho c^4} - \frac{3(\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{F}_*)}{2\rho c^2} \right] \quad (\text{III.3})$$

$$f_{i\oplus}^{(eq1)} = \rho w_i \delta_t \left[\frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_\oplus)}{2\rho c^2} + \frac{9}{2\rho c^4} \left((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_*)(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_\oplus) + (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_\oplus)(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_*) + (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_\oplus)(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_\oplus) \right) - \frac{3}{2\rho c^2} \left((\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{F}_\oplus) + (\mathbf{u}_\oplus \cdot \mathbf{F}_*) + (\mathbf{u}_\oplus \cdot \mathbf{F}_\oplus) \right) \right] \quad (\text{III.4})$$

$$f_{i*}^{(eq2)} = \rho w_i \delta_t^2 \left[\frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_*)^2}{8\rho^2 c^4} - \frac{3(\mathbf{F}_* \cdot \mathbf{F}_*)}{8\rho^2 c^2} \right] \quad (\text{III.5})$$

$$f_{i\oplus}^{(eq2)} = \rho w_i \delta_t^2 \left[\frac{9}{8\rho^2 c^4} \left(2(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_*)(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_\oplus) + (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_\oplus)^2 \right) - \frac{3}{8\rho^2 c^2} \left(2(\mathbf{F}_* \cdot \mathbf{F}_\oplus) + (\mathbf{F}_\oplus \cdot \mathbf{F}_\oplus) \right) \right] \quad (\text{III.6})$$

各非平衡成分の平均成分と変動成分に関して, 速度ベクトル $\mathbf{c}_i$ の 0 次, 1 次, 2 次のモーメントをそれぞれ

求める. 0 次のモーメントは,

$$\sum_i f_{i*}^{(eq0)} = \rho \left[\mathcal{W}^{(0)} + \frac{3}{c^2} \mathcal{W}^{(1)} u_{*\alpha} + \frac{9}{2c^4} \mathcal{W}^{(2)} u_{*\alpha} u_{*\beta} - \frac{3}{2c^2} \mathcal{W}^{(0)} u_{*\alpha} u_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] = \rho \quad (\text{III.7})$$

$$\sum_i f_{i\oplus}^{(eq0)} = \rho \left[\frac{3}{c^2} \mathcal{W}^{(1)} u_{\oplus\alpha} + \frac{9}{2c^4} \mathcal{W}^{(2)} (2u_{*\alpha} u_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}) - \frac{3}{2c^2} \mathcal{W}^{(0)} (2u_{*\alpha} u_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$\sum_i f_{i*}^{(eq1)} = \rho \delta_t \left[\frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(1)} F_{*\alpha} + \frac{9}{2\rho c^4} \mathcal{W}^{(2)} u_{*\alpha} F_{*\beta} - \frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(0)} u_{*\alpha} F_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$\sum_i f_{i\oplus}^{(eq1)} = \rho \delta_t \left[\frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(1)} F_{\oplus\alpha} + \frac{9}{2\rho c^4} \mathcal{W}^{(2)} (u_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{*\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) - \frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(0)} (u_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{*\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (\text{III.10})$$

$$\sum_i f_{i*}^{(eq2)} = \rho \delta_t^2 \left[\frac{9}{8\rho^2 c^4} \mathcal{W}^{(2)} F_{*\alpha} F_{*\beta} - \frac{3}{8\rho^2 c^2} \mathcal{W}^{(0)} F_{*\alpha} F_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$\sum_i f_{i\oplus}^{(eq2)} = \rho \delta_t^2 \left[\frac{9}{8\rho^2 c^4} \mathcal{W}^{(2)} (2F_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + F_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) - \frac{3}{8\rho^2 c^2} \mathcal{W}^{(0)} (2F_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + F_{\oplus\alpha} F_{*\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (\text{III.12})$$

となる. 次に, 1 次のモーメントを求める.

$$\sum_i f_{i*}^{(eq0)} c_{i\gamma} = \rho \left[\mathcal{W}^{(1)} + \frac{3}{c^2} \mathcal{W}^{(2)} u_{*\alpha} + \frac{9}{2c^4} \mathcal{W}^{(3)} u_{*\alpha} u_{*\beta} - \frac{3}{2c^2} \mathcal{W}^{(1)} u_{*\alpha} u_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] = \rho u_{*\gamma} \quad (\text{III.13})$$

$$\sum_i f_{i\oplus}^{(eq0)} c_{i\gamma} = \rho \left[\frac{3}{c^2} \mathcal{W}^{(2)} u_{\oplus\alpha} + \frac{9}{2c^4} \mathcal{W}^{(3)} (2u_{*\alpha} u_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}) - \frac{3}{2c^2} \mathcal{W}^{(1)} (2u_{*\alpha} u_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] = \rho u_{\oplus\gamma} \quad (\text{III.14})$$

$$\sum_i f_{i*}^{(eq1)} c_{i\gamma} = \rho \delta_t \left[\frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(2)} F_{*\alpha} + \frac{9}{2\rho c^4} \mathcal{W}^{(3)} u_{*\alpha} F_{*\beta} - \frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(1)} u_{*\alpha} F_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] = \frac{1}{2} F_{*\gamma} \delta_t \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{aligned} \sum_i f_{i\oplus}^{(eq1)} c_{i\gamma} &= \rho \delta_t \left[\frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(2)} F_{\oplus\alpha} + \frac{9}{2\rho c^4} \mathcal{W}^{(3)} (u_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{*\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(1)} (u_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{*\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} F_{\oplus\gamma} \delta_t \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

$$\sum_i f_{i*}^{(eq2)} c_{i\gamma} = \rho \delta_t^2 \left[\frac{9}{8\rho^2 c^4} \mathcal{W}^{(3)} F_{*\alpha} F_{*\beta} - \frac{3}{8\rho^2 c^2} \mathcal{W}^{(1)} F_{*\alpha} F_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} \sum_i f_{i\oplus}^{(eq2)} c_{i\gamma} &= \rho \delta_t^2 \left[\frac{9}{8\rho^2 c^4} \mathcal{W}^{(3)} (2F_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + F_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{8\rho^2 c^2} \mathcal{W}^{(1)} (2F_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + F_{\oplus\alpha} F_{*\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

