

Smoothed Particle Hydrodynamics 法による粒状地盤の浸透破壊解析手法の開発

Development of seepage failure analysis procedure of granular ground
with Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method

前田健一*, 坂井守**

Kenichi MAEDA, Mamoru SAKAI

*工博, 名古屋工業大学助教授, 工学部都市社会工学科 (〒466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町)

** 名古屋工業大学大学院工学研究科社会工学専攻 (〒466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町)

Seepage failure, flowage deformation and hydraulic fracture play an important role on damage of dyke under flood, large flow of ground caused by liquefaction and improvement effects in ground improvement with injection and/or penetration. These problems must be solved with interaction among three phases: solid (soil), liquid (water) and gas (air). Discrete analysis (i.e. DEM) is adapted to abruption, failure and flowage, but unsuitable procedure to analysis domain of large scale. Continuum analysis has opposite properties to that. In this paper, there is an attempt to develop the procedure which fuses discrete and continuum analyses by using 'Smoothing Particle Hydrodynamics (SPH)' with account for the interaction among three phases.

Key Words: seepage failure, SPH, granular ground, mixture phases

1. はじめに

洪水時の堤防の不安定化や液状化に起因する地盤の流動化などの地盤災害, 注入や打設などを伴う地盤改良のメカニズムにおいては, 地盤内の浸透に伴う大変形や破壊が重要な役割を担っている. このような現象を解析でより正確に再現するためには, 地盤内の進行的な浸透破壊を表現する必要がある. また, いくつかの模型実験から土の固体と液体・気体の流体との三相の相互作用が重要な役割を果たしていることが報告されている^{1,3)}. さらに, 地盤の浸透破壊挙動に及ぼす土の不飽和度⁴⁾や間隙水の溶存酸素の過飽和度の影響は大きく, 地盤内に発生する気泡が地盤を劣化させることは重要な課題である^{1,3)}.

一方, 大変形を伴う破壊解析には離散的手法が有用であるが, 例えば個別要素法 (DEM) などの離散的手法では粒子レベルからのモデル化となり解析領域の大きな問題には不向きである. 連続体的手法が実用上有益となるが, 通常の有限要素法 (FEM) などでは流動的大変形, 亀裂, 剥離, 相変化や複雑な異なる相間の界面の発生や移動を解析することは困難である.

そこで, 本研究では, 土・水・空気の三相相互作用を考慮した浸透破壊解析法の提案を目標に新たな解析手法の開発を試みた. まず, 完全なメッシュフリー解析法の一つである Smoothed Particle Hydrodynamics (以下 SPH と略す) 法を用いて離散的手法 (Discrete な手法) と連続体的手法

の両者の特徴を生かした手法の開発に取り組んでいる. SPH 法は, 偏微分方程式を差分化する際にメッシュの変わりに運動する計算粒子素片を用いる Lagrangian 的手法である. この手法は初め Lucy⁵⁾や Monaghan⁶⁾によって宇宙物理の分野で星雲の運行を解くために開発された⁷⁾. その後, 粘性流れや固体の破壊へと応用されている^{8,14)}. 本論文では SPH 法において, 多相間における密度の新たな算定方法を提案するとともに, 固体-流体相間での相互作用の算定方法に工夫を施すことで地盤の浸透解析を表現することを試みた. また, 極簡単な模型実験と解析で観察された現象の定性的比較も行った. 本論文では2次元解析のみとする.

2. 解析手法

本論文では, 固体相, 液体相, 気体相の相互作用を考慮することを試みる. 本節では二次元浸透破壊を表現するために必要な連続の式と運動方程式の連続体表記と SPH 法表記, そして解析の実行方法について説明する. また応力・ひずみはすべて圧縮を正とする.

2.1 SPH 法による物理量の表現方法の概略

個別要素法 (DEM) は個々の実際の粒子に着目してそれらの運動方程式を時間差分によって解くために, 大きな解析領域を対象とする際には膨大な粒子数を必要とする. 本

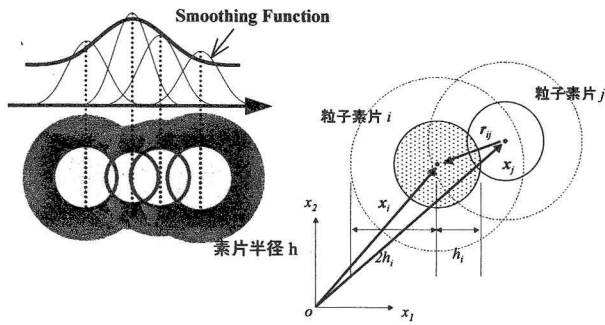


図-1 SPH 法による平均化関数 (Smoothing Function) を用いた物理量の表現

論文で用いる SPH 法では実際の粒子レベルからのモデル化ではなく、図-1 に示すような実粒子の集合体で円形 (半径 h) の連続体素片である計算粒子素片 (以後、粒子素片と呼ぶ) に着目する。解析領域は粒子素片の重なり合いによって表現され、粒子素片に対して運動方程式を時間差分で解く。例えば、土における粒子素片は土粒子個々ではなく土塊であり、水については水分子ではなく水の塊を意味する。したがって、多くの粒子からなる系の解析が DEM に比べるとはるかに容易に実行できる。さらに粒子素片は Lagrange 的に扱うので粒子素片同士のすべり、剥離、多相系の混合問題や相互作用問題などの離散的 (Discrete) な挙動の表現が可能となる。また、粒子素片の運動は、周辺の粒子素片から受ける応力の勾配によって支配される。粒子素片の応力ひずみは、通常の連続体解析と同様の状態方程式や構成式を取り込むことで算出される。これらの特徴から SPH 法は Discrete な解析と連続体解析を融合させた解析手法といえる。

先述したように、SPH 法では着目する相は複数の素片が集合し互いに重なりあうことで記述する。位置ベクトルで表される任意の点 $\mathbf{x}$ における物理量 $f(\mathbf{x})$ の空間平均値 $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ は、影響範囲内 (本論文では粒子素片の半径 h の 2 倍: $2h$) にある粒子素片 $\mathbf{x}'$ の物理量 $f(\mathbf{x}')$ を平均化関数 W (Smoothing Function または Kernel) によって内挿することで以下のように表される (図-1,2 参照)。

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}) \rangle &= \int f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &= \int f(\mathbf{x}') W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ である。平均化関数 W についてはその定義から次式が成り立つ。

$$1 = \int W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{x}' \quad (2)$$

また、 $h \rightarrow 0$ のとき $\langle f(\mathbf{x}) \rangle \rightarrow f(\mathbf{x})$ である。位置 $\mathbf{x}$ における密度を $\rho(\mathbf{x})$ とすると式(1)は以下のように書き換えられる。

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int [f(\mathbf{x}') / \rho(\mathbf{x}')] W(\mathbf{r}, h) \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3)$$

