

粒状要素法シミュレーション試験による固有状態弾塑性モデルの検証

Verification of the characteristic state plasticity by 3D-GEM tri-axial tests

鄒 春躍*, 岸野佑次**

Chunyue ZOU, Yuji KISHINO

*学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

**フェロー 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同上)

Recently, Krenk proposed a constitutive theory for granular materials called "the characteristic state plasticity". This model is rather simple as the Cam-clay model, even though the dependency of the third stress invariant on the yield function and the non-associative flow rule are taken into account. The purpose of this paper is to verify the applicability of the theory by comparing the theory with 3D GEM simulation tests. After showing how to calibrate material constants used in the theory, the paper discusses the predictability of elasto-plastic stress-strain relationship for various loading directions. It is concluded that the material constants determined for the tri-axial loading process can be used for the prediction of unloading-reloading process. However, the theory may have to be modified to predict responses along general loading paths.

Key Words : 3D GEM, characteristic state plasticity, non-associative flow rule, dilatancy

1. はじめに

地盤材料の力学挙動を説明するために、種々の構成則が提案され、実際に用いられてきた。とくに、Roscoe を中心とするグループにより提案されたカムクレイモデル^{1, 2)}は一般的によく用いられる構成則である。このモデルでは、降伏関数が偏差応力の第2不変量 J_2 と有効平均応力とで表され、流動則には関連流動則が用いられている。地盤材料の実際の挙動は、これらの基本仮定が必ずしも満たされないが、塑性体積ひずみ増分が零となる限界状態に着目すれば、降伏関数に含まれている係数を容易に定めることができることなどの特徴があり、広く用いられてきた。

一方、Krenk ら³⁾は粒状体の構成則をダイレイタンス特性に着目して定式化を行った。粒状体のせん断挙動において体積ひずみが圧縮から膨張に転ずる点を固有状態 (characteristic state) と称し、これをもとに、カムクレイモデルの一般化を試みた。カムクレイモデルが限界状態弾塑性モデルとも呼ばれるのに対し、このモデルは固有状態弾塑性モデルと命名されている。粒子間の摩擦性すべりが支配的な粒状材料の変形挙動を適確に表現するために非関連流動則が導入されている。

一般に弾塑性理論では塑性変形の発生条件が応力に空間において定式化される。たとえば、カムクレイモデルでは有効平均応力と偏差応力(主応力 σ_1 - σ_3)

面上の限界状態線の傾き M により塑性仕事表現され、このパラメータを含む降伏関数により降伏条件が定められる。固有状態弾塑性においては、粒状材料せん断時の圧縮から膨張への遷移状態、終局応力状態、および、応力空間降伏曲面の静水軸に垂直な切り口の中最大の大きさをもつ状態における偏差応力と平均応力の比 M_c , M_m , M_f の値に基づいて降伏条件が定められる。流動則は非関連流動則であり、降伏関数と塑性ポテンシャル関数は互いに共通部分を含む比較的単純な形をもっている。硬化則では塑性体積ひずみのほかに、偏差塑性ひずみにより発生する塑性仕事も考慮されている。

提案された構成則に関しては、砂の実験データをもとに検証を行うことが試みられているが⁴⁾、未だ検証例は限られている。一般的な載荷経路に対して構成則の適用性を調べるためには、本来応力成分数に対応する6自由度の要素試験装置を必要とするが、現実の実験においては実現不可能である。これに対して、計算機による離散体モデルの要素試験シミュレータは任意の載荷経路に対するデータを得ることを可能とする。岸野⁵⁾はこのような目的で粒状要素法(GEM)を開発した。本研究は、3次元粒状要素法を用いたシミュレーション試験の結果に基づいて、固有状態弾塑性モデルの検証を試みることを目的とする。最終的には、実際に入手可能な試験データでキャリブレーションを行う必要があるが、ここでは、その準備段階の検討を行うこととする。

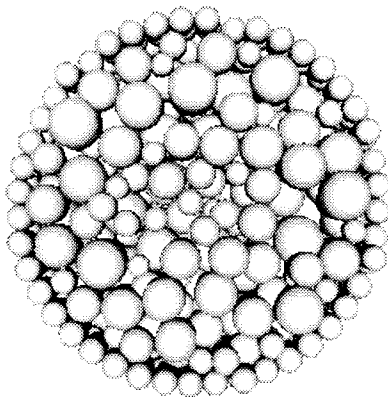


図-1 粒状供試体断面 (供試体 A)

