

移動一般座標系での水深積分モデルを用いた水槽内流体振動解析

Analysis of Sloshing Characteristics in a Tank using the Depth Averaged Flow Model in Generalized Curvilinear Moving Coordinate System

音田 慎一郎¹・細田 尚²・三浦 倫秀³

Shinichiro ONDA, Takashi HOSODA and Michihide MIURA

¹学生会員 修(工) 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻博士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)²正会員 工博 京都大学教授, 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)³学生会員 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤学専攻修士課程 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

In this study, the sloshing characteristics in a tank on an oscillation table are investigated. The depth averaged flow model in generalized curvilinear moving coordinate system using the finite volume method was applied to calculate flow field, in which the pressure distribution is assumed to be hydrostatics. Furthermore, the depth averaged flow model considering the effects of vertical acceleration was also used and the linear solutions in both the depth averaged flow models were derived. The sloshing characteristics obtained from the numerical results and the linear solutions were verified by comparing with the experimental results.

Key Words : depth averaged flow model, generalized curvilinear moving coordinate system, sloshing effect

1. はじめに

本研究は, 移動一般座標系で記述された水理解析法について考察することを目的としている.

筆者らは前報¹⁾で, 移動一般座標系での浅水流方程式を用い, 単純で基本的な水理現象について検討した. テストケースとして, 一定加速度場に置かれた水槽内の流体挙動, 造波板のように水槽の壁が動くことにより生じる波と流れの流体解析を行い, 解析解, 線形解などと比較することで, 計算結果の適合性を検証した.

移動一般座標系を用いた流体解析は, その他にも水工学の分野でよく用いられている. 本研究で用いている水深積分モデルについて言及すると, 例えば, 移動一般座標系での水深積分モデル²⁾を用い, 河岸侵食を伴う河川の流路変動解析³⁾などが行われている.

上記の研究では, 圧力分布に静水圧を仮定した浅水流方程式が用いられている. しかし, 波・流れ共存場の水面変動を解析する場合, 水深に対して波の波長が短くなると静水圧の仮定は成立しなくなる. 従って, 鉛直加速度を考慮した水深積分モデル (Boussinesq 方程式) を用いる必要がある. 一般に鉛直加速度を考慮した水深積分モデルによる流体解析では, デカルト座標系で表記されたものが多く, 移動一般座標系で解析された研究は少ない.

そこで本研究では, 移動一般座標系での水深積分モデルを用い, 振動台上に置かれた水槽内流体振動につ

いて検討する. まず, 様々な条件下で水理実験を行い, 水面挙動の特性について考察する. 次に, 浅水流方程式を基礎式として数値解析を行うとともに, 現象の理解或いは計算結果の妥当性を検証するため, 浅水流方程式, Boussinesq 方程式による線形解を導出する. 実験結果と数値解析結果, 線形解を比較することで, 実験結果との適合性を検証する.

2. 振動台上の水槽内流体振動の水理実験

2.1 実験の概要

長さ $L=1.0\text{m}$, 幅 0.1m , 高さ 0.15m のアクリル製水槽を振動台 ((株)振研「低周波水平振動試験装置」) の上に置き, 初期水深 $h_0(\text{m})$, 振動振幅 $d(\text{m})$, 周波数 $f(\text{Hz})$ (周期 $T=1/f$) を変化させて実験を行った. 実験装置の概要, 実験条件の一部を図-1, 表-1 に示す. 振動台上には, デジタルビデオカメラ (Canon IXYDVM) を設置し, 水槽内全体の流況を撮影した. また, 超音波変位センサー (キーエンス製) を用いて, 2軸 (振動台と共に移動する座標系) 上の固定点における水位の時間変化を $0.1(\text{s})$ ごとに記録した. 設置したセンサーの位置は, 初期水深 $h_0=0.05\text{m}$ のとき, $\xi=0.825$ であり, 0.1m のとき $\xi=0.79$ である.

2.2 実験結果

実験結果の例として, ビデオカメラより撮影された

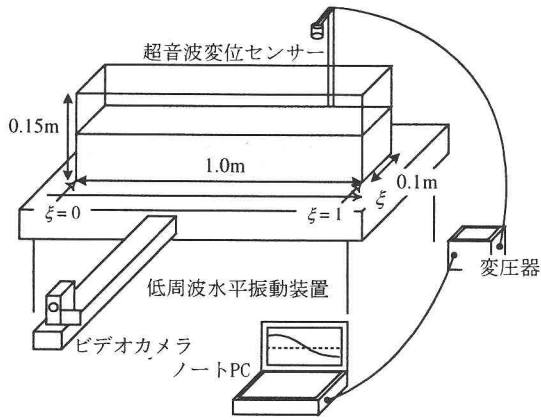


図-1 実験装置の概要

表-1 実験条件

Case	h_0 (m)	f (Hz)	T (s)	d (m)
1	0.05	0.5	2.0	0.01
2	0.05	0.5	2.0	0.03
3	0.05	1.5	0.67	0.004
4	0.10	1.0	1.0	0.01

水面形の時間変化を示したものが図-2, 3, 4である。図の時刻は、水面変動が定常状態となり、振動台がほぼ振動中心を通過した時間を $t=0(s)$ として表したものである。図をみると、振動装置の振動振幅が大きいケースほど鉛直方向の水面変動が大きく、周波数が高いケースほど水面の波数が多くなることがわかる。

3. 浅水方程式での基礎式系

実験結果を再現するため、本研究では、解析の基礎式に移動一般座標系での水深積分モデルを用いる。本章では、圧力分布に静水圧を仮定した場合について検討する。

3.1 基礎式

1次元移動一般座標系での連続式、運動量方程式を記述すれば以下ようになる。

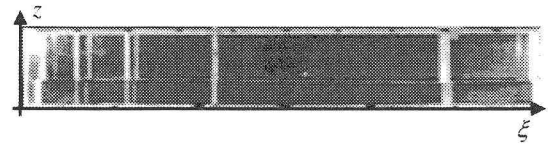
[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_r + U) \frac{h}{J} \right) = 0 \quad (1)$$

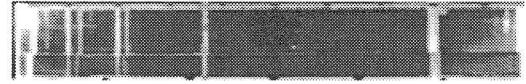
[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_r + U) \frac{M}{J} \right) + gh \frac{\xi_x}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (2)$$

ここで、 t : 時間、 ξ : 一般座標、 ξ_r , ξ_x : 変換のメトリックス、 h : 水深、 U : 流速ベクトルの反変成分 ($= u \xi_x$)、 u : x 方向の水深平均流速、 M : x 方向の流量フラックス



(a) $t/T = 0.2$



(b) $t/T = 0.8$

図-2 実験結果 (Case. 1)



