

汀線に直角に入射する波によって形成されるビーチカスプ

Beach cusps formed by waves with their crests parallel to the shoreline

谷川 麻子*・泉 典洋**・田中 仁***

Asako TANIKAWA, Norihiro IZUMI and Hitoshi TANAKA

*正員 富士フイルムソフトウェア株式会社 (〒 215-0004 神奈川県川崎市麻生区)

**正会員 PhD 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

Beach cusps are uniformly spaced, arcuate scallops formed at beaches. They are inseparably connected with nearshore currents. The nearshore current system forms a variety of circulation patterns, which have been attracting many researchers' interest since long time ago. While several theories have been proposed on the formation of nearshore current systems, Hino^{1),2),3)} attributed their formation to the dynamic instability, and explained it in terms of linear stability analysis. In this study, his theory is revisited and improved in several aspects.

Key Words : cusp, nearshore current system, hydrodynamic instability

1. はじめに

カスプ状海岸地形とはアーチ状の汀線が周期的に連なる地形のことであり、その沿岸方向の波長の規模によりいくつかの種類に分類される。波長が数 m から数十メートルのものはビーチカスプ (図-1 参照)、それ以上のものはメガカスプ, large cusp, giant cusp などと呼ばれている。これまでも海岸工学のみならず地形学の面からも多くの研究が行われており^{1)~10)}, 図-2 に示すような海岸付近に発生する循環流 (海浜流系統) と密接な関係を持つことがわかっている。

海浜流系統とは、沿岸方向の流れである沿岸流および沖向きの強い流れである離岸流などで構成されている海岸付近の流れのことである。このような流れは波が持つラディエーションストレスによって発生すると考えられており、波浪の条件によっては離岸流と沿岸流が沿岸方向に規則的に並ぶ現象が知られている。同時に離岸流および沿岸流による砂の輸送によって汀線には、沿岸方向にほぼ一定間隔で凹凸を有する規則的なパターンが形成される。このような地形がカスプであると考えられている。

海浜流系統の発生機構についてはいくつかの説が提案されているが、それらは大きく強制外因説と自励内因説に分けられる。強制外因説とは、波動場がエッジ波や cross wave などの外因によって沿岸方向に一樣でなくなり、ラディエーションストレスに対して空間勾配が生じるために離岸流および沿岸流が発生するという説である。一方、自励内因説とは外因が存在しなくても流体自身が有する力学的不安定性からラディエーションストレスの一樣性に破れが生じ、そこから離岸流が発生するという説である。後者の説として代表的なものに日野の理論がある^{1),2),3)}。

日野は沿岸方向に一樣な海岸に擾乱を与えその増幅率を調べる線形安定解析の手法を用いて海浜流系統お

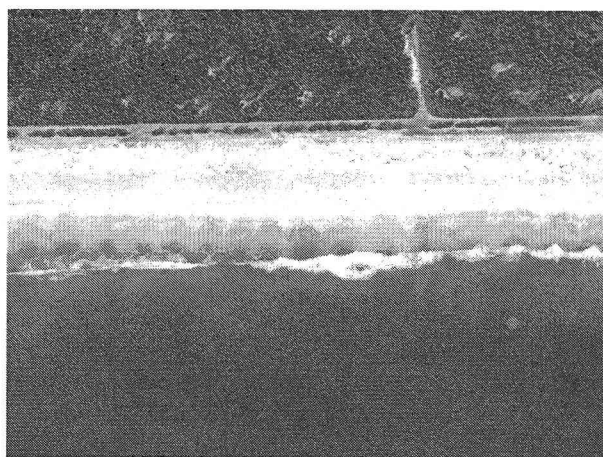


図-1 仙台海岸に見られるビーチカスプ。平成 12 年 12 月 30 日撮影。

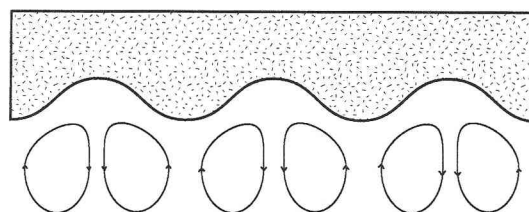


図-2 カスプと循環流の概念図

よびカスプ状海岸地形の発生を説明した。解析によれば、波が汀線に対して直角よりある程度の角度を持って入射する場合、碎波帯幅の 1~ 数倍程度の波長を持つカスプが形成される³⁾。日野の理論は海浜流系統とカスプ状海岸地形の発生を力学的不安定性の観点から初めて合理的に説明した点で画期的であるものの、いくつか不十分な点が見られることも否めない。たとえ

† Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

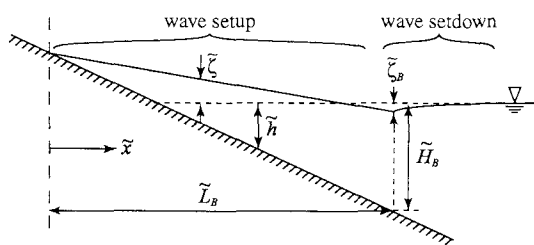


図-3 汀線近傍の平均水面

ば実験で実現される理想的な条件下では波が汀線に対して直角に入射する場合でもカスプが発生するが、日野の理論ではこのようなカスプの発生を説明できない。

本研究は、日野の理論において、波が汀線に対して直角に入射する場合、カスプの形成を再現できなかった原因が、水際および砕波点で満たされなければならない境界条件および接続条件が厳密に与えられていなかった点にあるとの考えから、日野の理論に改良を加え、波が汀線に直角に入射する場合にもビーチカスプが形成されることを理論的に明らかにしたものである。また砕波帯外における底面剪断力についてもより合理的な評価式を用いる改良を行った。