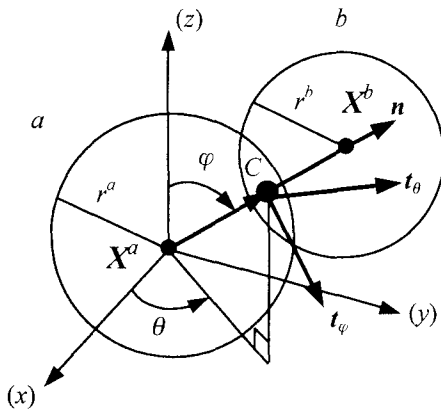


図-2 局所座標系の設定

2. 3次元 GEM モデルと試験結果

固有状態弾塑性モデルの検証を行うため、3次元 GEM (粒状要素法) を用いた数値シミュレーション試験を行ったが、ここでは、3次元 GEM モデルの概略とシミュレーション試験の結果を説明する。なお、定式化の詳細は文献^{5,6)}を参考されたい。

2.1 粒子間構成式

粒状要素法では理想化した球形粒子の集合体を用いる。図-1 に示したように、粒子集合体は試験制御条件を供試体に与えるために集合体周辺に配置された境界粒子と、境界粒子に囲まれて配置された内部粒子とから成っている。粒子自身は剛体とし、接触粒子間の弾性的な変形メカニズムを仮想バネで表し、接触力接線方向成分に対して摩擦則を適用する。

図-2 のような接触状態にある粒子 a , b の半径をそれぞれ r^a , r^b とする。 a 粒子に着目して粒子 b との接触点 C における外向き単位法線ベクトル n とする。粒子 a , b の重心の位置ベクトルをそれぞれ X^a , X^b とすれば、単位法線ベクトルは、

$$n = (X^b - X^a) / |X^b - X^a| \quad (1)$$

である。 n に直交する単位接線ベクトル t_ϕ , t_θ をそれぞれに図-2 に示す方向に定めると、 (n, t_ϕ, t_θ) は接触点 C における局所的右手系直交座標の基底ベクトルを形成する。このように定めた局所座標系を用いると、接触点 C において粒子 a に作用する接触力ベクトルは、

$$P_C = (P_n, P_\phi, P_\theta)_C^T \quad (2)$$

対応する 2 粒子間の相対変位は

$$U_C = (u_n, u_\phi, u_\theta)_C^T \quad (3)$$

と表わされる。接触力ベクトルと粒子間相対変位との関係は線形であると仮定し、増分的な関係式

$$\Delta P_C = S \Delta U_C \quad (4)$$

における剛性行列

$$S = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (5)$$

は一定とする。

また、接触点 C における摩擦力は Mohr-Coulomb の摩擦則に従い、接触力の 2 つの接線方向成分の合力に関して、次式の制約条件が満たされなければならない。

$$|P_t| = |P_\phi + P_\theta| \leq P_n \tan \phi \quad (6)$$

ここに、 ϕ は粒子間摩擦角である。

2.2 ひずみと応力の定義

(1) ひずみの定義

図-1 に示した供試体の要素試験シミュレーションを行う際に、各境界粒子は供試体の変形状態を規定する変形勾配テンソルに支配されて移動するものとする。すなわち、境界粒子 B の重心の位置座標 X^B は、次式のように、常に初期の位置座標 X_0^B の変形勾配 F による一次変換

$$X^B = F X_0^B \quad (7)$$

により定められるとする。なお、供試体全体の剛体回転は変形に関係しないので、要素試験シミュレーションにおける変形勾配テンソル F は対称とし、供試体に与えるひずみを ϵ とすると、次式のおくことができる。

$$F = I - \epsilon \quad (8)$$

ここに、 I は 2 階の単位テンソルである。垂直ひずみは圧縮を正とし、せん断ひずみに関しては座標軸正方向間のなす角の増大を正とする。なお、各境界粒子の回転を特定する必要があるが、ここでは、供試体全体の平均場に合わせることにし、無回転とした。以上より、境界制御の自由度は、境界粒子の数