(a) $t/T = 0.2$



(b) $t/T = 0.8$

図-3 実験結果 (Case. 2)



(a) $t/T = 0.4$



(b) $t/T = 0.8$

図-4 実験結果 (Case. 3)

ス ($= uh$)、 g : 重力加速度、 J : 座標変換のヤコビアン (1次元解析の場合は ξ_x となる)。

式(1), (2)を一定周期で振動する振動台上に置かれた水槽の運動に対応するように基礎式を書き換えると、座標変換のメトリックスは下記ようになる。

$$x_0 = d \sin(\omega_0 t), \quad x_e = L + d \sin(\omega_0 t)$$

$$\xi = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)}{L} \quad (3)$$

ここに、 x_0 , x_e : 水槽の左端、右端の座標、 L : 水槽の長さ、 d : 水槽の振動振幅、 ω_0 : 角振動数である。

上記の関係を式(1), (2)に代入すると、式(4), (5)が得られる。

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t} (Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi} [(u - d\omega_0 \cos(\omega_0 t))h] = 0 \quad (4)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t} (Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi} [(u - d\omega_0 \cos(\omega_0 t))hu] + gh \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (5)$$

3. 2 数値解析法

数値解析法として、変数をスタッガードで配置した有限体積法を用いる。移流項の離散化には TVD-MUSCL⁵⁾を適用する。但し、段波のような現象を計算しても不連続部で数値振動が生じないように、数値粘性項を付加している。計算法の詳細は参考文献^{4),5)}に記載されているので省略する。計算格子は 100 メッシュである。

3. 3 線形解

(1) 線形方程式の誘導

水槽の振動振幅 d が水槽の長さに対して十分小さく、角振動数 ω_0 も小さい場合について線形解を求める。

次式のように水理量を平均値とそれからの微小な偏差の和として表し、基礎式を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad u = u_0 + u' \quad (u_0 = 0) \quad (6)$$

上式を基礎式系に代入し、整理すると以下のようになる。

[連続式]

$$L \frac{\partial h'}{\partial t} + \{u_0 - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\} \frac{\partial h'}{\partial \xi} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial \xi} = 0 \quad (7)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{L} \{u_0 - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\} \frac{\partial u'}{\partial \xi} + g \frac{1}{L} \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (8)$$

式(7), (8)から u' を消去すると、 h' に関する線形方程式が得られる。

$$L \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - \frac{gh_0}{L} \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} + d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial \xi} - 2d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial \xi} + \frac{d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{L} \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} = 0 \quad (9)$$

(2) 境界条件

壁面での境界条件は以下のように与えられる。

[$\xi=0$ (左壁), $\xi=1$ (右壁)]において

$$u' = \frac{dx_0}{dt} = \frac{dx_e}{dt} = d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (10)$$

この流速に関する境界条件を用いて、水面変動の境界条件が導かれる。式(10)を運動量方程式(8)に代入し、連続式(7)を用いて変形すると、以下の式が得られる。

$$d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \left\{ -dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + g \frac{\partial h'}{\partial \xi} \right\} - \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (11)$$

(3) 線形解の誘導

h' は、一般的に、三角関数を用いて表されるが、ここでは、線形解の誘導の簡便さからべき乗展開を用いて式(12)のように表す。

$$h' = D_0(t) + D_1(t)\xi + D_2(t)\xi^2 + D_3(t)\xi^3 + D_4(t)\xi^4 \quad (12)$$

式(12)を式(11)に代入すると、境界条件として式(13)が得られる。

$$d\omega_0 L \cos(\omega_0 t) \left(\frac{dD_0}{dt} + \frac{dD_1}{dt} \xi + \frac{dD_2}{dt} \xi^2 + \frac{dD_3}{dt} \xi^3 + \frac{dD_4}{dt} \xi^4 \right) - dh_0 \omega_0^2 L \sin(\omega_0 t) + gh_0 (D_1 + 2D_2 \xi + 3D_3 \xi^2 + 4D_4 \xi^3) - d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (D_1 + 2D_2 \xi + 3D_3 \xi^2 + 4D_4 \xi^3) = 0 \quad (13)$$

従って、左壁 ($\xi=0$) , 右壁 ($\xi=1$) での境界条件は以下のように表される。

[$\xi=0$ (左壁)]

$$d\omega_0 L \cos(\omega_0 t) \frac{dD_0}{dt} - dh_0 \omega_0^2 L \sin(\omega_0 t) + gh_0 D_1 - \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 D_1 = 0 \quad (14)$$

[$\xi=1$ (右壁)]

$$d\omega_0 L \cos(\omega_0 t) \left(\frac{dD_0}{dt} + \frac{dD_1}{dt} + \frac{dD_2}{dt} + \frac{dD_3}{dt} + \frac{dD_4}{dt} \right) - dh_0 \omega_0^2 L \sin(\omega_0 t) + gh_0 (D_1 + 2D_2 + 3D_3 + 4D_4) - \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 (D_1 + 2D_2 + 3D_3 + 4D_4) = 0 \quad (15)$$

また、式(12)を線形方程式(9)に代入すると、式(16)が導かれる。

$$L \left(\frac{dD_0}{dt^2} + \frac{dD_1}{dt^2} \xi + \frac{dD_2}{dt^2} \xi^2 + \frac{dD_3}{dt^2} \xi^3 + \frac{dD_4}{dt^2} \xi^4 \right) - \frac{gh_0}{L} (2D_2 + 6D_3 \xi + 12D_4 \xi^2) + d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (D_1 + 2D_2 \xi + 3D_3 \xi^2 + 4D_4 \xi^3) - 2d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left(\frac{dD_1}{dt} + 2\xi \frac{dD_2}{dt} + 3\xi^2 \frac{dD_3}{dt} + 4\xi^3 \frac{dD_4}{dt} \right) + \frac{d^2 \omega_0^2}{L} \cos^2(\omega_0 t) (2D_2 + 6D_3 \xi + 12D_4 \xi^2) = 0 \quad (16)$$

式(16)を ξ の各オーダーで整理し、 ξ^0 , ξ^1 の係数を 0 とすると、式(17), (18)が導かれる。

$$\xi^0: L \frac{d^2 D_0}{dt^2} - 2 \frac{gh_0}{L} D_2 + d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) D_1 - 2d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dD_1}{dt} + 2 \frac{d^2 \omega_0^2}{L} \cos^2(\omega_0 t) D_2 = 0 \quad (17)$$

$$\xi^1: L \frac{d^2 D_1}{dt^2} - 6 \frac{gh_0}{L} D_3 + 2d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) D_2 - 4d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dD_2}{dt} + 6 \frac{d^2 \omega_0^2}{L} \cos^2(\omega_0 t) D_3 = 0 \quad (18)$$