2. モデル

図-3 に示したような勾配の様な海岸を考える。波は汀線に対して直角に入射しており、その波によるラディエーションストレスによって砕波点より汀線側では平均海面が上昇する wave setup が、沖側では低下する wave setdown が生じている。

沿岸方向に $\tilde{y}$ 軸、汀線に垂直な岸沖方向に $\tilde{x}$ 軸をとり、wave setup が生じた状態での水際を $\tilde{x}$ 軸の原点 ($\tilde{x} = 0$)、砕波点の位置を $\tilde{x} = \tilde{L}_B$ とする。また静水深を $\tilde{h}$ 、平均水位を $\tilde{\zeta}$ とすると、水際において全水深がゼロ ($\tilde{h} + \tilde{\zeta} = 0$) となる条件から次式が成り立つ。

$$\tilde{h} = -\tilde{\zeta} \equiv -\tilde{Z}_M \quad \text{at} \quad \tilde{x} = 0 \quad (1)$$

ここで $\tilde{Z}_M$ は水際での水位、あるいは水際の静水面からの高さを示している。砕波点における静水深を $\tilde{H}_B$ とすると次式が成り立つ。

$$\tilde{h} = \tilde{H}_B \quad \text{at} \quad \tilde{x} = \tilde{L}_B \quad (2)$$

前述したように海底形状を線形に仮定すると上式および式 (1) から静水深 $\tilde{h}$ は次のように表わされる。

$$\tilde{h} = \frac{\tilde{H}_B + \tilde{Z}_M}{\tilde{L}_B} \tilde{x} - \tilde{Z}_M \quad (3)$$

式 (1)-(3) はいずれも擾乱を与える前の基本状態において成立する条件である。この基本状態に擾乱を与えると静水深 $\tilde{h}$ および水位 $\tilde{\zeta}$ も変化する。したがって水際の位置にも変化が生じ、必ずしも $\tilde{x} = 0$ ではなくなる。擾乱を与えた後の摂動問題では、 $\tilde{x} = 0$ で全水深がゼロとなるのではなく、むしろ $\tilde{h} + \tilde{\zeta} = 0$ が成立する点が水際の位置となるのである。

同様に式 (2) も摂動を与えた後は成立せず、砕波点は $\tilde{x} = \tilde{L}_B$ からずれているはずである。このずれを知るためには、砕波点で満足される何らかの条件が必要となる。本研究では、砕波点において砕波水深と砕波波高の比が一定となると仮定する。そのとき次式が成り立つ。

$$\frac{2\tilde{a}}{\tilde{h} + \tilde{\zeta}} = \beta \quad (4)$$

ここで $\tilde{a}$ は波の振幅 ($2\tilde{a}$ は波高) であり、上式では砕波直前での振幅を表している。また β は砕波波高と砕波水深の比であり 1 のオーダーを持つパラメータである。後に行う線形安定解析では、底面形状に対して沿岸方向にサイン型の擾乱を与えるが、それによって水深も沿岸方向に周期的に変化する。すると上式を満たす砕波点の位置も周期的に変化することになる。図-1 にもカスプの形状に対応して砕波点の位置 (汀線前面の白い線) が周期的に変化している様子がわかる。また同時に底面に与えられた擾乱の影響によって β の値も変化する可能性があるが、問題を簡単にするためにここでは一定値 ($= 1$) であると仮定する。

日野の理論^{2),3)}では摂動を与えた後の水際での境界条件として式 (1) と同等な式が用いられている。また砕波点の変化も無視されており、式 (4) のような砕波条件も用いられていない。本研究では、日野の理論で波が汀線に直角に入射するときカスプの形成を説明できなかった原因がこの点にあるとの観点から、後述の 5.3(2) および (3) において、水際で全水深がゼロとなり砕波点で式 (4) が成立するという条件を用いて、擾乱による水際および砕波点位置の変化の影響を考慮している。

前述したように、波によるラディエーションストレスによって砕波帯内部では wave setup が、砕波帯外部では wave setdown が生じ、砕波点に向かって一旦低下した平均水面は、砕波帯内部で岸に向かって盛り上がる。このように岸に向かって水面が盛り上がる状態は重力的に不安定であり、わずかな擾乱に対しても不安定になることが予想される。汀線方向にサイン型の擾乱を与えてその増幅率を線形安定解析の手法を用いて調べると、増幅率は波長の関数となることが期待できる。そして増幅率が最大となる波長、すなわち卓越波長が存在するような場合、卓越波長を有する擾乱が他の擾乱よりも早く成長し汀線形状を決定する。このような擾乱が発達したものがカスプであると考えられる。

3. 定式化

3.1 流れの方程式

波が存在する場において生じる流れは次の浅水流方程式によって記述される。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\tilde{\tau}_{bx}}{\rho(\tilde{h} + \tilde{\zeta})} - \frac{1}{\rho(\tilde{h} + \tilde{\zeta})} \left(\frac{\partial \tilde{S}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{S}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (5)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\tilde{\tau}_{by}}{\rho(\tilde{h} + \tilde{\zeta})}$$

$$-\frac{1}{\rho(\tilde{h}+\tilde{\zeta})}\left(\frac{\partial\tilde{S}_{xy}}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{S}_{yy}}{\partial\tilde{y}}\right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}(\tilde{h}+\tilde{\zeta})}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial\tilde{v}(\tilde{h}+\tilde{\zeta})}{\partial\tilde{y}}=0 \quad (7)$$

ここで $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ はそれぞれ $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ 方向の水深平均流速, $\tilde{S}_{ij}$ ($i, j = x, y$) はラディエーション応力テンソル, $\tilde{\tau}_{bi}$ ($i = x, y$) は底面剪断力ベクトル, ρ は水の密度, g は重力加速度 ($= 9.8 \text{ m/s}^2$) である.

