

波状跳水の流況特性に対する水路勾配の影響

Effect of channel slope on flow characteristics of undular hydraulic jumps

後藤 浩*, 安田 陽一**, 大津 岩夫***

Hiroshi GOTOH, Youichi YASUDA, Iwao OHTSU

*正会員 修 (工) 日本大学助手 理工学部土木工学科 (〒101 - 8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

**正会員 博 (工) 日本大学助教授 理工学部土木工学科 (〒101 - 8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

***正会員 工博 日本大学教授 理工学部土木工学科 (〒101 - 8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8)

Undular hydraulic jumps with a rectangular section have been characterized in sloping channels. The experimental investigation yields that the hydraulic condition for the formation of the undular jump affects the channel slope if the channel slope is steeper than the critical slope. Also, the effect of channel slope on the first wave height, the wave length, and the amplitude of undular jumps has been made clear. The difference of flow characteristics of undular jumps between a horizontal and a steep slope channels has been shown on the basis of the bed velocity and the bed pressure distributions. Further, undular surface profiles of undular jumps have been compared with theoretical results proposed by Iwasa, Andersen, and Grillhofer and Schneider, and the applicability of the theoretical approaches has been discussed.

Key Words : undular jump, hydraulic jump, open channel flow, channel slope, perturbation method

1. はじめに

波状跳水は射流のフルード数の値が1近くで形成され、波状水面を伴いながら射流から常流へ遷移する現象である。波状跳水はゲートや堰などの落差を伴う構造物の下流側で観察されることが多い。また、急勾配から緩勾配に接続する水路においてよく形成されている。

著者らは長方形断面滑面水平水路上に形成される波状跳水を対象に系統的な検討を行い、波状跳水の流況が流入射流のフルード数・アスペクト比・流入射流の乱流境界層の発達状態・レイノルズ数によって支配されることを明らかにした^{1)~6)}。また、広範囲な実験条件のもとで長方形断面および台形断面水平水路における波状跳水の流況・形成条件・波高や波長などの諸特性を系統的に明らかにした^{6),7)}。

本研究では、水路勾配 θ を有する長方形断面滑面水路において形成される波状跳水(図-1)の流況、形成条件、波の高さや波長などの諸特性に対する水路勾配の影響について実験的に明らかにした。また、Iwasa, Andersenなどによる波状跳水の水面形を表す理論^{8)~12)}よりも波の高さおよび振幅の大きさを広範囲な流入射流のフルード数のもとで表示できるGrillhofer and Schneider¹³⁾による理論を紹介し、波状跳水の水面形の特長に対する水路勾配の影響について検討した。

2. 実験

実験は可変勾配式長方形断面水路を用いて行った。実験で用いた水路は底面がステンレス、水路側壁が硬質ガラスで精巧に製作されており滑面として取り扱うことができる。実験条件を表-1に示す。

波状跳水の水面形状の測定にはポイントゲージおよびサーボ式波高計⁴⁾を併用した。また、波状跳水は定常的な現象であるので、波状跳水内部の底面流速・底面圧力の測定にはプラントル型ピトー管を用い、それをマンメータに接続することによって実験値を採取した。なお、ピトー管の測定位置を変化させた後は十分に時間を取りマンメータの水柱が落ち着いたことを確認してからその水位(測定精度 $\pm 1\text{mm}$)を測定した。

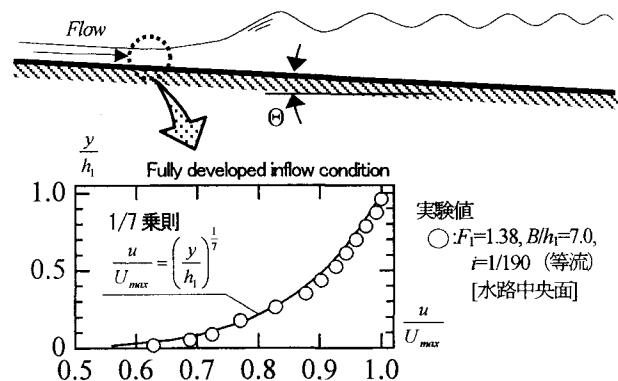


図-1 傾斜水路上の波状跳水および流入射流の流速分布の一例

表 - 1 実験条件

水路勾配 θ (rad)	0 (水平水路)	1/1000 (緩勾配水路)	1/360 (限界勾配水路)	1/80~1/330 (急勾配水路)
水路幅 B (cm)	80, 100, 130, 165	80	80	40, 80
流入射流水深 h_1 (cm)	4.7~11.4	5.6~8.7	6.3~8.7	5.6~13.9
流量 Q (m^3/s)	0.0584~0.128	0.0575~0.0794	0.0740	0.0596~0.0794
レイノルズ数 Re	$6.5 \times 10^4 \sim 1.8 \times 10^5$	$6.5 \times 10^4 \sim 7.0 \times 10^4$	6.5×10^4	$6.5 \times 10^4 \sim 1.8 \times 10^5$
流入射流のフルード数 F_1	1.07~3.16	1.17~1.79	1.12~1.85	1.08~2.01
アスペクト比 B/h_1	7.0~37.4	9.3~13.4	9.1~12.8	2.9~13.6