この関数の空間による微分は以下のように書くことができる。

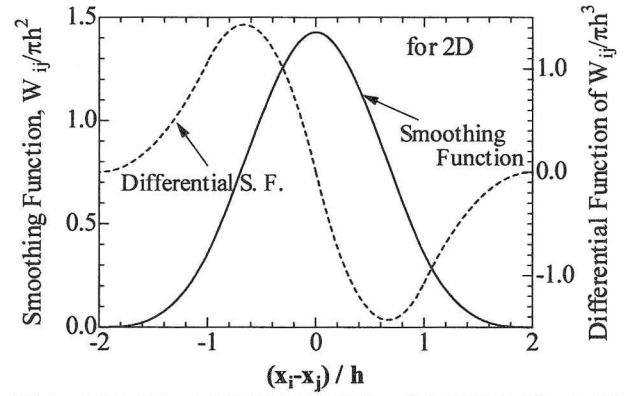


図-2 SPH 法による計算粒子素片の幾何特性と用いた平均化関数 (Smoothing Function) の特性

$$\nabla \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int [f(\mathbf{x}') / \rho(\mathbf{x}')] \nabla W(\mathbf{r}, h) \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (4)$$

ここで、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)^T$ は微分演算子 gradient である。

つぎに、式(3)を有限な粒子素片で離散化する。粒子素片 i の中心位置、質量と密度をそれぞれ $\mathbf{x}_i$ 、 m_i 、 ρ_i とする。また、粒子素片 i と粒子素片 j の中心間ベクトルを $\mathbf{r}_{ij}$ とする。式(3),(4)から、 $f_i = \langle f(\mathbf{x}_i) \rangle$ 、 $\nabla f_i = \nabla \langle f(\mathbf{x}_i) \rangle$ は以下のように近似することができる。

$$f_i = \langle f(\mathbf{x}_i) \rangle \cong \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} W_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (5)$$

$$\nabla f_i = \nabla \langle f(\mathbf{x}_i) \rangle \cong \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} \nabla W_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (6)$$

ここで、 N は解析領域内の粒子素片数である。実際には次式で表されるように、粒子素片 j の平均化関数 W の影響範囲内に中心を有する粒子素片の数となる。

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = |\mathbf{r}_{ij}| \leq 2\bar{h}_{ij}, \quad \bar{h}_{ij} = (h_i + h_j)/2 \quad (7)$$

SPH 法では粒子素片 i が持つ物理量 $f_i = f(\mathbf{x}_i)$ は粒子素片の中心と共に移動する。

また、平均化関数 W として Gauss 分布を始めとして数種の関数が提案されている⁸⁾。Gauss 分布の場合には影響範囲が無限遠まで及ぶために計算効率を考えると必ずしも使い易くない。そこで、本論文では関数が滑らかでかつ影響範囲が大きくならないことを考慮して、平均化関数 W として以下の三次の B-Spline 関数を用いた。ただし、 $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ 、 $S = r_{ij} / \bar{h}_{ij}$ とする。

$$W_{ij} = \alpha_d \times \begin{cases} \frac{2}{3} - S^2 + \frac{1}{2} S^3 & 0 \leq S < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - S)^3 & 1 \leq S \leq 2 \\ 0 & 2 < S \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 α_d は式(2)をみたすように決定される係数で、1、

2, 3次元ではそれぞれ $1/h$, $15/7\pi h^2$, $3/2\pi h^3$ なる。
2次元の場合について、平均化関数とその1階微分を図-2に示す（ただし、 $h_i = h_j = h$ として図示した）。

2.2 連続の式および運動方程式の連続体表記

(1) 連続の式

一般的に相の密度と速度ベクトルを ρ , $\mathbf{v}$ とすると連続の式は以下のようにかける。

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = -\rho D, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = D \quad (\text{divergence}) \quad (9)$$

ここで、 $\cdot$ は内積を意味する。

(2) 運動方程式

物質内の着目した点とともに移動する観測点からみた場合、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$, 体積力ベクトル $\mathbf{f}$ を用いると運動方程式は一般に以下ようになる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (10)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ の等方圧縮応力成分（平均主応力）、偏差応力成分をそれぞれ p , $\boldsymbol{\tau}$ とすると、

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

と表せる。ここで、

$$p = (\sigma_{yy} + \sigma_{xx})/2 \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} -(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

である。非粘性流体の場合 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ であるから、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (15)$$

となる。一方、粘性が考慮された流体の Navier-Stokes の方程式は次式のようになる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad \nu = \mu/\rho \quad (16)$$

ただし、 μ と ν は静粘性係数と動粘性係数である。

(3) ひずみ速度および回転速度

つぎに、ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は次式で定義される。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{2} \left\{ \nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right\} \quad (17)$$

ここで、 $\otimes$ はダイアド積、添え字の T は転値を意味する。特にせん断ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$ は以下のように表される。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (18)$$

回転速度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \left\{ \nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right\} \quad (19)$$

となる。

2.3 連続の式および運動方程式の SPH 表記

(1) 連続の式： 多相系の場合の密度算定式の提案

SPH 法では Lagrange 的計算アルゴリズムであるので系に存在する粒子素片の質量の総和が増減しない限り系の連続条件は満たされることになる。ここでは粒子素片の密度の算定方法について記述する。本論文では、密度や構成モデルが大きく異なる物質が混じった問題においても連続条件が満たされるように密度の算定方法に工夫を施した。従来の方法の概説と工夫した点を以下に記述する。

まず、粒子素片 i の密度 ρ_i は、式(3)の関数 f_i を ρ_i に置き換えることですぐに計算できる。

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W_{ij} = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (20)$$

また、式(9)の SPH 表記について誘導する。まず、

$$\begin{aligned} \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \\ &\equiv \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v} \cdot \nabla \langle \rho \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

であるから式(21)を式(9)に代入すると、粒子素片 i (x_i , y_i) の連続の式は、 $\nabla_i = (\partial/\partial x_i, \partial/\partial y_i)^T$ とすると、

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -[\nabla_i \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i \langle \rho \rangle] \quad (22)$$

となる。さらに、式(6)を用いると、

$$\nabla_i \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j \cdot \nabla W_{ij} \quad (23)$$

$$\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i \langle \rho \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_i \cdot \nabla W_{ij} \quad (24)$$

式(23), (24)を式(22)に代入すると連続の式の微分形は、

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここで、 $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, ∇_i は粒子素片 i の座標(x_i , y_i)に関する微分演算子 gradient である。

ここで、式(20)を用いた場合、自由境界面付近に位置する粒子素片や浮遊する粒子素片については周辺に位置する素片が少なくなるために、密度は低く算定されるという

問題が生じる。微分形である式(25)を用いた場合にはこの問題を避けることができる。一方、次式のように平均化関数の足し算による正規化を行うことで式(20)の形式であっても上記の問題を回避できる¹⁵⁾。

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \left(\frac{m_j}{\rho_j} \right) W_{ij}} \quad (26)$$