3.2 底面形状の時間変化

海底形状の時間変化は次式で表されるものとする.

$$\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}} = \frac{\partial\tilde{q}_{bx}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{q}_{by}}{\partial\tilde{y}} \quad (8)$$

ここで $\tilde{t}$ は時間, $\tilde{q}_{bi}$ ($i = x, y$) は底質輸送量ベクトルである. 海岸域での底質輸送量については様々な研究が行われているが, ここでは問題を簡単にするために底質フラックスベクトルが流速ベクトルに比例するという次のモデルを用いることとする.

$$(\tilde{q}_{bx}, \tilde{q}_{by}) = C_s (\tilde{u}, \tilde{v}) \quad (9)$$

ここで C_s は長さの次元を有する係数であり, ここでは定数と仮定する.

3.3 ラディエーションストレス

波が汀線に向かって垂直に入射しているとき, ラディエーションストレスは次のように表される.

$$\tilde{S}_{xx} = \tilde{E} \left(\frac{2\tilde{c}_g}{\tilde{c}} - \frac{1}{2} \right) \quad (10)$$

$$\tilde{S}_{xy} = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{S}_{yy} = \tilde{E} \left(\frac{\tilde{c}_g}{\tilde{c}} - \frac{1}{2} \right) \quad (12)$$

ここで $\tilde{E}$ は単位幅単位長あたりのエネルギー, $\tilde{c}$ および $\tilde{c}_g$ はそれぞれ波速および群速度である. 単位幅単位長あたりのエネルギー $\tilde{E}$ は次式で表される.

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \rho g \tilde{a}^2 \quad (13)$$

また波速 $\tilde{c}$ は分散関係式から次のように求められる. 分散関係式は次式で表される.

$$\tilde{\sigma}^2 = g \tilde{k} \tanh \tilde{k} \tilde{h} \quad (14)$$

ここで $\tilde{\sigma}$ は角周波数であり場所によって変化しないことから, 式 (14) より波数 $\tilde{k}$ について次の関係が得られる.

$$\tilde{k} \tanh \tilde{k} \tilde{h} = \tilde{k}_\infty \quad (15)$$

ここで添え字 ∞ は深海域での値を表す. 上式より水深 $\tilde{h}$ を与えると波数 $\tilde{k}$ が一意的に決まることがわかる. 角周波数 $\tilde{\sigma}$ は波数 $\tilde{k}$ および波速 $\tilde{c}$ と次のような関係にある.

$$\tilde{\sigma} = \tilde{c} \tilde{k} \quad (16)$$

式 (15) および (16) より, 波速 $\tilde{c}$ は次のように表される.

$$\tilde{c} = \tilde{c}_\infty \tanh \tilde{k} \tilde{h} \quad (17)$$

ここで

$$\tilde{c}_\infty = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{k}_\infty} = \left(\frac{g}{\tilde{k}_\infty} \right)^{1/2} \quad (18)$$

式 (17) および (18) より, 波速 $\tilde{c}$ も水深のみの関数として表されることがわかる.

群速度 $\tilde{c}_g$ と波速 $\tilde{c}$ の間には次のような関係が存在する.

$$\frac{\tilde{c}_g}{\tilde{c}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2\tilde{k}(\tilde{h}+\tilde{\zeta})}{\sinh 2\tilde{k}(\tilde{h}+\tilde{\zeta})} \right] \quad (19)$$

砕波帯内では全水深が十分小さいとすると上式は $\tilde{c}_g = \tilde{c}$ となり, 砕波帯内部のラディエーションストレスは次のように表される.

$$\tilde{S}_{xx} = \frac{3}{2} \tilde{E} \quad (20)$$

$$\tilde{S}_{yy} = \frac{1}{2} \tilde{E} \quad (21)$$

ここで $\tilde{E}$ は次のように見積もられる. 砕波以降の波高 $\tilde{a}$ は次元解析および実験結果により, 次のように表されることが認められている^{2),3),11)}.

$$2\tilde{a} = \gamma(\tilde{h}+\tilde{\zeta}) \quad (22)$$

ここに γ は比例係数で 1 のオーダーの定数である. そのとき式 (13) より $\tilde{E}$ は次のように表される.

$$\tilde{E} = \frac{1}{8} \rho g \gamma^2 (\tilde{h}+\tilde{\zeta})^2 \quad (23)$$

よってラディエーションストレスは次のようになる.

$$\tilde{S}_{xx} = \frac{3}{16} \rho g \gamma^2 (\tilde{h}+\tilde{\zeta})^2 \quad (24)$$

$$\tilde{S}_{yy} = \frac{1}{16} \rho g \gamma^2 (\tilde{h}+\tilde{\zeta})^2 \quad (25)$$

日野は, 砕波帯外におけるラディエーションストレスの平均水深の変化に対する影響は小さいことから, その影響を無視している^{2),3)}. ここでもこの仮定を用い, 砕波帯外のラディエーションストレスを無視することにする.