次に、同様にして、2次のモーメントを求める。

$$\begin{aligned} \sum_i f_{i*}^{(eq0)} c_{i\gamma} c_{i\delta} &= \rho \left[\mathcal{W}^{(2)} + \frac{3}{c^2} \mathcal{W}^{(3)} u_{*\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2c^4} \mathcal{W}^{(4)} u_{*\alpha} u_{*\beta} - \frac{3}{2c^2} \mathcal{W}^{(2)} u_{*\alpha} u_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{\rho c^2}{3} \delta_{\gamma\delta} + \rho u_{*\gamma} u_{*\delta} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} \sum_i f_{i\oplus}^{(eq0)} c_{i\gamma} c_{i\delta} &= \rho \left[\frac{3}{c^2} \mathcal{W}^{(3)} u_{\oplus\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2c^4} \mathcal{W}^{(4)} (2u_{*\alpha} u_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2c^2} \mathcal{W}^{(2)} (2u_{*\alpha} u_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} u_{\oplus\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] \\ &= \rho (u_{*\gamma} u_{\oplus\delta} + u_{*\delta} u_{\oplus\gamma} + u_{\oplus\delta} u_{\oplus\gamma}) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$$\begin{aligned} \sum_i f_{i*}^{(eq1)} c_{i\gamma} c_{i\delta} &= \rho \delta_t \left[\frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(3)} F_{*\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2\rho c^4} \mathcal{W}^{(4)} u_{*\alpha} F_{*\beta} - \frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(2)} u_{*\alpha} F_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} (u_{*\delta} F_{*\gamma} + u_{*\gamma} F_{*\delta}) \delta_t \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned} \sum_i f_{i\oplus}^{(eq1)} c_{i\gamma} c_{i\delta} &= \rho \delta_t \left[\frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(3)} F_{\oplus\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2\rho c^4} \mathcal{W}^{(4)} (u_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{*\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2\rho c^2} \mathcal{W}^{(2)} (u_{*\alpha} F_{\oplus\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{*\beta} + u_{\oplus\alpha} F_{\oplus\beta}) \delta_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2} (u_{*\delta} F_{\oplus\gamma} + u_{*\gamma} F_{\oplus\delta} + u_{\oplus\delta} F_{*\gamma} + \\ &\quad u_{\oplus\gamma} F_{*\delta} + u_{\oplus\delta} F_{\oplus\gamma} + u_{\oplus\gamma} F_{\oplus\delta}) \delta_t \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

更に、0次の成分についての3次のモーメントは以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} \sum_i f_{i*}^{(eq0)} c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} &= \rho \left[\mathcal{W}^{(3)} + \frac{3}{c^2} \mathcal{W}^{(4)} u_{*\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2c^4} \mathcal{W}^{(5)} u_{*\alpha} u_{*\beta} - \frac{3}{2c^2} \mathcal{W}^{(3)} u_{*\alpha} u_{*\beta} \delta_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{\rho c^2}{3} \Delta_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{*\delta} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

参考文献

- 1) S.Succi. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. CLARENDON PRESS OXFORD, 2001.
- 2) T. Inamuro, T.Ogata, and F.Ogino. Numerical simulation of bubble flows by the lattice Boltzmann method. *Future Generation Computer Systems, In Press, Corrected Proof, Available online 2, February 2004*.
- 3) T. Inamuro, M. Yosino, and F. Ogino. Lattice Boltzmann simulation of flows in a three-dimensional porous structure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 29, pp. 737–748, 1999.
- 4) Z. Lu, Y. Liao, D.Qian, J.B. McLaughlin, J.J. Derksen, and K. Kontomaris. Large Eddy Simulations of a Stirred Tank Using the Lattice Boltzmann Method on a Nonuniform Grid. *Journal of Computational Physics*, Vol. 181, pp. 675–704, 2002.
- 5) Jack G.M. Eggels. Direct and large-eddy simulation of turbulent fluid flow using the lattice-Boltzmann scheme. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 307–323, 1996.
- 6) J.M.Buick and C.A.Greated. Gravity in a lattice Boltzmann model. *Physical Review E*, Vol. 61, No. 5, pp. 5307–5320, 2000.
- 7) P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Physical Review*, Vol. 94, No. 3, pp. 511–525, 1954.
- 8) 数値流体力学編集委員会 (編). 数値流体力学シリーズ 3 乱流解析, 第2章. 東京大学出版会, 1998.
- 9) W.E. Watt. The velocity temperature mixing layer. *Rep. 6705, Department of Mechanical Engineering, Univ. of Toronto*, 1967.
- 10) H. Goertler. Berechnung von aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Nährungsansatzes. *Z.A.M.M.*, Vol. 22, pp. 244–254, 1942.

(2004 年 4 月 16 日 受付)