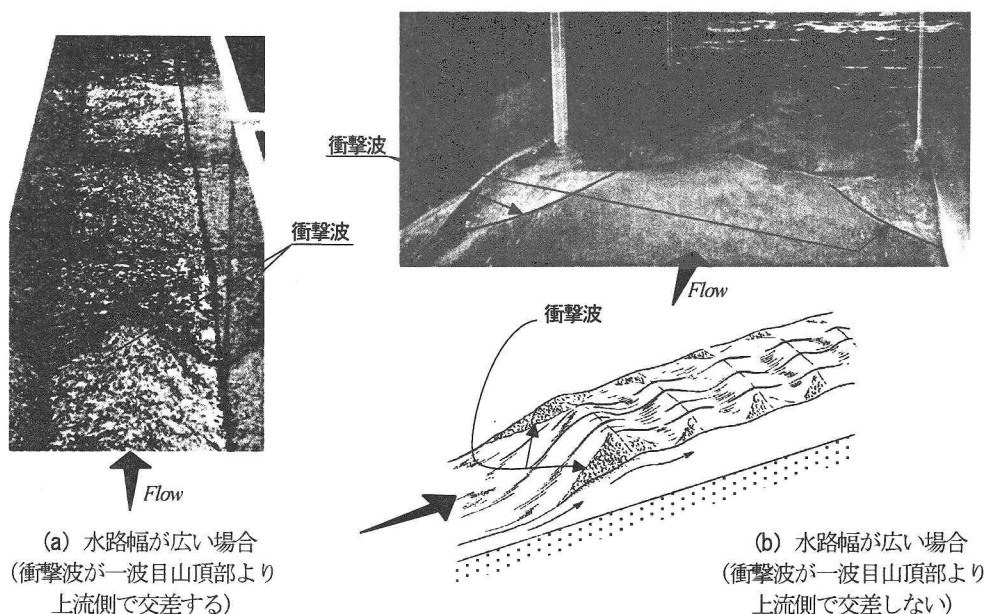


図-2 衝撃波の形成

実際の河川では波状跳水の流入射流が等流の場合ばかりでなく不等流の場合も多い。したがって、与えられた水路勾配に対して、水路の上流側に設置されているスルースゲートおよび水路下流端の越流型ゲートを用いて波状跳水の射流水深、常流水深を調整した。

なお、流入射流のフルード数が1.2よりも大きくなると波状跳水始端付近から衝撃波が形成される^{1)~6)}(図-2参照)。この衝撃波の形成については次のように考察される。跳水の形成に伴う逆圧力勾配により、水路側壁に沿う射流の境界層の厚さが跳水始端付近から急激に増加し、水路側壁付近の水面の流速が限界流速に近づく。このため跳水始端付近の両側壁から衝撃波が形成されるものと考えられる⁶⁾。与えられた F_1 に対して水路幅が狭い場合、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差するため波状跳水の流況に対して衝撃波の交差の影響を無視することができない(図-2(a))。すなわち、この場合、波状跳水の流況はアスペクト比によって変化する。一方、水路の幅が広い場合、衝撃波が一波目山頂部より上流側で交差しないため波状跳水の流況特性に対する衝撃波の形成の影響を無視することができる(図-2(b))。すなわち、波状跳水の流況に対するアスペクト比の影響を無視することができる。ここでは、衝撃波

が一波目山頂部より上流側で交差しない流況を対象に検討を行った。

また、レイノルズ数 Re の値が $Re < 6.5 \times 10^4$ で波状跳水の流況に粘性の影響が認められる^{1)~6)}。このため、ここでは $Re \geq 6.5 \times 10^4$ で実験を行って得られた結果について検討を加えた($Re = v_1 h_1 / \nu$; v_1 :流入射流の断面平均流速, h_1 :流入射流の水深, ν :動粘性係数)。

さらに、波状跳水の特性に対する射流の乱流境界層の発達状態の影響が認められる⁴⁾。本実験では波状跳水始端を乱流境界層が十分発達した領域に位置させた。なお、流入射流の流速分布は従来の水平水路の場合と同様な分布(1/7乗則)⁴⁾となっていることを実験によって確認した。図-1に流入射流の流速分布の一例を示す(y :水路床と垂直な方向の長さ, u, v, w :における流下方向流速, U_{max} :流入射流断面における最大流速)。

したがって、本研究で対象とする流況の支配因子は重力の影響を示す F_1 および θ となる。

3. 波状跳水の流況および形成条件に対する水路勾配の影響

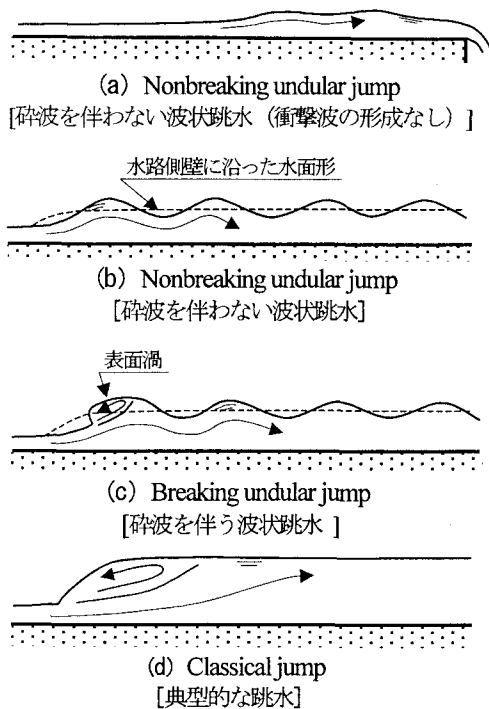


図-3 流況

波状跳水の流況および形成条件は、流入射流のフルード数 F_1 および水路勾配 Θ によって変化する [$F_1 = v_1 / (gh)^{1/2}$; g : 重力加速度]. 以下に、各流況に対する F_1 および Θ の影響について述べる.

$1 < F_1 \leq 1.2$ の場合

二次元的な波状水面が形成される (Nonbreaking undular jump⁶⁾; 図-3(a)). この場合、水面の凹凸は小さい. なお、傾斜水路の場合は5~6程度の定常的な波状水面が形成されその下流側に不規則な水面の凹凸が続くが、水平水路の場合、跳水の形成領域が短いため波状水面の形成は1, 2波程度となる.