3.4 底面剪断力

Liu and Dalrymple¹²⁾ は, 流れが波動流速振幅に比べ十分小さい場合に適用できる底面摩擦項の評価式として次式を導いている.

$$\tilde{\tau}_{bx} = \rho C_f \langle \tilde{w} \rangle [(1 + \cos^2 \theta) \tilde{u} + \sin \theta \cos \theta \tilde{v}] \quad (26)$$

$$\tilde{\tau}_{by} = \rho C_f \langle \tilde{w} \rangle [\sin \theta \cos \theta \tilde{u} + (1 + \sin^2 \theta) \tilde{v}] \quad (27)$$

ここで θ は波の入射角であり, 汀線に向かって垂直に入射する場合は 0 である. また, $\langle \tilde{w} \rangle$ は一周平均をとった波の軌道速度であり, 次式で表される.

$$\langle \tilde{w} \rangle = \frac{2}{\pi} \tilde{w} \quad (28)$$

ここで $\tilde{w}$ は波の軌道流速の最大値であり、微小振幅波を仮定すると次のように表される。

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{a}\tilde{\sigma}}{\sinh \tilde{k}(\tilde{h} + \tilde{\zeta})} = \frac{\tilde{a}g}{\tilde{c} \cosh \tilde{k}(\tilde{h} + \tilde{\zeta})} \quad (29)$$

砕波帯の外では $\tilde{\zeta} \ll \tilde{h}$ と仮定する。したがって式 (29) は次のように表される。

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{a}\tilde{\sigma}}{\sinh \tilde{k}\tilde{h}} \quad (30)$$

波の振幅 $\tilde{a}$ はエネルギーフラックス $\tilde{F}$ 一定の関係から次のように導く。エネルギーフラックスは次式で表される。

$$\tilde{F} = \tilde{E}\tilde{c}_g = \frac{1}{2}\rho g \tilde{a}^2 \frac{\tilde{c}}{2} \left(\frac{2\tilde{k}\tilde{h}}{\sinh 2\tilde{k}\tilde{h}} + 1 \right) \quad (31)$$

沖合い遠方の深海域におけるエネルギーフラックスは次式で表される。

$$\tilde{F} = \frac{1}{4}\rho g \tilde{a}_\infty^2 \tilde{c}_\infty \quad (32)$$

エネルギーフラックス $\tilde{F}$ が各断面において一定であるとして式 (17) および (31), (32) から次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \tilde{a}^2 &= \tilde{a}_\infty^2 \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_\infty} \left[\frac{2\tilde{k}(\tilde{h} + \tilde{\zeta})}{\sinh 2\tilde{k}(\tilde{h} + \tilde{\zeta})} + 1 \right]^{-1} \\ &= \tilde{a}_\infty^2 \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_\infty} \left(\frac{2\tilde{k}\tilde{h}}{\sinh 2\tilde{k}\tilde{h}} + 1 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (33)$$

式 (15) より波数 $\tilde{k}$ の水深 $\tilde{h}$ による変化がわかり、上式より振幅 $\tilde{a}$ の水深による変化が求められる。式 (33) を (29) に代入すると次式が得られる。

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{a}_\infty \tilde{\sigma}}{\sinh \tilde{k}\tilde{h}} \left(\frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_\infty} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{2\tilde{k}\tilde{h}}{\sinh 2\tilde{k}\tilde{h}} \right)^{-1/2} \quad (34)$$

砕波帯内部では浅水波の近似を用いることができ $\cosh \tilde{k}(\tilde{h} + \tilde{\zeta}) \approx 1$ となる。したがって次式が得られる。

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{a}g}{\tilde{c}} \quad (35)$$

また波速 $\tilde{c}$ は次のように表される。

$$\tilde{c} = \left[g (\tilde{h} + \tilde{\zeta}) \right]^{1/2} \quad (36)$$

振幅は式 (22) で近似できるとすると、 $\tilde{w}$ は次のように求められる。

$$\tilde{w} = \frac{\gamma}{2} \left[g (\tilde{h} + \tilde{\zeta}) \right]^{1/2} \quad (37)$$

4. 無次元化

支配方程式 (5)–(8) の各項のオーダーがほぼ同じになるように、基本状態における砕波点での静水深 $\tilde{H}_B$ および汀線から砕波点までの距離 $\tilde{L}_B$ を用いて、次のような無次元化を導入する。

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{c}, \tilde{c}_g, \tilde{w}) = \left(g \tilde{H}_B \right)^{1/2} (u, v, c, c_g, w) \quad (38a)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{L}_B (x, y) \quad (38b)$$

$$(\tilde{h}, \tilde{\zeta}, \tilde{a}) = \tilde{H}_B (h, \zeta, a), \quad \tilde{k} = \tilde{H}_B^{-1} k \quad (38c, d)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{g}{\tilde{H}_B}^{1/2} \sigma, \quad \tilde{t} = \frac{\tilde{H}_B \tilde{L}_B}{C_s (g \tilde{H}_B)^{1/2}} t \quad (38e, f)$$

また $\tilde{S}_{ij}$ および $\tilde{E}$, $(\tilde{\tau}_{bx}, \tilde{\tau}_{by})$ は次のように正規化する。

$$(\tilde{S}_{ij}, \tilde{E}) = \rho g \tilde{H}_B^2 (S_{ij}, E) \quad (39)$$

$$(\tilde{\tau}_{bx}, \tilde{\tau}_{by}) = \rho g \frac{\tilde{H}_B^2}{\tilde{L}_B} (\tau_{bx}, \tau_{by}) \quad (40)$$

上式を用いて支配方程式 (5)–(8) を無次元化する。

4.1 砕波帯外

無次元化した支配方程式は砕波帯外においては次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{h} \quad (41)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{h} \quad (42)$$

$$\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (44)$$

ここで式 (43) では $\zeta \ll h$ の仮定を用いていることに注意する必要がある。底面剪断力ベクトルは次のように表される。

$$\tau_{bx} = 2Cwu \quad (45)$$

$$\tau_{by} = Cwv \quad (46)$$

ここで

$$C = \frac{2C_f \tilde{L}_B}{\pi \tilde{H}_B} \quad (47)$$

$$w = \frac{a_\infty k_\infty^{1/2}}{\sinh kh} \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + 1 \right)^{-1/2} \quad (48)$$