また、体積一定の条件

$$V_0 = h_0 L = \int_0^1 (h_0 + h') dx = \int_0^1 (h_0 + h') L d\xi = h_0 L + L \int_0^1 h' d\xi$$

から、式(19)が得られる。

$$D_0 + \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{3} D_2 + \frac{1}{4} D_3 + \frac{1}{5} D_4 = 0 \quad (19)$$

ここで、 $D_0 \sim D_5$ を以下のように仮定する。

$$D_0 = \gamma_{01} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{01} \cos(\omega_0 t) \quad (20a)$$

$$D_1 = \gamma_{11} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{11} \cos(\omega_0 t) \quad (20b)$$

$$D_2 = \gamma_{21} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{21} \cos(\omega_0 t) \quad (20c)$$

$$D_3 = \gamma_{31} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{31} \cos(\omega_0 t) \quad (20d)$$

$$D_4 = \gamma_{41} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon_{41} \cos(\omega_0 t) \quad (20e)$$

式(20)を式(19)に代入すると、体積一定の条件として式(21)が導かれる。

$$\sin(\omega_0 t) \left(\gamma_{01} + \frac{1}{2} \gamma_{11} + \frac{1}{3} \gamma_{21} + \frac{1}{4} \gamma_{31} + \frac{1}{5} \gamma_{41} \right) + \cos(\omega_0 t) \left(\varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \varepsilon_{11} + \frac{1}{3} \varepsilon_{21} + \frac{1}{4} \varepsilon_{31} + \frac{1}{5} \varepsilon_{41} \right) = 0 \quad (21)$$

さらに、式(20)を境界条件式(14), (15), 線形方程式(17), (18)に代入して、 $\sin(\omega_0 t)$, $\cos(\omega_0 t)$ の係数を0とおくと以下の代数方程式が得られる。

式(14)より

$$\sin(\omega_0 t): -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 \gamma_{11} - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 \gamma_{11} = 0 \quad (22a)$$

$$\cos(\omega_0 t): gh_0 \varepsilon_{11} - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 \varepsilon_{11} = 0 \quad (22b)$$

式(15)より

$$\sin(\omega_0 t): -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 (\gamma_{11} + 2\gamma_{21} + 3\gamma_{31} + 4\gamma_{41}) - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 (\gamma_{11} + 2\gamma_{21} + 3\gamma_{31} + 4\gamma_{41}) = 0 \quad (23a)$$

$$\cos(\omega_0 t): gh_0 (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{21} + 3\varepsilon_{31} + 4\varepsilon_{41}) - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{21} + 3\varepsilon_{31} + 4\varepsilon_{41}) = 0 \quad (23b)$$

式(17)より

$$\sin(\omega_0 t): -L \omega_0^2 \gamma_{01} - \frac{2gh_0}{L} \gamma_{21} + \frac{d^2 \omega_0^2}{2L} \gamma_{21} = 0 \quad (24a)$$

$$\cos(\omega_0 t): -L \omega_0^2 \varepsilon_{01} - \frac{2gh_0}{L} \varepsilon_{21} + \frac{3d^2 \omega_0^2}{2L} \varepsilon_{21} = 0 \quad (24b)$$

式(18)より

$$\sin(\omega_0 t): -L \omega_0^2 \gamma_{11} - \frac{6gh_0}{L} \gamma_{31} + \frac{3d^2 \omega_0^2}{2L} \gamma_{31} = 0 \quad (25a)$$

$$\cos(\omega_0 t): -L \omega_0^2 \varepsilon_{11} - \frac{6gh_0}{L} \varepsilon_{31} + \frac{9d^2 \omega_0^2}{2L} \varepsilon_{31} = 0 \quad (25b)$$

また、式(21)の $\sin(\omega_0 t)$, $\cos(\omega_0 t)$ の係数を0とすると、式(26)が得られる。

$$\sin(\omega_0 t): \gamma_{01} + \frac{1}{2} \gamma_{11} + \frac{1}{3} \gamma_{21} + \frac{1}{4} \gamma_{31} + \frac{1}{5} \gamma_{41} = 0 \quad (26a)$$

$$\cos(\omega_0 t): \varepsilon_{01} + \frac{1}{2} \varepsilon_{11} + \frac{1}{3} \varepsilon_{21} + \frac{1}{4} \varepsilon_{31} + \frac{1}{5} \varepsilon_{41} = 0 \quad (26b)$$

式(22a)から γ_{11} は以下のように表される。

$$\gamma_{11} = \frac{dh_0 L \omega_0^2}{gh_0 - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2} = \frac{dh_0}{L} Z \quad (27)$$

ここに、 X , Y , Z は以下のように定義される。

$$X = \frac{L^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad Y = \frac{d^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad Z = X / \left(1 - \frac{1}{4} Y \right)$$

同様に、式(24a), (25a)からそれぞれ式(28), (29)が導かれる。

$$\gamma_{21} = -\frac{1}{2} Z \gamma_{01} \quad (28)$$

$$\gamma_{31} = -\frac{1}{6} \frac{dh_0}{L} Z^2 \quad (29)$$

さらに、式(22a)を用いて式(23a)を変形すると、以下のようになる。

$$2\gamma_{21} + 3\gamma_{31} + 4\gamma_{41} = 0 \quad (30)$$

ここで、式(26a), 式(30)に式(27)～式(29)を代入して整理すると、 γ_{01} , γ_{41} に関する連立方程式が得られる。

$$\left(1 - \frac{1}{6} Z \right) \gamma_{01} + \frac{1}{5} \gamma_{41} = \frac{dh_0}{L} Z \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} Z \right) \quad (31)$$

$$-Z \gamma_{01} + 4\gamma_{41} = \frac{1}{2} \frac{dh_0}{L} Z^2 \quad (32)$$

従って、 γ_{01} , γ_{41} は以下のように求められる。

$$\gamma_{01} = \frac{dh_0}{L} \frac{-Z^2 + 30Z}{7Z - 60} \quad (33)$$

$$\gamma_{41} = \frac{dh_0}{L} \frac{5Z^3}{8(7Z - 60)} \quad (34)$$

ε については以下の式が成り立つ。

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{41} = 0 \quad (35)$$

式(27)～(29), (33)～(35)を式(20)と(12)に代入すると、水面変動に関する線形解を計算することができる。

4. 鉛直加速度を考慮した場合の基礎式系

前章では、圧力分布を静水圧と仮定した浅水流方程式を用いたが、水深に対して波の波長が短くなる（無次元波数が高くなる）と静水圧の仮定は成立しなくなる。そこで本章では、鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（Boussinesq 方程式）を基礎式として定式化を示す。Boussinesq 方程式には、分散特性の向上を目的として様々な改良モデルが提案されているが^{例え6)}、本研究では、最も簡単な原形 Boussinesq 方程式を考える。