$1.2 < F_1 \leq F_{limit}$ の場合

顕著な波状水面が形成され、水面の凹凸が下流側に続く (Nonbreaking undular jump⁶⁾; 図-3(b)). この場合、跳水始端近くの両側壁から衝撃波が形成される⁹⁾ (図-2参照). 定常的な波状水面が形成されている領域において、水平水路の場合より急勾配水路の場合の方が波長は短くなる. ここに、 F_{limit} は Nonbreaking undular jump が形成されるフルード数の上限値を示す.

$F_1 > F_{limit}$ の場合

一波目が砕波するものの、流れが水面に沿うため水面の凹凸が下流側に続く (Breaking undular jump⁶⁾; 図-3(c)). さらに F_1 の値が大きくなると波状水面が形成されなくなり典型的な跳水 (Classical jump⁶⁾) へと流況が遷移する (図-3(d)).

図-4は各流況の形成条件を示したものである. 図-4に示されるように、水路勾配 Θ が水平から限界勾配までは

- : 砕波を伴わない波状跳水 (衝撃波無し)
- : 砕波を伴わない波状跳水
- ◐ : 砕波を伴わない波状跳水
- ◑ : 砕波を伴う波状跳水
- ⊙ : 砕波を伴う波状跳水, 典型的な跳水
- ▨ (縦線) : 砕波を伴わない波状跳水 (衝撃波無し)
- ▨ (点線) : 砕波を伴わない波状跳水
- ▨ (斜線) : 砕波を伴う波状跳水, 典型的な跳水

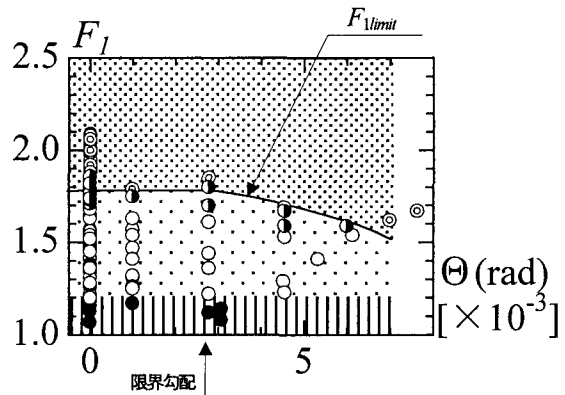


図-4 波状跳水の形成条件に対する水路勾配の影響

F_{limit} に対する水路勾配の影響が小さく、水平水路の場合⁹⁾と同様に F_{limit} の値は1.7~1.8となる. 水路勾配が限界勾配より大きくなると、 Θ が大きくなるに伴って F_{limit} の値は次第に小さくなり、 $\Theta = 1/150 (= 6.67 \times 10^{-3})$ では F_{limit} の値は1.5~1.6となった. 波状跳水の一波目は、一波目山頂部断面で水面の流速が最大となりその値が限界流速になったときに砕波する⁴⁾. この場合、流入射流のフルード数が同一でも水路勾配が大きくなるに伴って一波目山頂部の流線の曲率が大きくなり、砕波しやすくなったものと考えられる.

4. 波状跳水の諸特性に対する水路勾配の影響

波状跳水の諸特性 (一波目の波の高さおよび波長などの水面形特性・底面圧力および底面流速の内部特性) に対する水路勾配の影響について以下に説明を加える. また、従来の研究者によって理論的に提案された水面形解析法との比較を行い水面形に対する水路勾配の影響について考察を加える.

4.1 波状跳水の波の高さ・波長などの特性に対する水路勾配の影響

一波目の諸特性 (波の高さ h_{m1} ・波長 L_1 ・衝撃波始端から一波目山頂部までの水平長さ L_w ・衝撃波の角度 θ) および振幅 Δa_i および波長 L_i (図-5参照) の変化特性について以下に述べる. ここに、 i は一波目から番号を付けた数を示す.

図-6は一波目の波の高さ h_{m1}/h_1 、一波目の波長 L_1/h_2 、衝撃波始端から一波目山頂部までの水平長さ L_w/h_1 、衝撃波の角度 θ を (1) の関係で、振幅の流下方向への変化 $\Delta a/h_1$ 、波長の流下方向への変化 L/h_2 を (2) の関係で整理したものである.

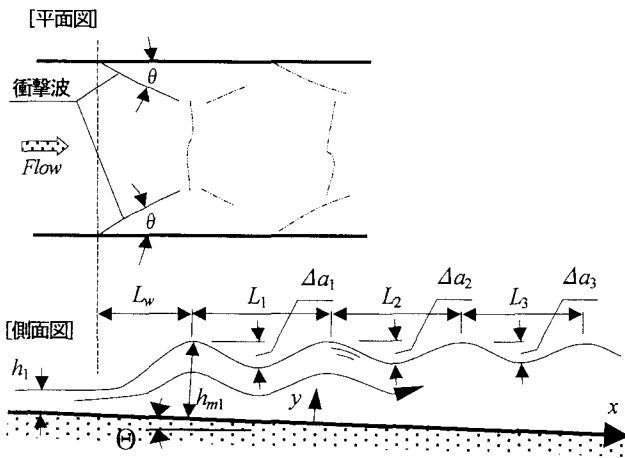


図 - 5 定義図

$$\frac{h_{m1}}{h_1}, \frac{L_1}{h_2}, \frac{L_w}{h_1}, \theta = f(F_1, \Theta) \quad (1)$$

$$\frac{\Delta a_i}{h_1}, \frac{L_i}{h_2} = f(F_1, \Theta) \quad (i=1 \sim 4) \quad (2)$$