しかし、多相系の問題を解く場合には、異なる物質間の境界付近では密度の算定方法においてさらに改良が必要である。というのは、状態方程式が異なり密度も大きくことなる物質間の境界面付近では式(26)を用いても境界付近で算定される密度に大きな誤差が生じるからである。例えば、水中に空気的气泡が存在することを考えた場合、水と空気とは状態方程式も異なり、密度は約1000倍も異なる。したがって、気泡との境界面近くでは水の密度を過小評価し、水との境界面付近にある空気領域では過大評価することになる。この場合、過大・過小評価された密度から算定される圧力は過度に大きな値や負圧を生じさせるために計算は破綻する。この問題は式(20)、(25)、(26)のいずれをそのまま用いても避けることができない。

そこで、本論文では、式(26)を用いる際に同じ物質内の粒子素片についてのみ Σ を実行することで上記の問題を解決することを試みた。Landrini¹⁶⁾らは同様の Σ の考え方を式(20)に応用しているがその場合には上述したように境界面付近の密度を低く算定してしまうことになる。したがって、物質 *a* (Material *a*) と物質 *b* (Material *b*) の粒子素片の密度を算定する場合には次式のようにそれぞれ同じ物質についてのみ Σ をとることとする。

$$\rho_{i \in \text{Material } a} = \frac{\sum_{j=1 \in \text{Material } a}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1 \in \text{Material } a}^N \left(\frac{m_j}{\rho_j} \right) W_{ij}} \quad \text{for Material } a \quad (27)$$

$$\rho_{i \in \text{Material } b} = \frac{\sum_{j=1 \in \text{Material } b}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1 \in \text{Material } b}^N \left(\frac{m_j}{\rho_j} \right) W_{ij}} \quad \text{for Material } b$$

上式によって密度が大きく異なる物質間境界面付近においても高い精度で容易に密度を算定が可能である。今後、式(25)の様な増分形式の表記についても考察するとともに、より強い不連続な密度分布を有する場合においても簡単に精度よく求める方法について検討を進めたい。

(2) 運動方程式

まず、粒子素片 *i* について運動方程式の式(15)の SPH 表記を説明する。

粒子素片 *i* の運動を求めるためには $1/\rho \nabla p$ を算出する必要がある。以下にその誘導過程を示す。

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho$$

$$\cong \nabla \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle + \frac{p}{\rho^2} \nabla \langle \rho \rangle \quad (28)$$

式(28)を式(15)に代入すると粒子素片 *i* の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla_i \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle + \frac{p_i}{\rho_i^2} \nabla_i \langle \rho \rangle + \mathbf{f}_i \quad (29)$$

となる。さらに、式(6)を用いると、

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \cong \nabla_i \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{p_j}{\rho_j^2} \nabla W_{ij} \quad (30)$$

$$\nabla \rho \cong \nabla_i \langle \rho \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \nabla W_{ij} \quad (31)$$

式(30)、(31)を式(29)に代入すると粒子素片 *i* の運動方程式の SPH 表記は次式のようになる。

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W_{ij} + \mathbf{f}_i \quad (32)$$

同様に、式(10)は以下のように SPH 表記される。

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_j}{\rho_j^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{\rho_i^2} \right) \cdot \nabla W_{ij} + \mathbf{f}_i \quad (33)$$

また、流体の粘性項および固体の人工粘性をそれぞれ Morris¹⁰⁾ と Monaghan-Gingold¹²⁾ の方法を用いると式(32)、(33)は式(34)、(35)のようになる。

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W_{ij} + \sum_j \frac{m_j (\mu_i + \mu_j) \mathbf{v}_{ij}}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} \right) + \mathbf{f}_i \quad (34)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_j}{\rho_j^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{\rho_i^2} + \Pi_{ij} \mathbf{I} \right) \cdot \nabla W_{ij} + \mathbf{f}_i \quad (35)$$

ここで、

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \text{if } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

$$\mu_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2 + \varepsilon_{AF} h^2}, \quad (\text{本論文では } \varepsilon_{AF} = 0.1 \text{ とした}^9))$$

$$\bar{c}_{ij} = (c_i + c_j)/2, \quad \bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$$

であり、 c_i は粒子素片*i*の物質を伝播する圧縮波の速度である。式(35)中の Π_{ij} は粒子素片*i, j*が接近する場合 ($\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0$) に作用させる人工粘性圧力であり、粒子素片同士の衝突時の貫入を緩和させる仮想ダンパーの役割をもつ (ε_{AF} は発散防止の係数である)。また、参考文献^{14),15)}に習って $\alpha=0.001$, $\beta=0.0$ とした。地盤材料にこの値が適切かどうかさらに今後の検討が必要とおもわれる。

また、粒子素片*i*のひずみ速度テンソル $\dot{\mathbf{e}}$ (式(17))と回転速度テンソル $\mathbf{w}$ (式(19))はそれぞれ、

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \otimes \nabla_i W_{ij} + \left(\frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \otimes \nabla_i W_{ij} \right)^T \right] \quad (37),$$

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \otimes \nabla_i W_{ij} - \left(\frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \otimes \nabla_i W_{ij} \right)^T \right] \quad (38)$$

となる。

2.4 流体の状態方程式および固体の構成モデル

本項では本論文で用いた流体の状態方程式と固体相である土の部分の構成モデルについて説明する。

(1) 流体の状態方程式

流体の初期の圧力、現在の圧力、初期の圧力の変動分をそれぞれ p_0 , p , p_d とする。また、体積圧縮係数を B とする。まず、気体相の状態方程式は以下のようにする¹⁷⁾。

$$p_d \equiv p - p_0 = B \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad \text{for gas} \quad (39)$$

ここで、体積圧縮係数 B は次式のように圧力によって決定される。

$$B = \gamma_{\text{gas}} \cdot p \quad \text{for gas} \quad (40)$$

気体相では定圧比熱と定体積比熱の比から空気については $\gamma_{\text{gas}}=1.403$ とした。

つぎに液体相たとえば水は非圧縮性とするが、SPH法では密度から圧力を算定するために次式のような状態方程式を用いて擬似非圧縮流体として取り扱う¹⁸⁾。

$$p_d \equiv p - p_0 = p_0 \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma_{\text{liq}}} - 1 \right\} \quad \text{for water} \quad (41)$$

ここで $\gamma_{\text{liq}}=7$ とした^{9),10)}。この値が小さい場合、水の圧縮

性は高くなる。水の弾性波速度は体積圧縮係数と密度で決定されること、上式を用いた場合には密度変化が圧力変動に与える影響は大きいが逆に圧力変動を与えるための密

度変化は小さくてよいことを鑑み $\gamma_{\text{liq}}=7$ とした。実際に

計算を行った結果、1%未満程度の密度変化であり、擬似非圧縮性が実現されていた。

(2) 固体 (土) の構成モデル

提案する解析手法において構成モデルを特定する必要はなく、問題に適切な構成モデルを取り込めばよい。本論文で単純化のために以下のような極簡単なモデルを用いた。弾完全塑性体を仮定した。本論文の解析ではすべてダイレイタンシー角 $\phi_d=0$ 、ポアソン比 ν^e は0.3の一定値とした。また、土の破壊時の最大せん断応力は $\tau_f = p \tan \phi$ とし粘着成分は0とし、 ϕ は破壊時の内部摩擦角である。せん断弾性剛性 G^e とヤング係数 E^e は平均有効主応力 p のべき関数とした。

$$E^e = 2(1+\nu^e)G^e = E^e_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^m \quad (42)$$