4. 1 移動一般座標系での基礎式

鉛直加速度を考慮した場合の1次元の基礎式は以下のようになる⁷⁾。なお、連続式は式(1)と同じであるため、運動量方程式のみを記述する。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial uM}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (36)$$

$$P = \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3} h \left\{ u^2 h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2uh \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + uh \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \quad (37)$$

ここで、式(37)右辺第1項のみを考えると、式(37)は静水圧を仮定した浅水流方程式と一致する。

デカルト座標系での運動量方程式(36), (37)を移動一般座標系に変換すると、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{M}{J} \right) + \frac{\xi_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{gh^2}{2} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{1}{3} h^2 \xi_x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} M \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_t \xi_x}{J} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right\} \right. \\
& \quad + \frac{1}{3} h^2 u^2 \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} h^2 u \frac{\xi_x^2}{J} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_t \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \right\} \right] \\
& + \frac{1}{3} h^2 \frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi_t \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{3} h^2 u \frac{\xi_x^3}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (38)
\end{aligned}$$

上式にメトリックスの関係式(3)を代入すると、式(39)が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\{u - d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\} hu \right] + gh \frac{\partial h}{\partial \xi} \\
& + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\frac{1}{3} h^2 \frac{1}{L} \left\{ u \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial \xi} + h \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left\{ u \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + h \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{3} h^2 u^2 \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{2}{3} h^2 u \frac{1}{L} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial \xi} - \frac{1}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{3} h^2 \frac{1}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{3} h^2 u \frac{1}{L^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\} \right] = 0 \quad (39)
\end{aligned}$$

4. 2 線形解

(1) 線形方程式の誘導

鉛直加速度を考慮した場合についても同様に線形解を求める。運動量方程式(39)に式(6)を代入し、 $u_0 = 0$ とすると、式(40)が得られる。

$$\begin{aligned}
& L \frac{\partial u'}{\partial t} - d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial u'}{\partial \xi} + g \frac{\partial h'}{\partial \xi} \\
& - \frac{1}{3} \frac{h_0}{L} \left\{ h_0 \frac{\partial^3 u'}{\partial \xi^2 \partial t} - \frac{1}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) h_0 \frac{\partial^3 u'}{\partial \xi^3} \right\} = 0 \quad (40)
\end{aligned}$$

前章と同様に式(7)を用いて u' を消去すると、 h' に関する線形方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
& L^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + \left[\{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 - gh_0 \right] \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} \\
& - 2Ld\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial \xi} + Ld\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial \xi} \\
& - \frac{1}{3} h_0^2 \frac{\partial^4 h'}{\partial \xi^2 \partial t^2} + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial^4 h'}{\partial \xi^3 \partial t} \\
& - \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \frac{\partial^3 h'}{\partial \xi^3}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 \frac{\partial^4 h'}{\partial \xi^4} = 0 \quad (41)$$

(2) 境界条件

壁面での境界条件を以下のようにして求める。まず、運動量方程式(40)の $\partial u'/\partial t$ には、式(10)を代入する。また、式(40)中の $\partial u'/\partial \xi$ 、 $\partial u'/\partial \xi^2 t$ 、 $\partial u'/\partial \xi^3$ については、連続式(7)と式(10)を用いて消去すると、 h' に関する境界条件式(42)が得られる。

$$\begin{aligned}
& -dLh_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial t} \\
& + \left[gh_0 - \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 \right] \frac{\partial h'}{\partial \xi} + \frac{1}{3} h_0^2 \frac{\partial^3 h'}{\partial \xi \partial t^2} \\
& - \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial^3 h'}{\partial \xi^2 \partial t} \\
& + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} \\
& + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} \{d\omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2 \frac{\partial^3 h'}{\partial \xi^3} = 0 \quad (42)
\end{aligned}$$

(3) 線形解の導出

h' をべき乗展開を用いて式(43)のように表す。

$$h' = E_0(t) + E_1(t)\xi + E_2(t)\xi^2 + E_3(t)\xi^3 + E_4(t)\xi^4 \quad (43)$$

式(43)を式(42)に代入すると、境界条件として式(44)が得られる。

$$\begin{aligned}
& -dLh_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\
& \times \left(\frac{dE_0}{dt} + \frac{dE_1}{dt} \xi + \frac{dE_2}{dt} \xi^2 + \frac{dE_3}{dt} \xi^3 + \frac{dE_4}{dt} \xi^4 \right) \\
& + gh_0 (E_1 + 2E_2 \xi + 3E_3 \xi^2 + 4E_4 \xi^3) \\
& - d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (E_1 + 2E_2 \xi + 3E_3 \xi^2 + 4E_4 \xi^3) \\
& + \frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d^2 E_1}{dt^2} \xi + 2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} \xi^2 + 3 \frac{d^2 E_3}{dt^2} \xi^3 + 4 \frac{d^2 E_4}{dt^2} \xi^4 \right) \\
& + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (2E_2 + 6E_3 \xi + 12E_4 \xi^2) \\
& - \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left(2 \frac{dE_2}{dt} + 6 \frac{dE_3}{dt} \xi + 12 \frac{dE_4}{dt} \xi^2 \right) \\
& + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (6E_3 + 24E_4 \xi) = 0 \quad (44)
\end{aligned}$$

よって、 $\xi=0$ (左壁)、 $\xi=1$ (右壁) の境界条件は、以下のように求められる。

[$\xi=0$ (左壁)]

$$\begin{aligned}
& -dLh_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_0}{dt} \\
& + gh_0 E_1 - d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_1 \\
& + \frac{1}{3} h_0^2 \frac{d^2 E_1}{dt^2} - \frac{4}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_2}{dt} \\
& + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_2
\end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_3 = 0 \quad (45)$$

[$\xi=1$ (右壁)]

$$\begin{aligned} & -dLh_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \\ & + dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left(\frac{dE_0}{dt} + \frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} + \frac{dE_3}{dt} + \frac{dE_4}{dt} \right) \\ & + gh_0(E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 4E_4) \\ & - d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 4E_4) \\ & + \frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d^2 E_1}{dt^2} + 2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} + 3 \frac{d^2 E_3}{dt^2} + 4 \frac{d^2 E_4}{dt^2} \right) \\ & - \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left(2 \frac{dE_2}{dt} + 6 \frac{dE_3}{dt} + 12 \frac{dE_4}{dt} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (6E_3 + 24E_4) = 0 \quad (46) \end{aligned}$$