ここに、(1) および (2) の h_2 は $h_2 = h_1((8F_1^2 + 1)^{0.5} - 1)/2$ であり、与えられた h_1 , F_1 に対する水平水路の場合の常流の対応水深である。

(1) に示される特性量は水平水路の場合、次の実験式 (3) ~ (6) によって近似される⁹⁾ (図 - 6(a), (c), (e), (f) 中実線)。

$$\frac{h_{m1}}{h_1} = 1.51F_1 - 0.35 \quad (3)$$

$$\frac{L_1}{h_2} = \frac{0.85}{F_1 - 1} + 2.75 \quad (4)$$

$$\frac{L_w}{h_1} = 1.30F_1 + 2.56 \quad (5)$$

$$\theta = 32.0F_1^{0.57} \quad (6)$$

一波目の波高 h_{m1}/h_1 および衝撃波の角度 θ については、水路勾配 Θ の影響は認められずほぼ水平水路の場合と同じ大きさとなり (3), (6) 式で示される (図 - 6(a), (f))。

一波目の波長 L_1/h_2 および衝撃波始端から一波目山頂部までの水平長さ L_w/h_1 については、水平水路の場合と急勾配水路の場合とを比べると急勾配水路の場合の方が小さな値となる (図 - 6(c), (e))。この傾向は、流入射流のフルード数 F_1 が小さい範囲で認められる。

振幅および波長については、図 - 6(b), (d) に示されるように、流下方向に進むにつれて振幅 $\Delta a/h_1$ および波長 L_i/h_2 の大きさが小さくなることが認められる。また、急勾配水路の場合、水平水路の場合と比較すると、 L_i/h_2 の大きさは Θ の影響を受け、流下方向に進むにつれて徐々に小さくなる傾向が認められる (図 - 6(d))。

4.2 従来の研究者による波状跳水の水面形解析結果との比較

Iwasa⁸⁾ は、開水路の基礎式に鉛直加速度を考慮することに

よって孤立波解とクノイド波解を導き、これら性質の異なる波を一波目山頂部で連結して波状跳水の水面形を表せるものとした。また、この理論では跳水によるエネルギー損失が跳水始端から一波目山頂部までの間で生じることを仮定している。

Andersen⁹⁾ は Boussinesq のエネルギー方程式 (7)¹⁴⁾ を逐次積分することによって水面形を示す微分方程式 (8) を誘導している。なお、(7), (8) 式は水平水路の場合のみを対象としたものである。

$$E = h + \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{3g} \left(h \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \quad (7)$$

$$\frac{dh}{dx} = \sqrt{3h_s(h^2 - h_s^2) - 2(h^3 - h_s^3) - 3(\ln h - \ln h_s)} \quad (8)$$

ここに、 E は比エネルギー、 v は任意の位置での平均流速、 x は水路床に沿った流下方向への長さ、 h_s は跳水始端での全水頭を示す。オイラーの運動方程式から水深方向の圧力分布を定め比エネルギー E を計算すると (9) 式が得られる。すなわち、(7) 式は (9) 式の右辺第 4 項を無視したものとなる。

$$E = h + \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{3g} \left(h \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{v^2}{6g} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \quad (9)$$

また、Andersen は水面形を計算するプロセスにおいて、跳水始端から一波目山頂部までの間で跳水によるエネルギー損失が全て生じるものと仮定している。なお、(8) 式は右辺の平方根の中が負になると計算が続けられなくなるので山と谷で計算結果を連結して水面形を表す必要がある。

Zienkiewicz and Sandover¹⁰⁾ は Serre によって誘導された基礎式に底面の摩擦を考慮して波状水面を表すことを試みた。この計算では水路床が水平であっても水面形の凹凸の平均水深が流下方向に増加するなど実際とは異なった結果を示す。

Grillhofer and Schneider は、水路勾配 Θ が限界勾配より大きい二次元水路で形成される波状跳水を対象に摂動法を用いて基礎方程式から理論的に 3 階常微分方程式 (10) を導き、波状跳水の水面形状を示せるものとした (詳細は補足を参照)。

$$\frac{d^3 H_1}{dX^3} - \left[6 \frac{K}{\gamma^2} - \frac{9}{\gamma^2} H_1 \right] \frac{dH_1}{dX} - \frac{9}{\gamma^2} \beta H_1 = 0 \quad \left(\beta = \frac{\Theta}{\gamma} \varepsilon^{-3/2} \right) \quad (10)$$

ここに、 H_1 は水深を示す無次元変数、 X は流下方向の長さを示す無次元変数、 K および γ は定数、 ε は摂動核を示す。Grillhofer and Schneider による理論は急勾配水路を対象とはしているものの、(10) 式による波の高さおよび振幅の計算値は広範囲な流入射流のフルード数のもとではほぼ実験値と近い値となる。また、水面形は (10) 式に F_1 , Θ , K および γ を初期条件として与え連続的に数値積分することによって容易に計算される。

一波目の波の高さ h_{m1}/h_1 および一波目の波長 L_1/h_2 について、図 - 6(a), (c) 中には Iwasa⁸⁾ および Andersen⁹⁾ の理論