4.2 碎波帯内

碎波帯内において無次元化した支配方程式は次のように書くことができる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{h + \zeta} - \frac{1}{h + \zeta} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} \quad (49)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{h + \zeta} - \frac{1}{h + \zeta} \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \quad (50)$$

$$\frac{\partial u(h + \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial v(h + \zeta)}{\partial y} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (52)$$

ラディエーションストレスは次式で表される。

$$S_{xx} = \frac{3\gamma^2}{16} (h + \zeta)^2 \quad (53)$$

$$S_{yy} = \frac{\gamma^2}{16} (h + \zeta)^2 \quad (54)$$

さらに底面剪断力は次式で表される。

$$\tau_{bx} = C\gamma (h + \zeta)^{1/2} u \quad (55)$$

$$\tau_{by} = \frac{C\gamma}{2} (h + \zeta)^{1/2} v \quad (56)$$

5. 線形安定解析

5.1 摂動展開

基本状態として、図-3のような縦断面形状が汀線方向に一樣に続いているような状況を考える。その基本状態に対して、汀線方向に規則的なサイン型の微小擾乱を与える。そのとき u および v , ζ , h は次のように摂動展開できる。

$$u = Au_1(x) e^{pt} \cos \lambda y \quad (57)$$

$$v = Av_1(x) e^{pt} \sin \lambda y \quad (58)$$

$$\zeta = \zeta_0(x) + A\zeta_1(x) e^{pt} \cos \lambda y \quad (59)$$

$$h = h_0(x) + Ah_1(x) e^{pt} \cos \lambda y \quad (60)$$

ここで A は擾乱の振幅であり微小であると仮定する。また p は擾乱の成長率、 λ は擾乱の波数である。擾乱の成長率 p が正であれば汀線方向に一樣な状態は擾乱に対して不安定であり、逆に負であれば安定であることを意味している。成長率 p が正で波数 λ の関数となり、成長率を最大にする波数 λ (卓越波数) が存在するとき、その波数に対応する波長 (卓越波長) を持った擾乱が最も早く発達することになる。したがって卓越波長が実際に汀線上に形成されるカスプの波長に対応しているものと考えられる。

5.2 一次元基本解

式 (57)–(60) を (41)–(44) に代入し、 A のオーダーで整理すると $O(1)$ では次式が得られる。

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = 0 \quad (61)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = 0 \quad (62)$$

碎波帯の外ではラディエーションストレスの影響を無視しているため、基本状態における wave setdown は生じていない。したがって平均水位 ζ_0 は場所によらず一定であり次式で表される。

$$\zeta_0 = 0 \quad (63)$$

そのとき碎波点における水位変化 Z_B は次のように表される。

$$Z_B = 0 \quad (64)$$

碎波帯内部では $O(1)$ で次式が得られる。

$$\frac{d\zeta_0}{dx} = -\frac{1}{h_0 + \zeta_0} \frac{dS_{xx0}}{dx} \quad (65)$$

碎波帯内ではラディエーションストレス S_{xx0} は次のように表される。

$$S_{xx0} = \frac{3\gamma}{16} (h_0 + \zeta_0)^2 \quad (66)$$

上式を (65) に代入すると次式が得られる。

$$\frac{d\zeta_0}{dx} = -\frac{3\gamma^2}{8} \frac{d(h_0 + \zeta_0)}{dx} \quad (67)$$

碎波点において $h = 1$ および $\zeta = 0$ となる条件を用いて上式を積分すると、平均水位 ζ_0 は次のように求められる。

$$\zeta_0 = -K(h_0 - 1), \quad K = \frac{3\gamma}{3\gamma + 8} \quad (68a, b)$$

ここで h_0 は次のように表される。

$$h_0 = (1 + Z_M)x - Z_M \quad (69)$$

上式を式 (68) に代入すると次式が得られる。

$$\zeta_0 = -K(1 + Z_M)(x - 1) \quad (70)$$

上式に $x = 0$ を代入すると Z_M と K の間には次のような関係があることがわかる。

$$Z_M = \frac{K}{1 - K} \quad (71)$$

上式は Longuet-Higgins¹¹⁾ が導いた wave setup の式に他ならない。図-4 に $\gamma = 1$ としたときの基本解 $\zeta_0(x)$ および h_0 を示した。碎波帯内でしかラディエーションストレスを考慮していないため wave setup のみが見られるのがわかる。

5.3 二次元摂動問題

(1) 摂動方程式

碎波帯外における $O(A)$ の方程式 (摂動方程式) は次のようになる。

$$\frac{d\zeta_1}{dx} + \frac{2Cw_0}{h_0} u_1 = 0 \quad (72)$$

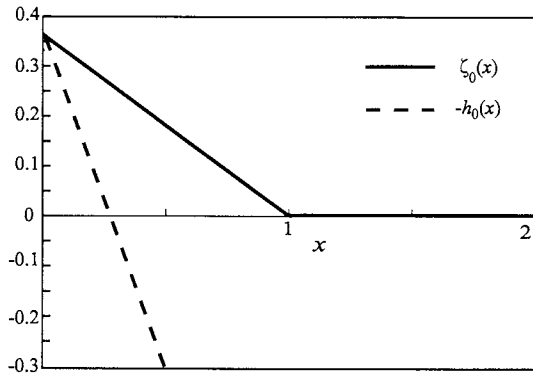


図-4 基本解における平均水位 ζ_0 および h_0 .

$$-\lambda \zeta_1 + \frac{C w_0}{h_0} v_1 = 0 \quad (73)$$

$$h'_0 u_1 + h_0 \frac{du_1}{dx} + \lambda h_0 v_1 = 0 \quad (74)$$

$$p h_1 - \frac{du_1}{dx} - \lambda v_1 = 0 \quad (75)$$

ここで'は x に関する全微分を表す.