また、式(41)に式(43)を代入すると、式(47)を得る。

$$\begin{aligned} & L^2 \left(\frac{dE_0}{dt^2} + \frac{dE_1}{dt^2} \xi + \frac{dE_2}{dt^2} \xi^2 + \frac{dE_3}{dt^2} \xi^3 + \frac{dE_4}{dt^2} \xi^4 \right) \\ & + d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) (2E_2 + 6E_3 \xi + 12E_4 \xi^2) \\ & - gh_0 (2E_2 + 6E_3 \xi + 12E_4 \xi^2) - 2dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ & \times \left(\frac{dE_1}{dt} + 2\xi \frac{dE_2}{dt} + 3\xi^2 \frac{dE_3}{dt} + 4\xi^3 \frac{dE_4}{dt} \right) \\ & + dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (E_1 + 2E_2 \xi + 3E_3 \xi^2 + 4E_4 \xi^3) \\ & - \frac{1}{3} h_0^2 \left(2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} + 6 \frac{d^2 E_3}{dt^2} \xi + 12 \frac{d^2 E_4}{dt^2} \xi^2 \right) \\ & + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \left(6 \frac{dE_3}{dt} + 24 \frac{dE_4}{dt} \xi \right) \\ & - \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (6E_3 + 24E_4 \xi) \\ & - 8 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_4 = 0 \quad (47) \end{aligned}$$

式(47)を ξ の各オーダーで整理し、 ξ^0 、 ξ^1 の係数を0とすると、式(48)、(49)が導かれる。

$$\begin{aligned} \xi^0 : \quad & L^2 \frac{d^2 E_0}{dt^2} + 2d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_2 - 2gh_0 E_2 \\ & - 2dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_1}{dt} + dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_1 \\ & - \frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2 E_2}{dt^2} + 4 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_3}{dt} \\ & - 2 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_3 \\ & - 8 \frac{h_0^2}{L} d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_4 = 0 \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^1 : \quad & L^2 \frac{d^2 E_1}{dt^2} + 6d^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) E_3 - 6gh_0 E_3 \\ & - 4dL\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_2}{dt} + 2dL\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_2 \\ & - 2h_0^2 \frac{d^2 E_3}{dt^2} + 16 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{dE_4}{dt} \end{aligned}$$

$$- 8 \frac{h_0^2}{L} d\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) E_4 = 0 \quad (49)$$

さらに、体積一定の条件から以下の式が得られる。

$$E_0 + \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{3} E_2 + \frac{1}{4} E_3 + \frac{1}{5} E_4 = 0 \quad (50)$$

ここで、 $E_0 \sim E_5$ を以下のようにおく。

$$E_0 = \phi_{01} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{01} \cos(\omega_0 t) \quad (51a)$$

$$E_1 = \phi_{11} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{11} \cos(\omega_0 t) \quad (51b)$$

$$E_2 = \phi_{21} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{21} \cos(\omega_0 t) \quad (51c)$$

$$E_3 = \phi_{31} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{31} \cos(\omega_0 t) \quad (51d)$$

$$E_4 = \phi_{41} \sin(\omega_0 t) + \varphi_{41} \cos(\omega_0 t) \quad (51e)$$

前章と同様に、式(51)を式(45)、(46)、(48)、(49)、(50)に代入して、 $\sin(\omega_0 t)$ 、 $\cos(\omega_0 t)$ の係数を0とおくと以下の代数方程式が得られる。

式(45)より

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) : \quad & -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 \phi_{11} - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 \phi_{11} \\ & - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 \phi_{11} + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \phi_{31} = 0 \quad (52a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) : \quad & gh_0 \varphi_{11} - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 \varphi_{11} \\ & - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 \varphi_{11} + \frac{3}{2} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \varphi_{31} = 0 \quad (52b) \end{aligned}$$

式(46)より

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) : \quad & -dh_0 L \omega_0^2 + gh_0 (\phi_{11} + 2\phi_{21} + 3\phi_{31} + 4\phi_{41}) \\ & - \frac{1}{4} d^2 \omega_0^2 (\phi_{11} + 2\phi_{21} + 3\phi_{31} + 4\phi_{41}) \\ & - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 (\phi_{11} + 2\phi_{21} + 3\phi_{31} + 4\phi_{41}) \\ & + \frac{1}{12} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 (6\phi_{31} + 24\phi_{41}) = 0 \quad (53a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) : \quad & gh_0 (\varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 3\varphi_{31} + 4\varphi_{41}) \\ & - \frac{3}{4} d^2 \omega_0^2 (\varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 3\varphi_{31} + 4\varphi_{41}) \\ & - \frac{1}{3} h_0^2 \omega_0^2 (\varphi_{11} + 2\varphi_{21} + 3\varphi_{31} + 4\varphi_{41}) \\ & + \frac{1}{4} \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 (6\varphi_{31} + 24\varphi_{41}) = 0 \quad (53b) \end{aligned}$$

式(48)より

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) : \quad & -L^2 \omega_0^2 \phi_{01} + \frac{1}{2} d^2 \omega_0^2 \phi_{21} - 2gh_0 \phi_{21} \\ & + \frac{2}{3} h_0^2 \omega_0^2 \phi_{21} - 2 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \phi_{41} = 0 \quad (54a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) : \quad & -L^2 \omega_0^2 \varphi_{01} + \frac{3}{2} d^2 \omega_0^2 \varphi_{21} - 2gh_0 \varphi_{21} \\ & + \frac{2}{3} h_0^2 \omega_0^2 \varphi_{21} - 6 \frac{h_0^2}{L^2} d^2 \omega_0^2 \varphi_{41} = 0 \quad (54b) \end{aligned}$$

式(49)より

$$\sin(\omega_0 t) : \quad -L^2 \omega_0^2 \phi_{11} + \frac{3}{2} d^2 \omega_0^2 \phi_{31}$$