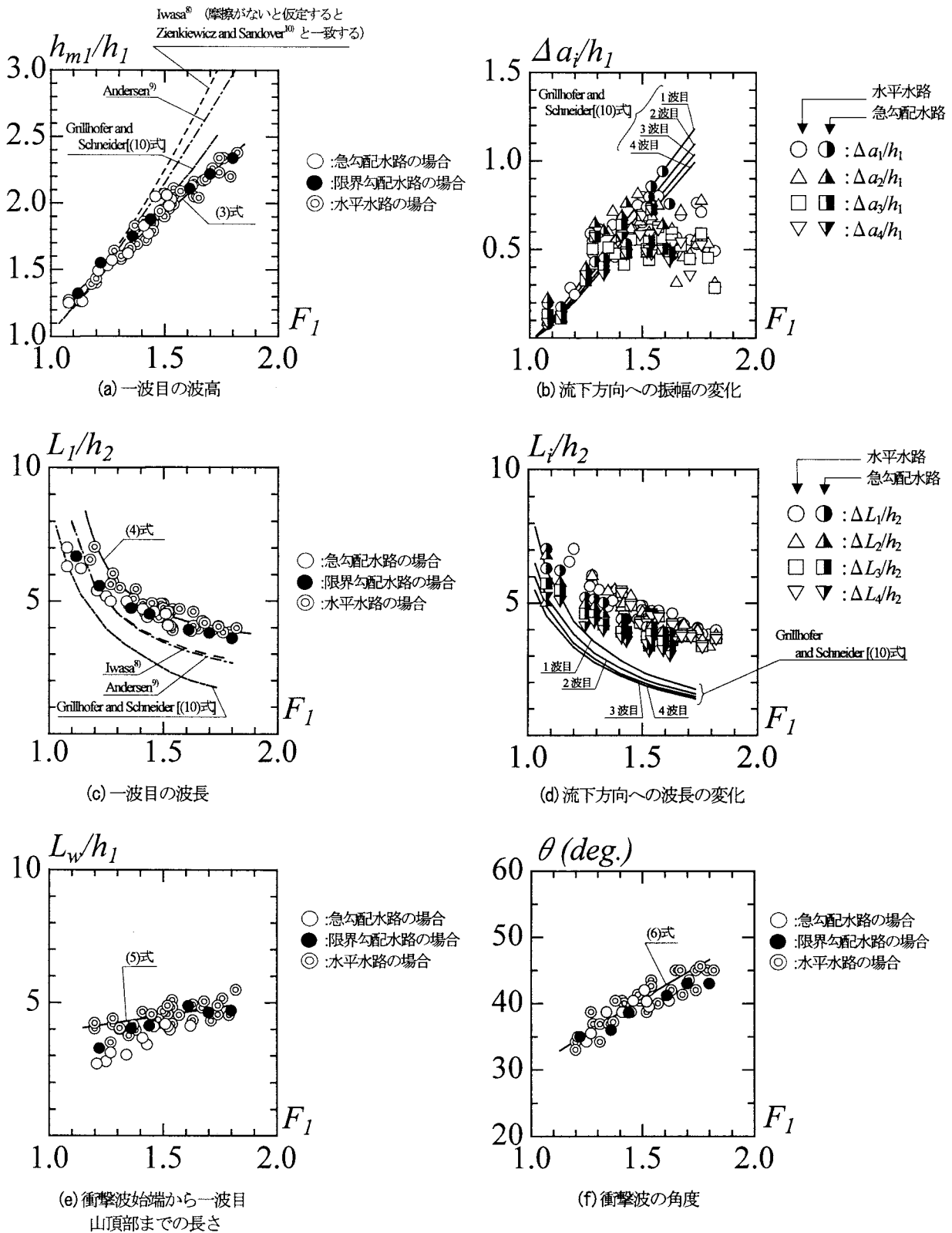


図-6 特性量に対する水路勾配の影響

による計算結果を破線および一点鎖線で示す。また、(10)式を数値積分して得られた結果と実験によって得られた結果との比較を図-6(a), (c)に示す。なお、(10)式を計算する上では K および γ について $K=1.5$, $\gamma=3$ を用いた¹³⁾。また、 Θ および F_1 については、実験で与えた Θ ($\Theta=1/80\sim$

$1/330$)とそれに対応して実験で得られた F_1 を代入し計算した。

図-6(a)に示されるように、一波目の波高 h_{m1}/h_1 については、IwasaおよびAndersenらの理論による計算結果は F_1 が1.2~1.3以上の範囲で実験値より大きな値を示す傾向にあ

るが, Grillhofer and Schneider による計算結果は波状跳水が形成されている範囲で実験値とほぼ一致している. 図-6(c)に示されるように, 波長 L_1/h_2 については, Iwasa および Andersen の理論では F_1 が 1.2~1.3 よりも小さい範囲で計

算値は実験値より大きな値を示し, F_1 が 1.2~1.3 より大きくなると計算値は実験値よりも小さな値を示す. Grillhofer and Schneider による計算は F_1 が 1.2 よりも小さい範囲で計算値は実験値に近い値を示す.

$F_1=1.2$ を対象に水路勾配 Θ を変化させて一波目の波の高さ h_{m1}/h_1 および一波目の波長 L_1/h_2 を (10) 式によって計算した結果を図-7に示す. 図-7に示されるように水路勾配 Θ が大きくなるにつれて h_{m1}/h_1 はほとんど変化しないが L_1/h_2 は小さくなる. 図-6(a), (c)に示される実験結果と同様な傾向が理論から得られている.

図-6(b), (d)中に(10)式による計算結果を実線で示す. 図-6(b)に示されるように, 振幅 $\Delta a/h_1$ については $1 < F_1 < 1.5$ ではほぼ一致している. 一方, 波長 L_1/h_2 については F_1 が 1.2 よりも小さい範囲で実験値は (10) 式による計算値に近い値を示す. なお, Iwasa や Andersen の理論からは振幅および波長が流下方向に進むにつれて変化する結果を表すことはできない.

図-8は, $F_1=1.2$ を対象に波長に対する水路勾配 Θ の影響を (10) 式から計算して示した一例である. 図-8に示されるように水路勾配 Θ が大きいほど波長 L_1/h_2 の大きさが小さくなる傾向が計算結果から得られ, 図-6(d)に示す実験結果と同様な傾向を示す.