土の体積圧縮係数 B^e は

$$B^e = \frac{E^e}{2(1-\nu^e)} = \frac{1}{2(1-\nu^e)} E^e_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^m \quad (43)$$

である。ここで、 p_0 , E^e_0 はそれぞれ基準となる応力とその応力に相当する剛性の値である。上述の仮定から土の体積変化は弾性域における平均有効主応力の変化のみに依存することから、土の間隙率 n から密度が求まり平均有効主応力が算出されることになる。

一方、偏差ひずみ速度 $\dot{\mathbf{e}}_d$ に伴うせん断応力の増分 $\dot{\mathbf{\tau}}$ との関係は弾性域であれば、Hooke則の増分形式である、

$$\dot{\mathbf{\tau}} = 2G^e \dot{\mathbf{e}}_d \quad (44)$$

がよく用いられるが、変位場に回転が生じる場合にはJaumann rateが代用される。この場合、式(44)は以下のように書き換えられる^{13),14)}。

$$\hat{\mathbf{\tau}} = \dot{\mathbf{\tau}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{\tau} + \mathbf{\tau} \cdot \mathbf{w} = 2G^e \dot{\mathbf{e}}_d \quad (45)$$

式(45)に関する粒子素片*i*の方程式は式(11), (37), (38)から算出される。

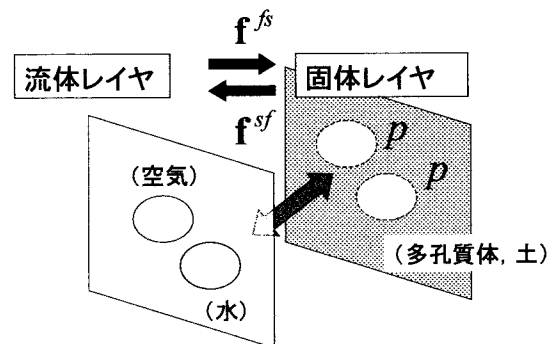


図3 固体相 (土) と流体相 (液体, 気体) との重ね合わせと相互作用

本論文では初期の土の間隙率 $n_0=0.4$, $m=0.5$, 基準となる応力と剛性の値はそれぞれ $p_0=100\text{kPa}$, $E_0=150\text{MPa}$ とした。また, $\tan\phi=0.5$ とした。

2.5 固体相と流体相の相互作用

本論文では, 土からなる固体相と, 水および空気からなる流体相を個別のレイヤ上で表現し(図-3), それらを重ね合わせるにより三相系の解析が可能としている。円筒容器内の固相を SPH 法, 間隙流体 (気体) を差分法で解き重ねあわせる方法も提案され成果をあげている¹⁹⁾。しかし, 本研究では自由表面や流体相の相転移や剥離現象を再現することを最終目標としているため全ての相を SPH 法で表現することとした。

固体相レイヤと流体相レイヤとの重ね合わせの際には両者の間に間隙率 n と透水 (または透気) 係数 k を考慮した以下の物体力を作用させる。この物体力として両相の速度差に応じた摩擦力に起因すると考えられる力を用いる。そこで, Biot の方法²⁰⁾にならって固体相から流体相, 流体相から固体相へ作用させる物体力をそれぞれ $\mathbf{f}^{sf}$, $\mathbf{f}^{fs}$ とすると,

$$\mathbf{f}^{sf} = n \frac{\rho_f g}{k} (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f), \quad \mathbf{f}^{fs} = n \frac{\rho_f g}{k} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \quad (46)$$

また, 作用反作用の関係から,

$$\mathbf{f}^{sf} = -\mathbf{f}^{fs} \quad (47)$$

が成り立つ。ただし, ρ_f は流体の密度, g は重力加速度, $\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^f$ はそれぞれ固体相, 流体相の速度ベクトルである。各粒子素片への力の作用方法は参考文献¹⁹⁾に習うものとする。

また, 固体相である土の変形・破壊挙動は有効応力に依存する。ここで, 間隙圧 p は以下のように求める。流体相の各粒子素片の圧力を式(41)によって算出した後, 式(5)の f_i を粒子素片の圧力に置き換えることで任意の箇所の間隙圧 p を求める。

2.6 SPH 法解析の実行方法

本小節は先述した SPH 法による計算方法について概説する。

(1) 時間積分

本論文では leap-frog 法²¹⁾を用いて式(34), (35), (46)から得られた加速度, 速度, 位置, 密度, ひずみ, 応力を算出する。計算ステップ数 n から $n+1$ における物理量の算定方法は, 計算ステップ $n-1$ から n , n から $n+1$ の時間増分をそれぞれ Δt^{n-1} , Δt^n とすると,

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + 1/2 \left(\Delta t^n + \Delta t^{n-1} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_n$$

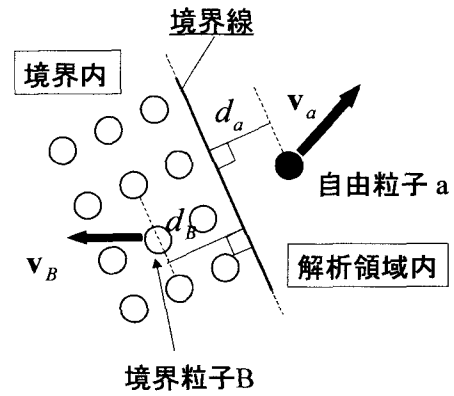


図4 non-slip 境界条件における境界粒子の仮想速度の考え方

$$\rho^{n+1} = \rho^n \left(1 - D^{n-1/2} \Delta t \right) \quad (48)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{v}^{n+1/2} \Delta t$$

$$\sigma^{n+1} = S(\rho^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1}, \dots)$$

となる。また, 時間ステップ Δt は Courant-Friedrichs-Levy (CFL)条件を含め以下の基準を満たすように決定する。

$$\Delta t_1 \leq 0.25 \min(h_i/c_i)$$

$$\Delta t_2 \leq 0.25 \min \sqrt{(h_i/|\dot{\mathbf{v}}_i|)}$$

$$\Delta t_3 \leq 0.125 \min \sqrt{(h_i/v_i)}$$

$$\Delta t = \min \{ \Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3 \} \quad (49)$$

(2) 境界の取り扱い

本論文では, 境界の物理的意味をより明確にするため, 図-4 に示すように解析境界は境界内に仮定の境界粒子を数列配置することで再現する (以降, 粒子は粒子素片を意味する)。境界粒子の配置や運動量を適切に与えることで, 流体における slip や non-slip 境界条件を与えることが可能である。これはグリッドを用いる通常の差分解法の仮想セル手法と類似している。解析領域内の自由に動くことができる粒子素片 (自由粒子) a の密度算定や運動方程式を解く際には, 影響範囲内にある (式(7)を満たす) 境界粒子 B には仮想速度を与え, 通常の粒子素片として扱う。ただし, この仮想速度による境界粒子の位置の更新はせず, 境界粒子間の相互作用はない。