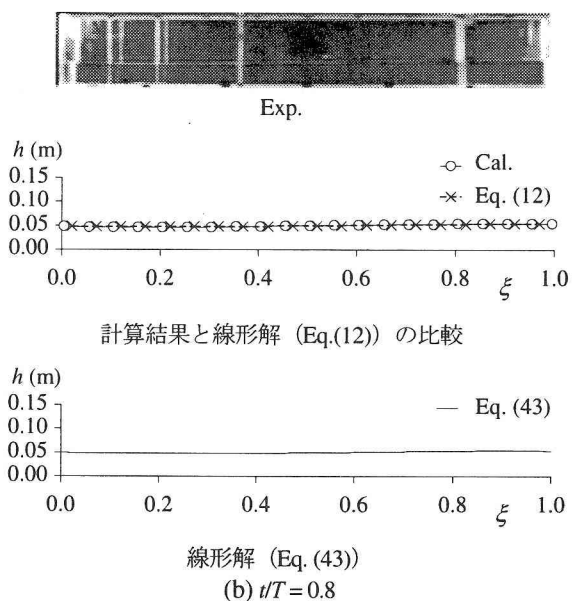
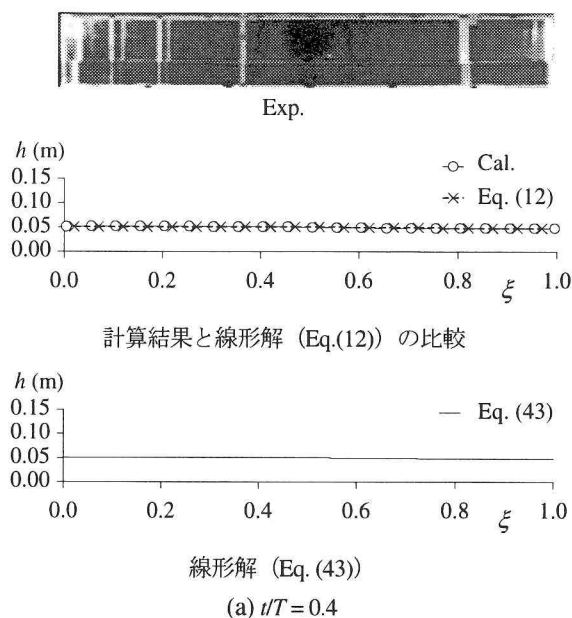


図-5 水面形の時間変化 (Case. 1)

$$-6gh_0\phi_{31} + 2h_0^2\omega_0^2\phi_{31} = 0 \quad (55a)$$

$$\cos(\omega_0 t) : \quad -L^2\omega_0^2\phi_{11} + \frac{9}{2}d^2\omega_0^2\phi_{31} - 6gh_0\phi_{31} + 2h_0^2\omega_0^2\phi_{31} = 0 \quad (55b)$$

式(50)より

$$\sin(\omega_0 t) : \quad \phi_{01} + \frac{1}{2}\phi_{11} + \frac{1}{3}\phi_{21} + \frac{1}{4}\phi_{31} + \frac{1}{5}\phi_{41} = 0 \quad (56a)$$

$$\cos(\omega_0 t) : \quad \phi_{01} + \frac{1}{2}\phi_{11} + \frac{1}{3}\phi_{21} + \frac{1}{4}\phi_{31} + \frac{1}{5}\phi_{41} = 0 \quad (56b)$$

上記の式(52)-(56)より係数 ϕ , ϕ について解くと, 以下のように求められる.

$$\phi_{01} = \frac{1}{4} \frac{dh_0}{L} \frac{X}{ABC} P$$

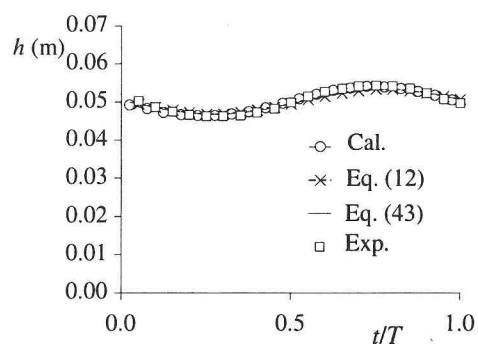


図-6 固定点での水深の時間変化 (Case. 1)

$$\begin{aligned} & \times \left[C \left\{ P \left(\frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left(X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{h_0^2}{L^2} Y \left\{ \left(\frac{7}{30} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left(X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{3} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \right] \quad (57a) \end{aligned}$$

$$\phi_{11} = \frac{dh_0}{L} \frac{X}{A} \left(\frac{3}{2} Y - 6 + 2 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \quad (57b)$$

$$\begin{aligned} \phi_{21} = & -\frac{1}{4} \frac{dh_0}{L} \frac{X^2}{AB} \\ & \times \left\{ P \left(\frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left(X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \quad (57c) \end{aligned}$$

$$\phi_{31} = \frac{dh_0}{L} \frac{X^2}{A} \quad (57d)$$

$$\begin{aligned} \phi_{41} = & -\frac{1}{4} \frac{dh_0}{L} \frac{X^2}{ABC} P \\ & \times \left\{ \left(\frac{7}{30} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left(X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{2}{5} X + 3Y - 12 + 4 \frac{h_0^2}{L^2} X + 6 \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{1}{3} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right) \right\} \quad (57e) \end{aligned}$$

$$\phi_{01} = \phi_{11} = \phi_{21} = \phi_{31} = \phi_{41} = 0 \quad (57f)$$

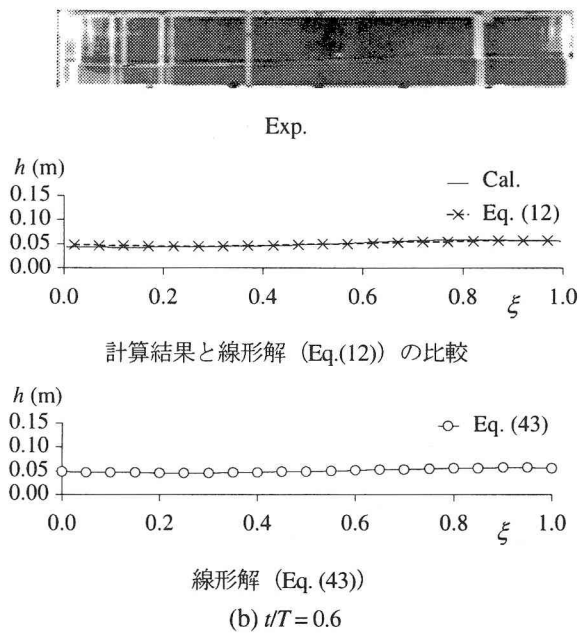
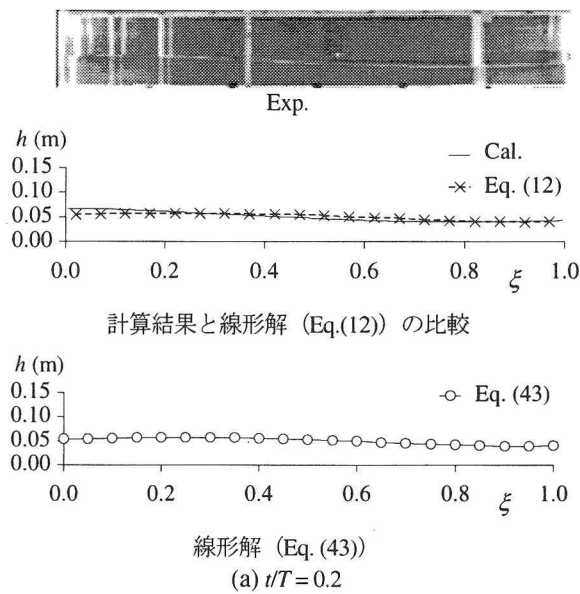