一方, 砕波帯内では次式が得られる.

$$\frac{C}{(h_0 + \zeta_0)^{1/2}} u_1 + \frac{3\gamma}{8} \frac{dh_1}{dx} + \left(1 + \frac{3\gamma}{8}\right) \frac{d\zeta_1}{dx} = 0 \quad (76)$$

$$\frac{C}{(h_0 + \zeta_0)^{1/2}} v_1 + \frac{\gamma}{8} \lambda h_1 + \left(1 + \frac{\gamma}{8}\right) \lambda \zeta_1 = 0 \quad (77)$$

$$(h'_0 + \zeta'_0) u_1 + (h_0 + \zeta_0) \frac{du_1}{dx} + \lambda (h_0 + \zeta_0) v_1 = 0 \quad (78)$$

$$\Omega h_1 - \frac{du_1}{dx} - \lambda v_1 = 0 \quad (79)$$

(2) 水際における境界条件

与えられた摂動によって水際の位置もわずかに変化する. そこで摂動によって変化した水際の位置を次のように表す.

$$x = A \xi_1 e^{pt} \cos \lambda y \quad (80)$$

水際には全水深がゼロとなることから次式が成り立つ.

$$h + \zeta = 0 \quad \text{at} \quad x = A \xi_1 e^{pt} \cos \lambda y \quad (81)$$

上式を A について展開すると $O(1)$ で次式が得られる.

$$h_0(0) + \zeta_0(0) = 0 \quad (82)$$

$O(A)$ の式から次の関係が得られる.

$$\xi_1 = -\frac{h_1(0) + \zeta_1(0)}{h'_0(0) + \zeta'_0(0)} \quad (83)$$

水際に流速 u がゼロとなることから, 次式が得られる.

$$u = 0 \quad \text{at} \quad x = A \xi_1 e^{pt} \cos \lambda y \quad (84)$$

上式を $x = 0$ のまわりで A について展開すると A に関するそれぞれのオーダーで次式が得られる.

$$u_0(0) = 0 \quad (85)$$

$$u_1(0) + u'_0(0) \xi_1 = 0 \quad (86)$$

本研究で考えている, 波が汀線に直角に入射するケースでは $u_0(0) = 0$ および $u'_0(0) = 0$ であるため, 上式は日野の理論^{2),3)}で用いられている水際の境界条件と同一の次式に帰着する.

$$u_1(0) = 0 \quad (87)$$

ただし波が汀線に対し角度を持って入射するような場合, $u'_0(0) \neq 0$ となるため, $u_1(0) \neq 0$ であることに注意する必要がある.

(3) 砕波帯内外の接続条件

摂動によって静水深および平均水位, 波高が変化するとそれに伴って砕波点の位置も変化する. 本研究では砕波条件式 (4) を摂動展開することによって摂動による砕波点の位置の変化を導き, そこで砕波帯内外の解を接続することによって砕波点の変位の影響を導入する.

砕波点の位置が $x = 1$ から次のように変化すると仮定する.

$$x = 1 + A \chi_1 \cos \lambda y \quad (88)$$

そのとき式 (4) より次の関係が成り立つ.

$$2a^\circ = \beta(h^\circ + \zeta^\circ) \quad \text{at} \quad x = 1 + A \chi_1 \cos \lambda y \quad (89)$$

ここで上付きの $^\circ$ は砕波帯外部の値を表している. 式 (89) を砕波点 ($x = 1$) のまわりで A について展開すると $O(1)$ において次式が成り立つ.

$$2a_0^\circ(1) = \beta[h_0^\circ(1) + \zeta_0^\circ(1)] \quad (90)$$

また $O(A)$ において次式が成り立つ.

$$\chi_1 = -\frac{2a_1^\circ(1) - \beta[h_1^\circ(1) + \zeta_1^\circ(1)]}{2a_0^{\circ'}(1) - \beta[h_0^{\circ'}(1) + \zeta_0^{\circ'}(1)]} \quad (91)$$

ここで式 (33) より

$$a = \frac{\sqrt{2} \cosh kh}{(\sinh 2kh + 2kh)^{1/2}} a_\infty \quad (92)$$

であることから次式が得られる.

$$a_1^\circ = \frac{\partial a_0}{\partial h_0} h_1^\circ \quad (93)$$

$$a_0^{\circ'} = \frac{\partial a_0}{\partial h_0} h_0^{\circ'} \quad (94)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial h_0} = \frac{2\sqrt{2}k_0 \sinh 2k_0 h_0 (k_0 h_0 \sinh k_0 h_0 - \cosh k_0 h_0)}{(\sinh 2k_0 h_0 + 2k_0 h_0)^{5/2}} \times a_\infty \quad (95)$$

式 (91) によって砕波点の位置が表される.