ここでは, 境界粒子 B の仮想速度 $\mathbf{v}_B$ は Takeda²²⁾らの方法を改良した Morris¹⁰⁾の方法を用い, 自由粒子 a との相対位置によって次式のように算定する。ここでは non-slip 条件で, 境界形状が直線の場合についてのみ示す (図-4)。

$$\mathbf{v}_{aB} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_B = \beta \mathbf{v}_a \quad (50)$$

ただし, β は上限 $\beta_{\max}$ を設けて,

$$\beta = \min(\beta_{\max}, 1 + d_B/d_a) \quad (51)$$

とした。ここで、 d_a が小さい場合に β が極端に大きくなり境界付近の粒子に過度に大きな反発力が作用しないように、 $\beta_{\max}=2.0$ とした。境界粒子の特性を工夫することで種々の境界条件が再現可能と考えられる。

(3) 計算手順

SPH 法による計算フローを図5に示す。

まず、粒子を解析領域に配置し初期の質量、密度などを決める。本論文では正方格子上に粒子を配置した。各粒子の半径 h (影響半径 $2h$)は初期状態では粒子間隔と等しくした。

粒子の半径 h は、計算ステップでは密度変化 (divergence D_i) にしたがって更新する¹⁴⁾。

$$h^{n+1}_i = h^n_i - \Delta t \frac{h^n_i}{\rho^n_i \cdot d} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}^n_j - \mathbf{v}^n_i) \cdot \nabla_j^n W_{ij} \quad (52)$$

DEM 解析でよく行われるように解析領域をセル・パーティションに分割して、効率良くそれぞれの粒子の影響範囲内にある粒子を検索し記憶する。この際には linked-list 方式によって使用メモリ量を最小限にするように工夫を行う²¹⁾。さらに密度を算定し状態方程式から流体圧力などを算定する。固体相レイヤと流体相レイヤの相互作用体積力などを考慮して粒子同士の応力勾配から作用力、加速度を求め速度を計算する。ここで、SPH においては流体の擬似的圧縮性を非圧縮流体に適用しているため (式(41))、Monaghan は XSPH という速度を修正する考え方を提案している。前過程で求めた速度ベクトルを $\mathbf{v}'_i$ とすると修正された速度 $\mathbf{v}_i$ は以下ようになる。

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i - \varepsilon_{XSPH} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}'_{ij} W_{ij} \quad (53)$$

ただし、 ε_{XSPH} は定数で $0 \leq \varepsilon_{XSPH} \leq 1$ であり、その値が大きいほどこの操作は、着目する粒子の運動を周辺の粒子の平均的な動きに均す効果を生じさせる。速い流れのときには粒子同士の重なりを回避することができる。

修正された速度分布からひずみ速度を計算し、全ひずみ量、構成式から応力速度を計算して粒子内の応力ひずみ状態を更新する。

その後、粒子の位置を更新して上記の計算プロセスを繰り返す。

3. 解析結果および考察

本節では二次元浸透破壊を再現するために提案した SPH 法による解析結果について紹介する。全ての解析ケースにおいて、初期の粒子半径 h_0 は初期粒子間隔と等しいとした。また重力加速度 g (9.8m/s^2) を作用させている。

3.1 液体 一相系の解析

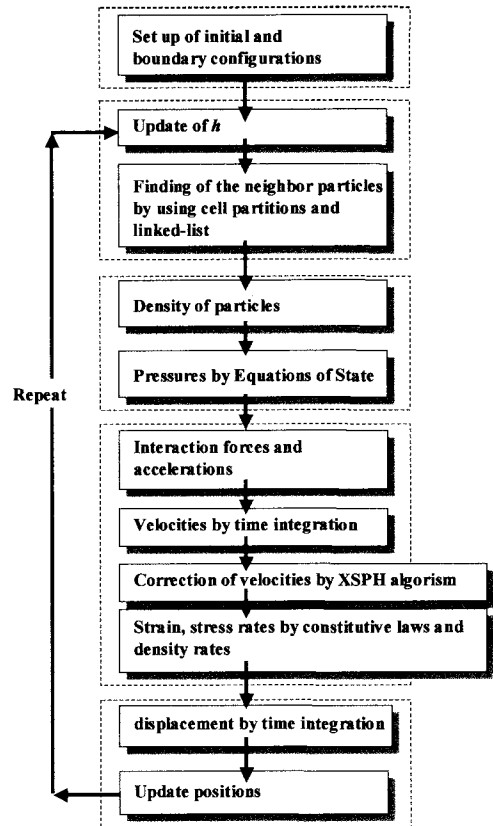


図-5 SPH 法による計算フロー

図-6, 7は SPH によって粘性係数 μ の異なる液体の柱の崩壊現象⁹⁾を解析した結果である。図-6は水相当の粘性 ($\mu=1.002 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$)、図-7ではその1000倍の粘性 ($\mu=1.002 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$) を用いた結果である。図中には中心を粒子素片の中心、半径は粒子半径 h の1/4とした円形ドットを示している。赤色の点が境界粒子、青色が水の粒子である。

全ての粒子には初期密度 $\rho_0=1000\text{kg/m}^3$ とし水柱右側面の粒子には右向き初速 $\sqrt{2g(H-y)}$ を与えた (H, y は図中に定義)。図-6では、時間とともに水柱は下方ほど加速的に側方流動が生じ、崩壊していることがわかる。また、十分時間が立つと水面が水平な形状になっている。

図-7では粘性が高いため崩壊に時間がかかるだけでなく、図-6と比較して初期形状が保たれやすいことがわかる。以上のように、SPHによって流体の流動現象を表現できることが分かる。

3.2 液体—気体の二相系の解析

図-8, 9は SPH 法によって液体中の気泡の浮上、分裂、結合現象を解析した結果について示している。液体は前小節の水の物性値を用いた。気体は空気を想定し初期密度 $\rho_0=1.207\text{kg/m}^3$ 、粘性係数 $\mu=1.810 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ である。