図-7 水面形の時間変化 (Case. 2)

ここに、

$$X = \frac{L^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad Y = \frac{d^2 \omega_0^2}{gh_0}, \quad P = 1 - \frac{1}{4}Y - \frac{1}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X,$$

$$A = P \left(\frac{3}{2}Y - 6 + 2 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} XY,$$

$$B = P \left(\frac{7}{30}X + \frac{1}{2}Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right),$$

$$C = \frac{1}{5}X - 2 \frac{h_0^2}{L^2} Y$$

で表される。式(57)を式(43)、(51)に代入すると、鉛直加速度を考慮した場合の線形解を計算することができ

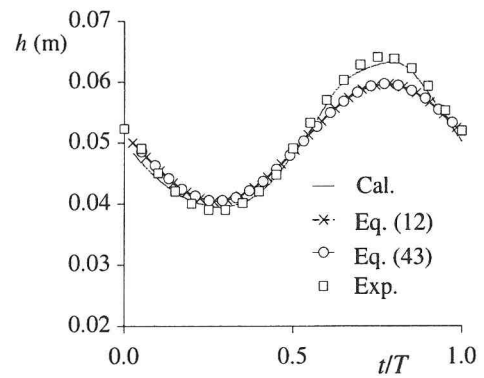


図-8 固定点での水深の時間変化 (Case. 2)

る。

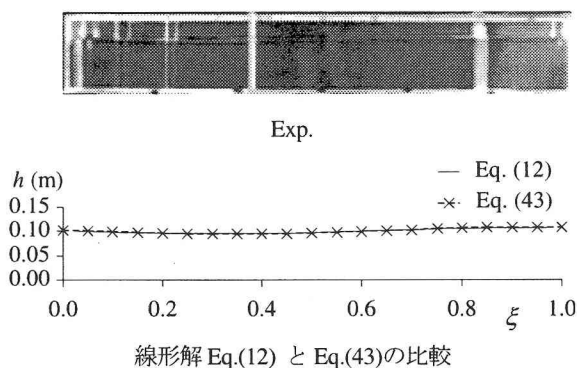
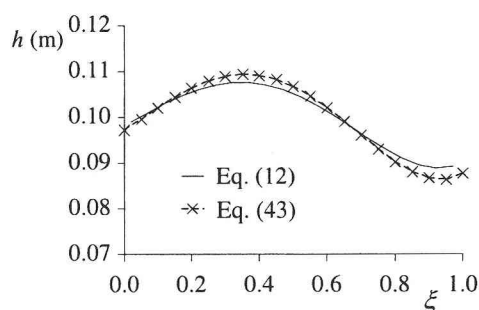
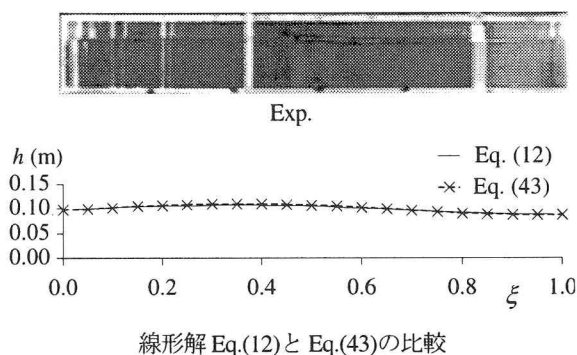
5. 考察

振動振幅、周波数が小さい場合の水面形、および固定点での水深の時間変化を示したものが図-5, 6 である。水面形の時間変化をみると、計算結果と線形解は適合しており、浅水流方程式と鉛直加速度を考慮した場合の線形解は一致している。また、固定点での水深の時間変化をみると、実験結果と適合していることがわかる。

一方、振動振幅が大きい場合について水面形、固定点での時間変化を示したものが図-7, 8 である。この場合、静水圧を仮定した線形解(12)と鉛直加速度を考慮した線形解(43)はほぼ一致しているが、計算結果と線形解は適合しておらず、計算結果のほうが実験結果を再現していることがわかる。従って、振幅が大きく Case.1 よりも非線形性が強い場合、線形解は適合しないと考えられる。

図-9, 10 は初期水深が大きい場合について、線形解の水面形の時間変化、固定点での水深の時間変化を比較したものである。このケースは、振動振幅が小さく、上述の Case. 1 の検討から浅水流方程式の数値解析と線形解はほぼ一致すると考えられるため、線形解と実験結果の比較を試みる。図をみると、浅水流方程式と鉛直加速度を考慮した場合とで水面形に違いが見られ、鉛直加速度を考慮した場合の方が実験結果を再現していることがわかる。これは、初期水深が大きく、波数が高くなるため、静水圧仮定が成立しなくなり、鉛直加速度項の影響が大きくなったと考えられる。なお本研究では、線形解の水深分布を ξ の 4 次関数で与えている。波数が高く、水深が大きい場合を検討するには、さらに高次の項を考慮する必要があると考えられる。この点については、今後の検討課題としたい。

次に、浅水流方程式の線形解における水深分布(12)の係数である式(27)-(29), (33), (34)の分母を 0 にすると、



(b) $t/T = 0.6$
図-9 水面形の時間変化 (Case. 4)

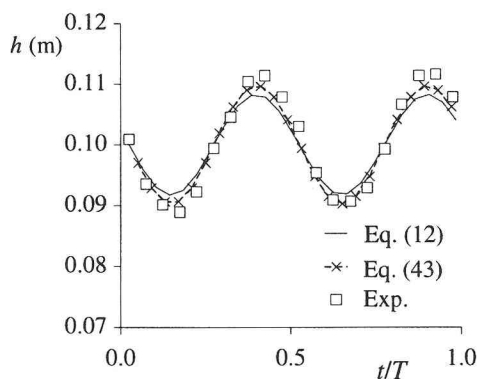


図-10 固定点での水深の時間変化 (Case. 4)