4.3 波状跳水の水面形および底面流速・底面圧力に対する水路勾配の影響

図-9は水平水路の場合と急勾配水路の場合とにおける水路中央面での底面圧力・底面流速および水面形の変化を示した一例である. 図中, ρ は水の密度, x は衝撃波始端から水路床に沿った流下方向への距離を示す.

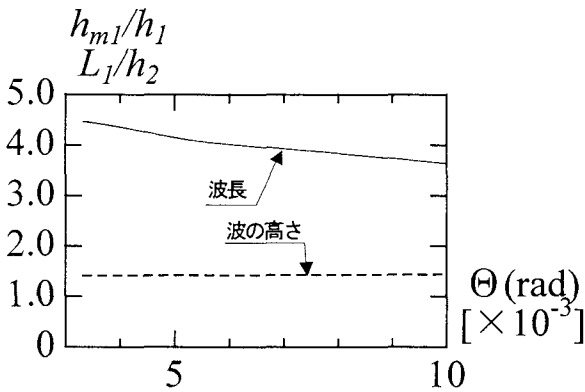


図-7 波の高さおよび波長に対する水路勾配の影響 ($F_1=1.20$ の場合の計算結果)

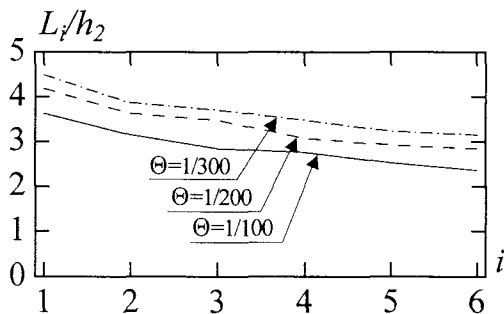
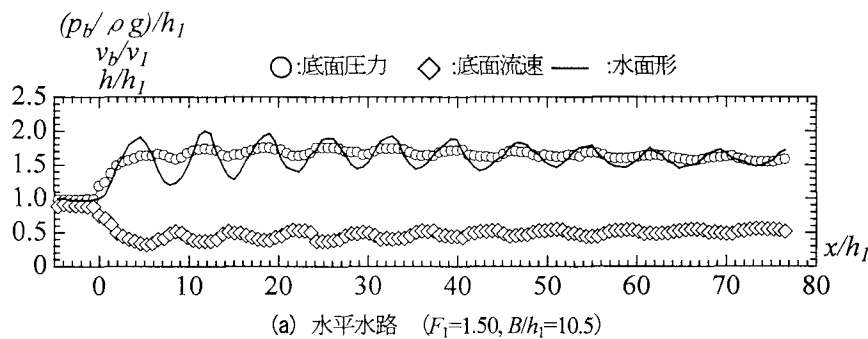
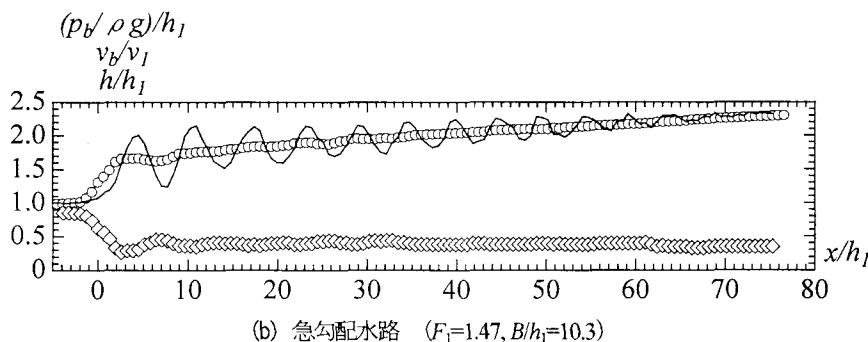


図-8 波長に対する水路勾配の影響 ($F_1=1.20$ の場合の計算結果)



(a) 水平水路 ($F_1=1.50, B/h_1=10.5$)



(b) 急勾配水路 ($F_1=1.47, B/h_1=10.3$)

図-9 波状跳水の水面形および圧力・底面流速の流下方向への変化

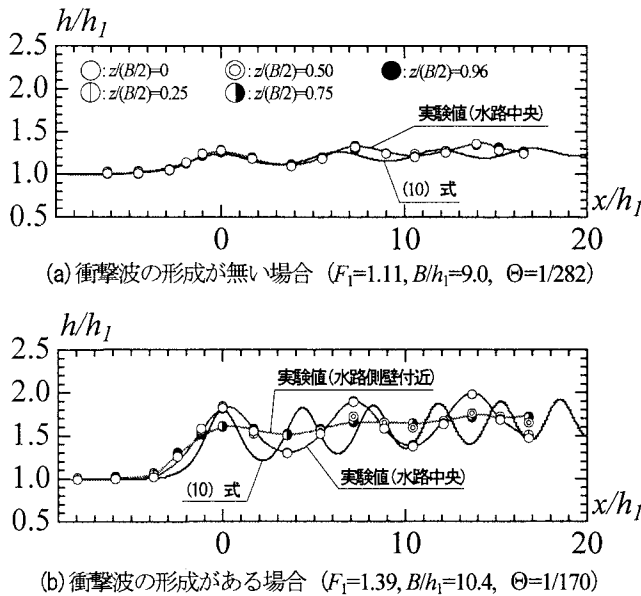


図-10 水路横断方向への水面形の変化

図-9(a)に示されるように、この実験の範囲では、水平水路の場合、底面流速・底面圧力水頭ともに流下方向に対し凹凸が認められる。また、底面圧力水頭の大きさは流下方向に小さくなる。急勾配水路の場合、底面圧力水頭は流下方向に対して大きくなる(図-9(b))。また、図-9(b)に示されるように、2~3波目より下流側では底面流速、底面圧力水頭は流下方向に凹凸を繰り返さない。さらに、急勾配水路の場合、水平水路の場合に比べて一波目前面における静水圧からの反れ(dynamical pressure)⁹⁾が大きい。これは、図-6に示されるように、同一のフルード数 F_1 に対して急勾配水路の場合の方が水平水路の場合に比べて波長が短くなり一波目前面での流線の曲がりが大きくなったためと考えられる。