水面から上に粒子は配置されていないがこれは真空ということではなく、上載圧として100kPa (約1気圧) の

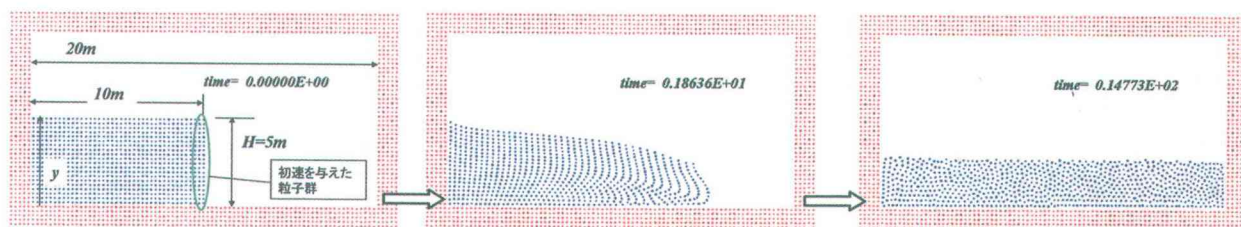


図-6 液体柱の崩壊解析（図中の時間は秒）： 水の粘性係数を用いた場合

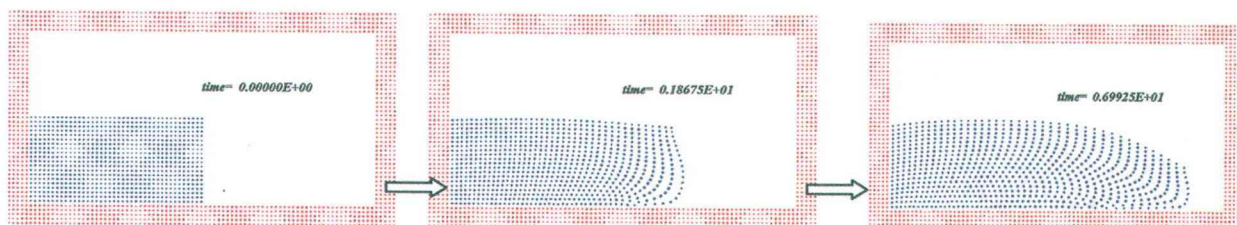


図-7 液体柱の崩壊解析（図中の時間は秒）： 水の粘性係数の1000倍を用いた場合

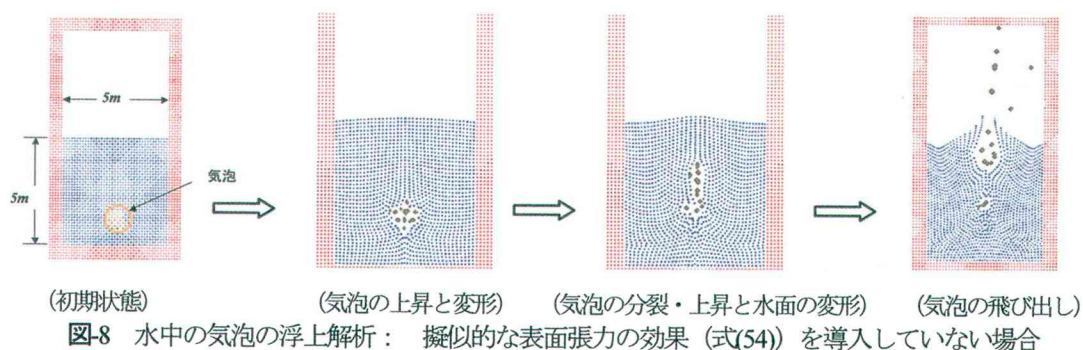


図-8 水中の気泡の浮上解析： 擬似的な表面張力の効果（式(54)）を導入していない場合

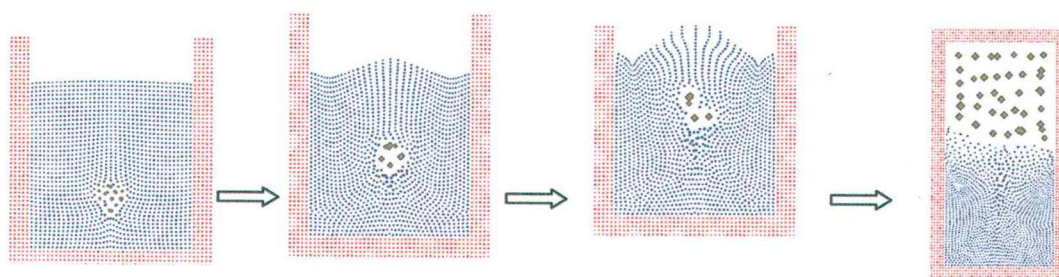


図-9 水中の気泡の浮上解析： 擬似的な表面張力の効果（式(54)）を導入した場合

空気圧を考慮している。したがって、水中の気泡は上載圧 100kPa と水深分の水圧の圧力に相当する密度を式(39), (40)から求めている。また、気泡はいくつかの空気の SPH 粒子の集合体として表現している。

図-8 は水、気泡の表面張力を考慮していない解析結果である。時間の経過とともに気泡が浮上しており浮力の効果が再現できるといえる。また浮上に伴って気泡全体の輪郭は変形し、水面の盛り上りも確認できる。気泡の上昇に伴って気泡下部に周辺の廻り込むために循環が生じる。さらに上昇すると気泡は個々の粒子に分裂しほぼ一列状に水中から飛び出している。この過程を動画でみると粒子の速度が変化する様子がわかる。破裂的な水面形状の変形がみ

てとれる。水面から飛び出した空気の粒子は空中を浮遊することになる。このように SPH 法によって異なる相中の移動や破裂の変形が表現できるといえる。

さらに、異なる物質間では表面張力が発生するが、この張力は物質、境界面の形状によって変化する²³⁾。解析において境界面を探索して表面張力を算出する方法も考えられる。しかし、表面張力は本質的には分子間力によるものであり、SPH 解析の離散性を十分に生かすためにも、SPH の粒子間力として導入する方法が容易であるし発展的と考えられる。本論文では Nugent and Posch²⁴⁾に習って、式(34)の圧力 p に van der WAALS 力に類似した分子間力 $-(a/m^2) \cdot \rho^2$ を SPH に導入する。ここで、 a は物質で

きまる定数である。この項に起因する加速度は以下のようにになる。

$$\left(\frac{dv_i}{dt}\right)_a = 2 \frac{a}{m_i^2} \sum_j^N m_j \nabla_i W_{ij} \quad (54)$$

図-9は空気部分にのみ式(54)の効果を導入した解析結果である($a=1$)。図-8の場合と比較すると気泡は細かく分裂するのではなく大きく二分されている。このことから上述のモデルを導入することによって擬似的表面張力が発生することがわかる。この他に、Lennard-Jones型ポテンシャル関数の導入など、分子間力的なポテンシャルと表面張力とを結び付ける本質的で汎用性の高いモデル化を今後検討する²³⁾。

3.3 固体-液体の二相系の解析

図-10は層厚 H の均質な地盤の上下両面排水条件下における一次元圧密現象の解析結果をTerzaghiの理論解と比較して示している。圧密現象は地盤内に生じた過剰間隙水圧 u_e の拡散現象であり次式で表せる²⁵⁾。

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2}, \quad c_v = \frac{k}{B^{e-1} \rho_w g} \quad (55)$$

ここで、 ρ_w 、 k はそれぞれ水の密度と地盤の透水係数である。初期過剰間隙水圧比は層の中央部分で1.0となる正弦関数分布とした。図は過剰間隙水圧比の深度方向 y の分布を等時曲線として示している。経過時間 t は拡散特性を表すパラメータを使って時間係数 T_v として示す。

$$T_v = \frac{k}{B^{e-1} \rho_w g} \frac{t}{H^2} \quad (56)$$

ここでは、土の体積圧縮弾性係数 B^e は応力状態によらず線形弾性体とした(破壊しないものとした)。SPH法による計算結果はTerzaghiの理論解とよく一致しており、この土-水の二相計算の妥当性を示している。