砕波帯内外で静水深 h は連続でなければならない. したがって $O(1)$ および $O(A)$ においてそれぞれ次式が得られる.

$$h_0^\circ(1) = h_0^i(1) \quad (96)$$

$$h_1^o(1) + h_0^o(1)\chi_1 = h_1^i(1) + h_0^i(1)\chi_1 \quad (97)$$

ここで上付きの i は砕波帯内部での値を表している。基本状態における底面の勾配は x 軸方向に一樣と仮定しているので次式が成り立つ。

$$h_0^o(1) = h_0^i(1) \quad (98)$$

よって式 (97) は次のようになる。

$$h_1^o(1) = h_1^i(1) \quad (99)$$

水位 ζ についても同様に砕波帯の内外で連続であるという条件から $O(1)$ および $O(A)$ においてそれぞれ次式が得られる。

$$\zeta_0^o(1) = \zeta_0^i(1) \quad (100)$$

$$\zeta_1^o(1) + \zeta_0^o(1)\chi_1 = \zeta_1^i(1) + \zeta_0^i(1)\chi_1 \quad (101)$$

流速 u および v については次式が得られる。

$$u_1^o(1) = u_1^i(1) \quad (102)$$

$$v_1^o(1) = v_1^i(1) \quad (103)$$

摂動量に関する接続条件式 (99) および (102), (103) は $x = 1$ における解の連続を表しており、砕波帯内外での解の接続を特に考慮する必要がないことを意味している。したがって日野の理論³⁾に修正は不要であることが判る。ところが式 (101) は $x = 1$ において ζ_1 が不連続であり、解の接続が必要となることを意味している。これは従来考慮されていなかった条件である。また式 (102) および (103) についても波が汀線に直角に入射しないケースでは修正が必要となることに注意する必要がある。

(4) 無限遠点における境界条件

沖合い無限遠点では摂動は 0 に漸近する。したがって次式が成り立つ。

$$u_1 = v_1 = h_1 = \zeta_1 = 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (104)$$

(5) 解法

以上のような境界条件及び接続条件を満たすように摂動方程式を解くことによって、波数が λ であるような擾乱の増幅率 p を求めることができる。摂動方程式 (72)–(79) は四つの変数に関する四つの常微分方程式であり、境界条件 (87), (104) および接続条件 (99), (101), (102), (103) とともに Sturm-Liouville 型の固有値問題を形成している。ここでは Chebyshev 多項式展開によるスペクトル法¹³⁾を用いて固有値 p を波数 λ の関数として求める。 u_1 および v_1 , h_1 , ζ_1 を Chebyshev 多項式展開によって次のように表す。

$$u_1 = \sum_{n=0}^N c_n^{(1)} T_n(\eta), \quad v_1 = \sum_{n=0}^N c_n^{(2)} T_n(\eta) \quad (105a, b)$$

$$h_1 = \sum_{n=0}^N c_n^{(3)} T_n(\eta), \quad \zeta_1^i = \sum_{n=0}^N c_n^{(4)} T_n(\eta), \quad (105c, d)$$

$$\zeta_1^o = \sum_{n=0}^N c_n^{(5)} T_n(\eta), \quad (105e)$$

ここで

$$\eta = \frac{x+1}{x-1} \quad (105f)$$

上式を支配方程式および境界条件に代入し Gauss-Lobatto 点 ($\eta_j = \cos(j\pi/N)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$) で評価すると、次の一般化固有値問題に帰着する。

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = p\mathbf{R} \quad (106)$$

ここで $\mathbf{L}$ および $\mathbf{R}$ は $5(N+1) \times 5(N+1)$ の行列を表わし、 $\mathbf{u}$ は次式で表わされる。

$$\mathbf{u} = \left[c_0^{(1)}, \dots, c_N^{(1)}, c_0^{(2)}, \dots, c_N^{(2)}, c_0^{(3)}, \dots, c_N^{(3)}, c_0^{(4)}, \dots, c_N^{(4)}, c_0^{(5)}, \dots, c_N^{(5)} \right]^T \quad (107)$$

式 (106) を QZ 法を用いて解き、固有値 p を求める¹³⁾。またここでは $N = 20$ とした。

6. 結果と考察

解析によって得られた増幅率 p の擾乱の波数 λ と海岸勾配および底面摩擦係数によって構成されるパラメータ C との関係を図-5 に示す。ここでは $a_\infty = 0.34$, $k_\infty = 0.09$ とした。

増幅率 p は常に正の値を取り、有限の波数 λ においてピークを有することがわかる。日野³⁾の理論では入射角がゼロの場合卓越波長は無限小となり、カスプは発生しないという結果であったのに対して、本研究では入射角がゼロの場合でも有限の卓越波数が得られたことがわかる。しかも C の値によらず波数 λ が 6.3 程度のところで最大値をとっている。カスプの波長 $\tilde{L}_C$ は次のように表される。

$$\tilde{L}_C = \frac{2\pi\tilde{L}_B}{\lambda_c} \quad (108)$$

よって λ_c が 6 程度ということは砕波帯幅とほぼ同程度の波長を持ったカスプが形成されることを意味している。

また C の値が大きくなると増幅率自体は全体的に小さくなる様子が見て取れる。 C が次式で表されることから

$$C = \frac{2C_f\tilde{L}_B}{\pi\tilde{H}_B} \quad (47)$$

$\tilde{H}_B/\tilde{L}_B = 0.1$ とすると、 $C = 0.064$ および 0.32, 0.64 はそれぞれ $C_f = 0.01$ および 0.05, 0.1 に相当し、 $C_f = 0.01$ とするとそれぞれ $\tilde{H}_B/\tilde{L}_B = 0.1$ および 0.02, 0.01 に相当することがわかる。底面摩擦係数 C_f が大きく海岸勾配 $\tilde{H}_B/\tilde{L}_B$ が小さくなるにしたがって海岸は安定化し、カスプはでき難くなる（形成に時間がかかる）傾向にあることがわかる。