図-10は、衝撃波が形成されていない場合($F_1 \leq 1.2$)の水面形と衝撃波が形成されている場合($F_1 > 1.2$)の水面形とを比較した一例である(x :一波目山頂部から水路床に沿った流下方向の長さ, z :水路中央部から水路横断方向への水平長さ)。

図-10(a)に示されるように衝撃波が形成されていない場合、水路横断方向に対する水深の変化は小さい。一方、図-10(b)に示されるように衝撃波が形成されている場合、衝撃波の影響により衝撃波下流側の水路側壁付近では水路中央で見られる波状水面は形成されない。このような衝撃波の形成はGrillhofer and Schneiderの計算には含まれていないため、 F_1 の値が1.2よりも大きくなると波長の計算結果と実験結果とに違いが生じてくるものと考えられる。

5. 結論

本研究では波状跳水の流況特性に対する水路幅(アスペクト比)および粘性(レイノルズ数)の影響が認められな

い条件のもとで、跳水始端で乱流境界層が十分発達した波状跳水を対象にその流況特性に対する水路勾配の影響について実験的に検討を行った。得られた結果をまとめると以下のように要約される。

- (1) 流入射流のフルード数および水路勾配による波状跳水の流況の変化を明らかにした。
- (2) 水路勾配が限界勾配より大きくなると Nonbreaking undular jump が形成されるフルード数の上限値 F_{1lim} の値は水路勾配が大きくなるにつれて小さくなることを示した。
- (3) 一波目の波の高さ、衝撃波の角度は水路勾配にほとんどよらず、水平水路の場合に提案した(3)、(6)式で示される。また、一波目の波長および衝撃波始端から一波目山頂部までの水平長さは、急勾配水路の場合、水平水路の場合と比べて短くなることを示した。さらに、波長は急勾配水路の場合、流下方向に進むにつれて短くなる傾向が水平水路の場合に比べ顕著に表れることを示した。
- (4) 波状跳水内の底面流速および底面圧力の流下方向への変化から、水平水路の場合と急勾配水路の場合との違いを明確に示した。
- (5) Grillhofer and Schneider によって導かれた理論による波の高さについては波状跳水が形成されている全範囲で、振幅については流入射流のフルード数の値が1~1.5の範囲で実験値をほぼ満足することを示した。

補足. Grillhofer and Schneider による水面形解析法

水路勾配 Θ を有する急勾配開水路における二次元の波状跳水を対象としている。また、流入射流は乱流境界層が十分発達した等流としている(図-1参照)。波状跳水の水面形を解析するための基礎式としてレイノルズ方程式(11)、連続の式(12)、境界条件として水面における運動学的および力学的境界条件(13)~(15)式、底面における運動学的境界条件(16)式を用いている。なお、以下に示す(11b)~(16)式は(17)に示す量で全て無次元表示されている。

[レイノルズ方程式]

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + g \sin \Theta - \left(\frac{\partial \bar{u}' u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - g \cos \Theta - \left(\frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}' v'}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (11a)$$

((11a)式の無次元表示)

$$\begin{aligned} F_1^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \frac{\Theta}{\delta} - \frac{\Theta}{\delta} \left(\delta \frac{\partial \bar{U}' U'}{\partial X} + \frac{\partial \bar{U}' V'}{\partial Y} \right) \\ \delta^2 F_1^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - 1 - \Theta \left(\delta \frac{\partial \bar{U}' V'}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}' V'}{\partial Y} \right) \end{aligned} \quad (11b)^*$$

※ここでは $\sin \Theta = \Theta$ (rad), $\cos \Theta = 1$ と近似している。この近似に関しては今後、検討する必要がある。

[連続の式]

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0 \quad (12)$$

[力学的境界条件(水面)]

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P}(X, \bar{H}) + \Theta \bar{U}' \bar{U}'(X, \bar{H}) \right] \left(-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} \right) + \Theta \bar{U}' \bar{V}'(X, \bar{H}) = 0 \\ & \left[\bar{P}(X, \bar{H}) + \Theta \bar{V}' \bar{V}'(X, \bar{H}) \right] + \Theta \bar{U}' \bar{V}'(X, \bar{H}) \left(-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)^*$$

※ (13) 式は水面での圧力が大気圧に等しくせん断応力が0であることを意味している。

[運動学的境界条件]

$$\begin{aligned} & (\bar{V}(X, \bar{H})) = \bar{U}(X, \bar{H}) \frac{d\bar{H}}{dX} \quad (14) \\ & \bar{U}(X, \bar{H}) = \frac{\sqrt{\Theta} U_\tau}{F_1} \left[\frac{1}{\kappa} \ln(Re_\tau U_\tau \bar{H}) + C(X) \right] \quad (15) \\ & (\bar{V}(X, 0)) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