3.4 矢板周りの浸透破壊解析

図-11は浸透破壊を紹介するためによく行われる簡単な実験の様子を示している。地盤は水平な砂地盤であり、十分に水に浸した砂を水中落下させて作成した。中央には矢板を想定した板が根入れされている。図の右側の上流の水位が左側の下流よりも高いため水位差によって浸透が発生している様子がインクの動きからわかる。水位差を大きくすると矢板の下流部では地表面が隆起し上流部では沈降し、さらに水位差が生じると地盤の流動とともに破壊や洗掘が生じる。

図-12は図-11と同様な条件下でのSPH解析結果である。黄色の粒子が地盤を表す。図-11と同様に矢板周辺の地盤の変状、大きな流動、破壊に至っており浸透破壊の特徴を

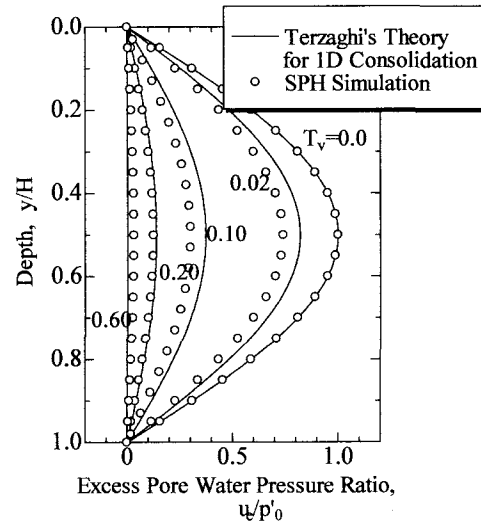


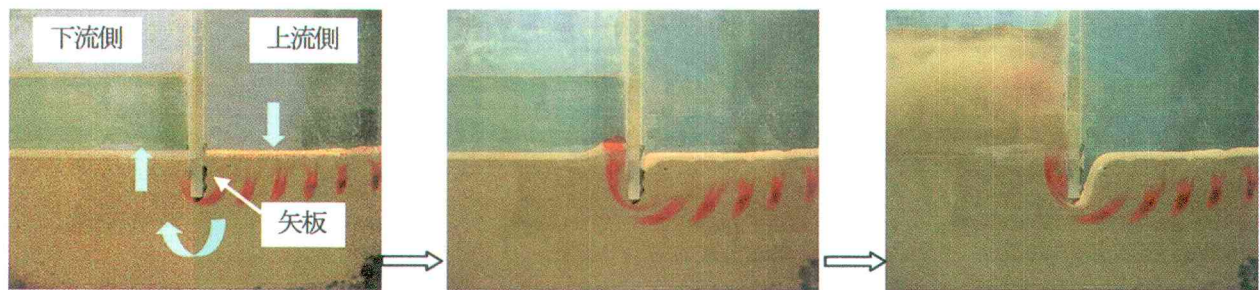
図-10 一次元圧密の過剰間隙水圧比の等時曲線： SPH法解析結果とTerzaghiの理論との比較： 上下両面排水，初期分布は正弦関数形状

よく表現できていることがわかる。

3.5 堤防の浸透破壊解析

地盤を水槽内につくり、片側の水位を上げ、浸透により堤体が破壊する様子を観察するために極簡単な模型実験を行った。図-13は一度浸潤させた堤体に片方の水位(上流側)を上昇させ一定水位に保った後の破堤の様子を示している。一方、図-14は乾燥した堤内の浸潤線の進行の様子を示している。図から次のことが確認される。すべり破壊は堤体全体が湿った状態になると堤内側(図の下流側)の法先から始まり、下部の破壊をきっかけにすべり破壊が徐々に天端上部に向かって進行する。堤体の上部にまで破壊が至ると水が堤体を越え越流によって完全に決壊した。また、乾燥した堤体内では浸透は徐々に進行するが、堤体中央では浸潤線の動きが遅れる。

つぎにSPHによる堤体の浸透・破壊解析結果を示す。パラメータは2.4(2)項に詳しい。堤外に急激な水位上昇が生じた場合について示す。水位上昇時に堤体内が飽和している場合について図-15に示す(図-13の実験結果と対応する)。図中には土部分の粒子素片と速度ベクトルを記した。浸透による大変形を伴うすべり破壊の発生が再現されている。堤内側(図の下流側)の法先から破壊が発生し、天端方向へと断続的に進行していく傾向は模型実験結果と一致している。越流による掃流効果で流動変形も再現された。つぎに、初期に堤内が乾燥している場合を図-16に示す(図-14の実験結果と対応する)。図中には浸潤線(水と空気の境界)を破線で示しているが、実験と同様に下に凸の曲線を描きながら浸潤していることがわかる。このように堤体内の飽和度の違いによる浸潤線の形状の相違も再