玉井の実験⁴⁾⁵⁾によると入射角が 0 のときもカスプは発生し、カスプの間隔は砕波帯幅とほぼ同程度となることを見出している。この結果は本理論の結果と良好に一致している。一方現地観測の結果によると離岸流の発生間隔は砕波帯幅の 1.5~8 倍程度の値を取ること

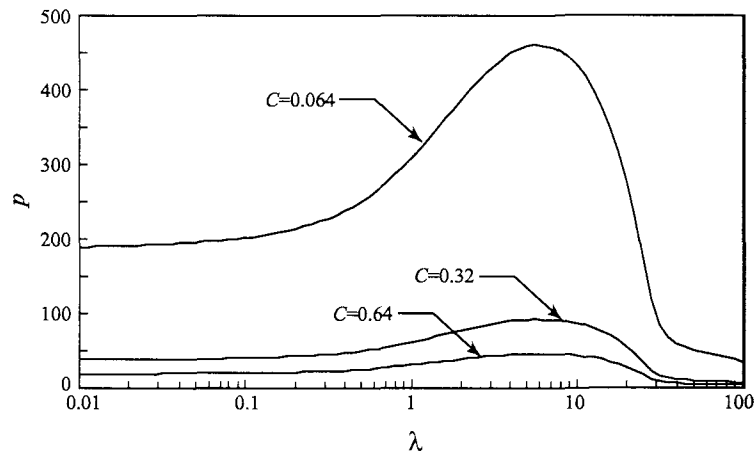


図-5 擾乱の成長率 p の波数 λ および C による変化. $a_{\infty} = 0.34$, $k_{\infty} = 0.09$.

がわかっている⁶⁾. 本理論の結果は現地で見られる離岸流の発生間隔よりかなり小さいことがわかる.

日野の解析結果³⁾では入射角 θ が 0 でないとき擾乱の増幅率はピークを持たないものの, 入射角が数度以上になるとピークを持つようになり, しかも入射角の増加とともにピークの波数(卓越波数)が小さくなることを見出している. これは入射角が大きくなるにしたがってカスプの波長が大きくなることを意味している. このことから入射角の増加はカスプの波長を増加させる役割を持っていることが推測される. 実験はほぼ正確に波が直角に入射する状況で行われたが, 現地ではそのような状況は考え難い. ほとんどの場合入射角を持つと考えるのが自然であろう. したがって観測によって得られたカスプの波長は入射角が大きいため大きく観測されたのではないだろうか. また本理論では直角に入射する波のみを取り扱ったが, 入射角の影響を取り入れて同様の解析を行えば, カスプの波長はより大きくなり, 現地観測の結果とも一致することが期待される. これについては今後の課題である.

7. 結論

本研究の主たる成果は次の通りである.

- 摂動による碎波点の位置の変化を考慮し, 接続条件を与えたことで解析結果が改良され, 擾乱の波数の変化に対し発達率のピークが得られるようになった.
- 底面剪断力を碎波帯の外でもより正確に評価できる式を用いることによって理論を改良した.
- 波が直角に入射する場合, カスプの波長は碎波帯の幅とほぼ同程度となることが明らかとなった. これは実験の結果とも一致している.
- 底面摩擦係数が大きく海岸勾配が小さくなるにしたがって海岸は安定化し, カスプはできにくくなることがわかった.

参考文献

- 1) 日野幹雄: 海浜流系の発生理論 (3) —単純化された理論—, 第 20 回海岸工学講演会論文集, pp. 339-343, 1973.
- 2) 日野幹雄: 海浜流系の発生理論, 土木学会論文報告集, 第 255 号, pp. 17-29, 1974.
- 3) 日野幹雄: 応答性を考慮した海浜流系と海浜地形の発生発達に関する理論土木学会論文報告集, 第 237 号, pp. 87-98, 1975.
- 4) 玉井佐一: カスプの形成に関する研究, 第 21 回海岸工学講演会論文集, pp. 115-120, 1974.
- 5) 玉井佐一: 海浜カスプの形成に関する研究, 第 22 回海岸工学講演会論文集, pp. 135-139, 1975.
- 6) 堀川清司, 佐々木民雄, 堀田新太郎, 桜本弘: 海浜流に関する研究 (第 2 報), —海浜流の現地観測— 第 22 回海岸工学講演会論文集, pp. 135-139, 1975.
- 7) 武田一郎, 砂村継夫: ビーチ・カスプの発生と成長: 第 29 回海岸工学講演会論文集, pp. 319-322, 1982.
- 8) 武田一郎, 砂村継夫: 砂浜海岸の堆積課程における汀線形状-メガカスプについて-, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 335-339, 1984.
- 9) 西隆一郎, 佐藤道郎: 写真によるカスプ地形と波浪場の現地観測: 海岸工学講演会論文集, 第 38 巻, pp. 296-300, 1991.
- 10) 島田宏幸, 高野弘毅, 水口優: ビーチカスプの成因について: 海岸工学講演会論文集, 第 42 巻, pp. 586-590, 1995.
- 11) Longuet-Higgins, M. S. and Fenton, J. D.: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave, *Proc. Royal Soc. London*, A333, pp. 1-13, 1974.
- 12) Liu, P. L. F., and R. A. Dalrymple: Bottom frictional stress and longshore currents due to waves with large angles of incidence, *J. Marine Res.*, Vol. 366, pp. 357-375, 1978.
- 13) Boyd, J. P.: *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd ed., Dover, 668p, 2001.

(2004 年 4 月 16 日 受付)