[無次元量]

$$\begin{aligned} X = \delta \frac{x}{h_1}, Y = \frac{y}{h_1}, \bar{H} = \frac{\bar{h}}{h_1}, \bar{U} = \frac{\bar{u}}{V_1}, \bar{V} = \frac{\bar{v}}{\delta V_1}, U_\tau = \frac{u_\tau}{u_{\tau 1}} \\ \bar{U}' \bar{U}' = \frac{u' u'}{u_{\tau 1}^2}, \bar{V}' \bar{V}' = \frac{v' v'}{u_{\tau 1}^2}, \bar{U}' \bar{V}' = \frac{u' v'}{u_{\tau 1}^2}, \bar{P} = \frac{p}{\rho g h_1}, Re_\tau = \frac{u_{\tau 1} h_1}{\nu} \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 x は水路床に沿った流下方向の長さ、 y は水路床に直な方向の長さ、 $u \cdot v$ は $x \cdot y$ 方向の流速成分、 $u_{\tau 1}$ は流入射流における摩擦速度、 u_τ は $x=x$ における摩擦速度、 $u' \cdot v'$ は $x \cdot y$ 方向の変動流速成分、 h は $x=x$ における水深、 p は圧力、 δ は流下方向の長ささと水深方向の長さを補正するための変数、 κ はカルマン定数であり、各変数の $\bar{\quad}$ は時間平均量を意味する。

ε を摂動核として導入し、基礎式における変数全てを (18) 式のように展開する。

$$\begin{aligned} \bar{H}(X) &= H_0 + \varepsilon H_1(X) + \varepsilon^2 H_2(X) \\ \bar{U}(X, Y) &= U_0 + \varepsilon U_1(X, Y) + \varepsilon^2 U_2(X, Y) \\ \bar{V}(X, Y) &= V_0 + \varepsilon V_1(X, Y) + \varepsilon^2 V_2(X, Y) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (18)$$

なお、(18) 式中の $H_0, H_1, H_2, U_0, U_1, U_2$ などは水深 \bar{H} 、 x 方向の流速 \bar{U} などを表す無次元変数であり、 $\varepsilon = 0$ の場合、等流状態を表すものとする。また、(18) 式において ε の 3 次オーダー以上の項は微小項として無視している。

次に、流入射流のフルード数 F_1 および水路勾配 Θ 、流下方向の長ささと水深方向の長さを補正するための係数 δ を ε と関連付けて次のように表すものとする。

$$F_1 = 1 + K\varepsilon, \quad \Theta = A\varepsilon^2, \quad \delta = \gamma\sqrt{\varepsilon} \quad (19)$$

ここに、 K, A, γ は定数である。なお、 K と γ について Grillhofer and Schneider は式変形の簡便性から $K=1.5, \gamma=3$ としている。また、 A については具体的な数値を定めていない。

初期条件は流入射流が等流であることより次のように与える。

$$H_0 = 1, U_0 = 1, V_0 = 0, P_0 = 1 - Y, \bar{U}' \bar{V}' = Y - 1 \quad (20)$$

(11b) ~ (16) 式に (18) ~ (20) 式を代入し整理すると、次の 3 階常微分方程式 (10) 式が得られる。

$$\frac{d^3 H_1}{dX^3} - \left[6 \frac{K}{\gamma^2} - \frac{9}{\gamma^2} H_1 \right] \frac{dH_1}{dX} - \frac{9}{\gamma^2} \beta H_1 = 0 \quad \left(\beta = \frac{\Theta}{\gamma} \varepsilon^{-3/2} \right) \quad (10)$$

波状跳水の水面形は (10) 式に初期条件として流入射流のフルード数 F_1 、水路勾配 Θ 、 K および γ を与えて数値積分することによって計算することができる。

参考文献

- 1) Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Gotoh, H., Characteristics of undular jumps in rectangular channels, *Proc. of the 26th IAHR Congress*, IAHR, 1C14, London, UK, 1995.
- 2) 後藤, 安田, 大津, 波状跳水の形成条件に対するレイノルズ数・アスペクト比の影響, *水工学論文集*, 土木学会, 第 43 巻, pp.299~304, 1998.
- 3) 後藤, 安田, 大津, 波状跳水の流況特性, *水工学論文集*, 土木学会, 第 45 巻, pp.439~444, 2001.
- 4) Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Hydraulic conditions for undular-jump formations, *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 39(2), pp.203~209, 2001.
- 5) Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Reply to the discussion of "Hydraulic conditions for undular-jump formations" by Chanson, H., *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 40(3), pp.382~384, 2002.
- 6) Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H., Flow conditions of undular hydraulic jumps in horizontal rectangular channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 129 (12), pp.948~955, 2003.
- 7) 後藤, 安田, 大津, 台形断面水路における波状跳水の流況特性, *水工学論文集*, 土木学会, 第 47 巻, pp.493~498, 2003.
- 8) Iwasa, Y., Undular jump and its limiting condition for existence, *Proc. of the 5th Japan National Congress for Applied Mech.*, pp.315~319, 1955.
- 9) Andersen, V. M., Undular hydraulic jump, *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of ASCE*, ASCE, 104 (HY8), pp.1185~1188, 1978.
- 10) Zienkiewicz, O. C. and Sandover, J. A., The undular surge wave, *Proc. of the 7th IAHR Congress*, IAHR, D25-1~12, 1957.
- 11) Sandover, J. A. and Taylor, C., Cnoidal waves and Bores, *La Houille Blanche*, No.3, Juillet-Aout, pp.69~82, 1962.
- 12) Hager W.H. and Hutter, K., On pseudo uniform flow in open channel hydraulics, *Acta Mechanica*, Springer, 53, pp.183~200, 1984.
- 13) Grillhofer, W. and Schneider, W., The undular hydraulic jump in turbulent open channel flow at large Reynolds numbers, *Physics of Fluids*, AIP, 15(3), pp.730~735, 2003.
- 14) Montes, J.S., Discussion of "Undular hydraulic jump", *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of ASCE*, ASCE, 105(HY9), pp.948~955, 1979.

(2004 年 4 月 16 日 受付)