(初期状態) (下流側で地盤表面が隆起、上流側で沈下) (破壊および洗掘)
図-11 矢板周りの浸透破壊の実験の様子： 矢板右側が上流、左側が下流

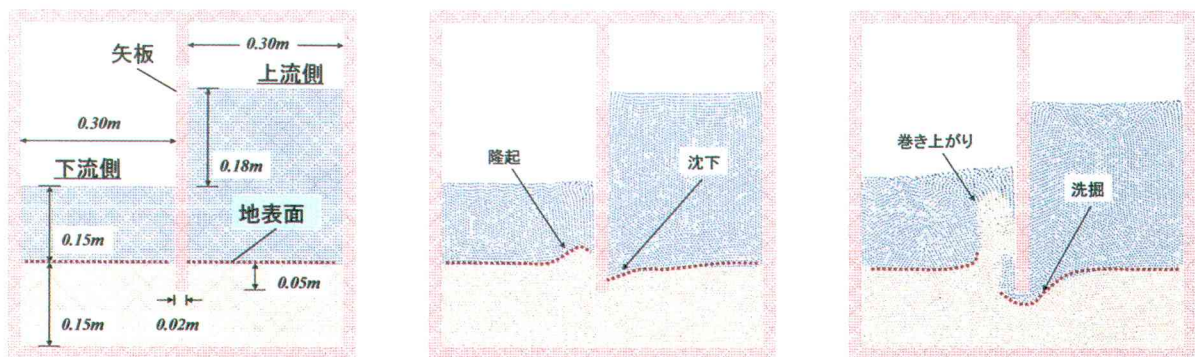


図-12 矢板周りの浸透破壊の SPH 解析結果： 矢板右側が上流、左側が下流



図-13 湿潤状態にある堤防の浸透破壊実験の様子： 水位差が保持条件下で堤内側（下流側）の法先から天端方向へ壊が伝播する様子。最後は越流に洗掘が生じる。

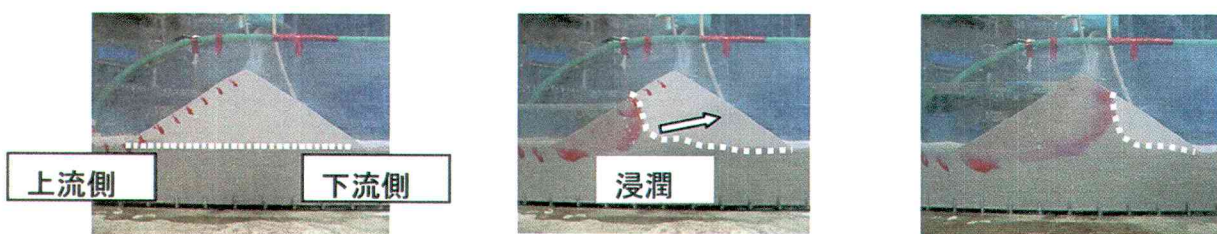


図-14 乾燥状態にある堤防への浸潤実験の様子： 下に凸の自由水面が形成され下流側（堤内側）に移動する。

現できることが確認された。

以上から、堤防の浸透破壊現象が SPH 法を用いることで定性的ではあるが再現できることが分かった。

4. おわりに

本論文では、SPH 法を用いて離散的手法と連続体的手法の両者の特徴を生かした解析法の開発に取り組み、浸透破壊解析法の提案を試みた。固体・液体・気体の三相すべての相を SPH の計算粒子素片を用いて表現し、多相系においても精度よく密度を算定できる方法を新たに提案するとともに、固体相と流体相の相互作用効果の導入方法を工夫した。

その結果、液体の流動現象、異なる相内の移動現象、浸

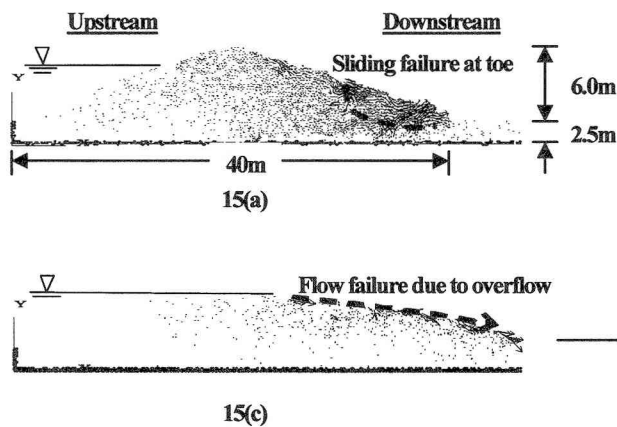


図-15 湿潤状態にある堤防の浸透破壊解析

(a) 堤内法先のすべり, (b) 破壊の上方への伝播, (c) 越流の発生。

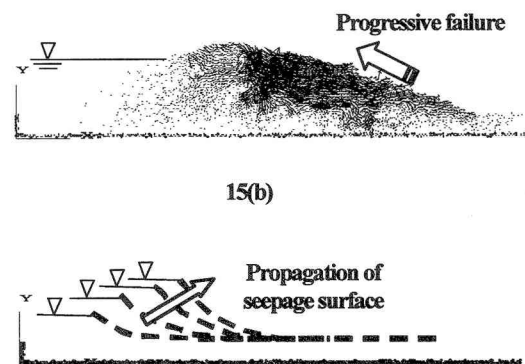


図-16 乾燥状態にある堤防への浸潤解析

透現象, 大きな流動変形を伴う進行破壊現象を定性的ではあるが表現できることを明らかにした。

実際の浸透破壊や地盤改良のメカニズムを明らかにするためには, 土・水・空気の三相相互作用と流動変形を考慮することが不可欠である。定量的な表現が今後の課題である。

参考文献

- 小高猛司, 浅岡顕: 砂質地盤の浸透過程での気泡の発生・発達現象, 土木学会論文集, No.487/III-26, pp.129-138, 1994.
- 溝口洋一, 坂井守, 前田健一: 気泡の発生・発達に着目した矢板まわりの浸透破壊現象の観察, 第39回地盤工学研究発表会概要集, pp.1177-1178, 2004.
- 中島保治: 干拓堤防のパイピングについて, 土と基礎, 地盤工学会, Vol.13, No.2, pp.83-88, 1985.
- 地盤工学会 (豪雨時の斜面崩壊のメカニズムおよび危険度予測に関する研究委員会): 豪雨時の斜面崩壊のメカニズムおよび危険度予測に関する研究報告書, 地盤工学会, 2003.
- Lucy, L. B.: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, Astronomical Journal, 82, pp.1013-1024, 1977.
- Gingold, R. A. and Monaghan, J. J.: Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181, pp.375-389, 1977.
- J. J. Monaghan: An introduction to SPH, Computer Physics Communications, Vol.48, pp.89-96, 1988.
- Liu, M. B., Liu, G. R. and Lam, K. Y.: Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 155, No. 2, pp.263-284, 2003.
- Monaghan, J. J.: Simulating free surface flows with SPH: Journal of Computational Physics, 110, pp.399-406, 1994.
- Morris, J. P., Fox, P. J. and Zhu, Y.: Modeling low Reynolds number incompressible Flows Using SPH, Journal of Computational Physics, 136, pp.214-226, 1997.
- Shao, S. and Lo, E. Y.: Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flow with a free surface, Advances in Water resources, 26, pp.787-800, 2003.
- Monaghan, J. J. and Gingold, R. A.: Shock simulation by the particle method SPH, Journal of Computational Physics, 159, pp.290-311, 1983.
- Libersky, L. D., Petschek, A. G., Carney, T. C., Hipp, J., R., Allahdadi, F., A.: High strain Lagrangian hydrodynamics, A three-dimensional SPH code for Dynamic Material response, Journal of Computational Physics, 109, pp.67-75, 1993.
- Benz, W. and Asphaug, E.: Simulating of brittle solids using smooth particle hydrodynamics, Computer Physics Communications, pp.253-265, 1995.
- Randles, P. W. and Libersky, L. D.: Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, pp.375-408, 1996.
- Landrini, M., Colagrossi, A. and Tulin, M. P.: A Novel SPH formulation for 2-phase flows, 17th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Abstracts in Website, 2002.
- 恒藤敏彦: 弾性体と流体, 物理入門コース8, pp.128-132, 1999.
- Batchelor, G. K.: An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press., Cambridge, UK, 1967.
- Sugino, T. and Yuu, S.: Numerical analysis of fine powder flow using smoothed particle method and experimental verification, Chemical Engineering Science, Vol.57, 227-237, 2002.
- Biot, M. A.: General theory of three-dimensional consolidation, Journal of Applied Physics, Vol.12, pp.152-164, 1941.
- R.W. Hockney and J.W. Eastwood; Computer simulation using particles, Institute of Physics Publishing, Bristol and

- Philadelphia, 1999.
- 22) Takeda, H., Miyama, M. and Sekiya, M.: Numerical simulation of viscous flow by Smoothed Particle Hydrodynamics, Progress of Theoretical Physics, Vol.92, No.5, pp.939-960, 1994.
- 23) Israelachvili, J. (近藤保, 大島広行 共訳) : 分子間力と表面力, 朝倉書店, 1995.
- 24) Nugent, S. and Posch, H. A.: Liquid drops and surface tension with smoothed particle applied mechanics, Physical Review E, Vol.64, No.4, 4968-4975, 2000.
- 25) 山口柏樹 : 土質力学 (全改訂版) , 技報堂出版, 1996.
(2004 年 4 月 16 日 受付)