水面の振動振幅と角振動数に関する共鳴関係が以下のよう導かれる。

$$7P - 60 = 0$$

そこで、水槽の長さ $L = 1.0(\text{m})$ 、初期水深 $h_0 = 0.1(\text{m})$ 、

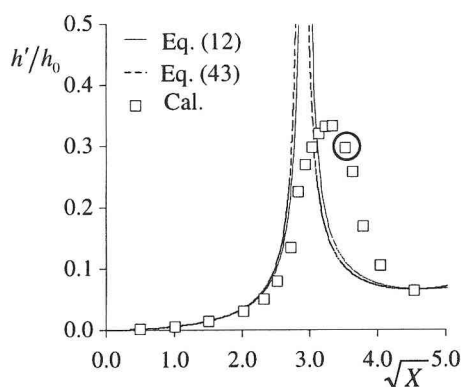


図-11 壁の振動数に対する水面振動振幅の変化

振幅 d を小さい場合の $0.01(\text{m})$ として、共鳴点を示す無次元角振動数を求めると、次のようになる。

$$X \approx 8.6$$

一方、鉛直加速度を考慮した場合についても同様に、

$$A = P \left(\frac{3}{2} Y - 6 + 2 \frac{h_0^2}{L^2} X \right) + \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} XY = 0$$

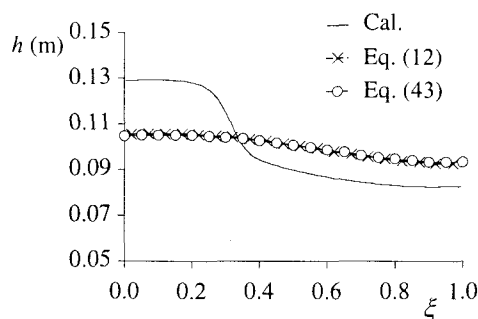
$$B = P \left(\frac{7}{30} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X + \frac{h_0^2}{L^2} Y \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{L^2} Y \left(\frac{1}{3} X + \frac{1}{2} Y - 2 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{L^2} X \right) = 0$$

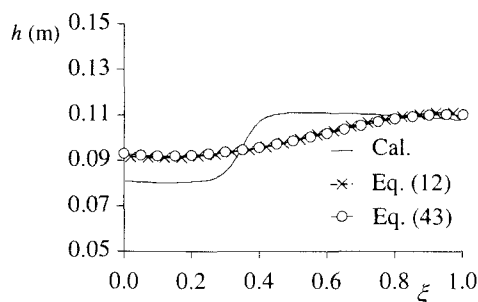
から、共鳴関係が得られ、水槽の長さ、初期水深、振動振幅を代入すると、 $X \leq 36$ の領域で共鳴点の無次元角振動数が以下のように求められる。

$$X \approx 8.3$$

共鳴関係について線形解と数値解析結果を比較し、考察を行う。数値解析については、水槽の長さ、初期水深、振幅を上記と同条件の $1.0(\text{m})$ 、 $0.1(\text{m})$ 、 $0.01(\text{m})$ とし、角振動数 ω_0 を変化させた。図-11は、横軸に $\sqrt{X}$ 、縦軸に初期水深で無次元化された右端壁での振幅をとり、計算結果と線形解についてまとめたものである。ここで実験の Case4 では、 $\sqrt{X} \approx 6.3$ となる。図をみると、 $\sqrt{X}$ が小さい領域では、ゆっくり振動するため、無次元波数は小さく、静水圧の場合と鉛直加速度を考慮した場合の線形解は一致している。しかし、 $\sqrt{X}$ が大きくなると、無次元波数が大きくなり、両者の振動振幅は若干異なってくる。また、 $\sqrt{X}$ が小さい領域では、計算結果と線形解はほぼ一致しているが、共鳴点近傍である $\sqrt{X} \geq 2.5$ において適合していない。そこで、振動周期 $T = 1.8\text{s}$ ($\sqrt{X} \approx 3.5$ 、図中の○印) の場合について、計算結果と線形解を比較し、適合しない理由を考察する。図-12、13は、水面形及び右壁水深の時系列を示したものである。ここでの時刻は、計算の時間を表している。水面形の時間変化をみると、計算結果は段波の水面形を示しており、このような水面形を線形解で表現することはできないため、計算結果と線形解の水面形が異なっている。また、右壁における水



(a) $t = 101.0$ (s)



(a) $t = 102.2$ (s)

図-12 水面形の時間変化 ($T = 1.8$ s)

深の時間変化をみると、ひずみがみられる。従って、非線形性の影響によって両者がずれるのではないかと考えられる。

6. おわりに

本研究は、移動一般座標系で記述した水深積分モデルを基礎式として、振動台上の水槽内流体振動について考察したものである。計算結果、線形解を実験結果と比較することで、水槽内の流体振動を再現できることを示した。今後、線形解をさらに高次の関数として表した場合について検討するとともに鉛直加速度を考慮した基礎式による数値解析を行い、振動特性について考察したい。

謝辞

最後に、本研究を遂行するにあたり、実験装置を提供していただきました構造ダイナミクス研究室の皆様

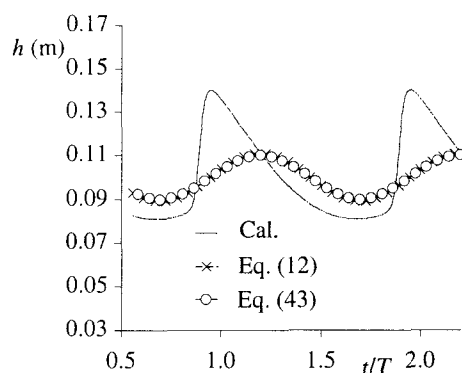


図-13 右端壁での水深の時間変化 ($T = 1.8$ s)

様に深く御礼申し上げます。また、水理実験、データ整理、図面作製に多大な協力を頂いた京都大学工学部・技官、仙波秀治氏に謝意を表します。

参考文献

- 1) 細田 尚, 音田慎一郎, 浜崎宏正: 移動一般座標系での浅水流方程式での数値解析法とその検証, 応用力学論文集 vol.6, pp. 873-882, 2003.
- 2) 細田 尚, 長田信寿, 村本嘉雄: 移動一般座標系による開水路非定常流の数値解析, 土木学会論文集 No.553/II-34, pp. 267-272, 1996.
- 3) Nagata, N., Hosoda, T. and Muramoto, Y.: Numerical analysis of river channel processes with bank erosion, *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, vol.26, No.4, pp. 243-252, 2000.
- 4) 朝位孝二, 細田 尚: 移流方程式の数値解析, 水工学における計算機利用の講習会講義集(土木学会水理委員会基礎水理部会), pp. 13-22, 1999.
- 5) 細田 尚, 朝位孝二: ダム破壊流れの1次元解析, 水工学における計算機利用の講習会講義集(土木学会水理委員会基礎水理部会), pp. 23-31, 1999.
- 6) 音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎: 鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良と多次元数値解析結果を用いた検証について, 水工学論文集第46巻, pp. 589-594, 2002.
- 7) 細田 尚, 岩佐義朗: 開水路における波動の分散性, 第26回水理講演会論文集, pp. 401-407, 1982.

(2004年4月16日受付)