に関わらず、6である。

(2) 応力の定義

境界粒子に内部粒子から作用する接触力の合力 f^B は、供試体に対する外力の反力に相当する。シミュレーションでは変形パラメータとして変形勾配を用いているが、これに対する仮想仕事の原理により、境界粒子を介して外力のする仕事を供試体に作用する応力がする仕事に等置することにより、粒状供試体の平均応力を次式のように定義することができる。

$$\sigma = \frac{1}{V_0} \sum_{n=1}^{N_B} f^B \otimes X_0^B \quad (9)$$

ここに、 σ は第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 V_0 は基準状態の供試体の体積であり、 N_B は境界粒子数である。微小変形の場合、第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソルは Cauchy 応力テンソルにほぼ等しい。

2.3 粒状体の静的つり合い式

図-2 の粒子 a について、物体力 B を含めた静的つり合い式は

$$f^a = - \left(\sum_{n=1}^{N_C} T_C P_C + B \right) = 0 \quad (10)$$

である。ここに、 f^a は粒子 a に作用する力とモーメントの総和を表すベクトル、 N_C は粒子 a の接触点の総数である。また、 T_C は接触点 C における局所座標で定義した接触力 P_C を全体座標へ変換するための変換マトリックスである。

式(10)を全粒子個々に適用すれば、逐次解析により、全粒子について同時に釣り合い条件を満たす粒子配置を求めることができる。

2.4 解析対象と粒状体の変形挙動

本研究で用いた粒状供試体の諸元を表-1に示す。

表-1 シミュレーションに用いた供試体の諸元

供試体	初期間隙比 e_0	k_n kN/m	k_t kN/m	ϕ 度	粒径 mm	内部 粒子 数
A	0.885	20000	14000	15	0.18-0.40	419
B	0.507	2000	1400	15	0.15-0.84	1559

これらの定数の中、バネ定数については粒子が充分剛体的に挙動することを想定して定めたが、実際の地盤材料に適合させるためには検討を要する。

3軸圧縮試験シミュレーションは等方載荷した初期状態 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p_0 = 500\text{kPa}$ から出発し、側圧

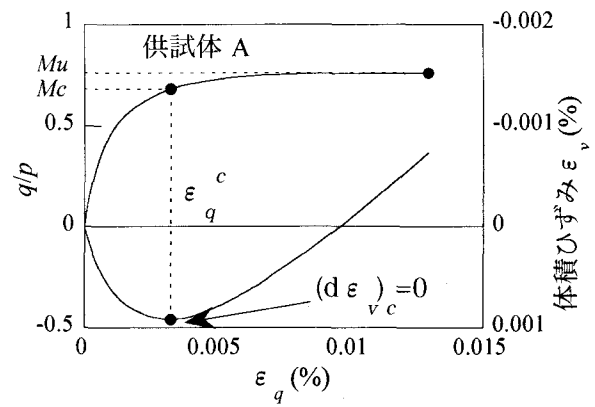


図-3 応力ひずみ曲線

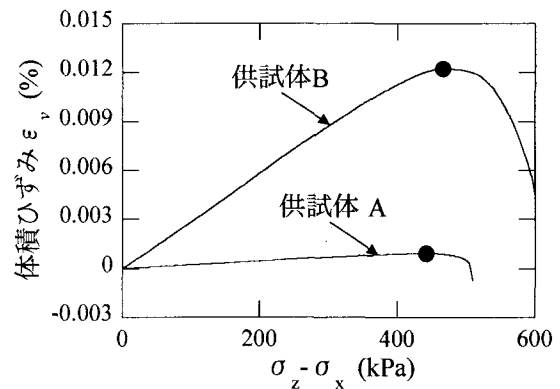


図-4 軸差応力-体積ひずみ曲線

σ_x, σ_y を一定に保ち、 σ_z を漸増させる載荷を行う。

図-3 に供試体 A について得られた応力ひずみ曲線を示す。図中、 q は軸差応力、 p は平均応力、 ϵ_q はせん断ひずみ、 ϵ_v は体積ひずみである。せん断載荷とともに、供試体は一旦圧縮に向かい、その後、図中の黒丸で記した時点から膨張に転じるが、対応する q/p の値はこの点より急速に最終的な最大値に近づく。

図-4 に A, B 2つの供試体について行った要素試験シミュレーションで得られた軸差応力 ($\sigma_z - \sigma_x$) と体積ひずみの関係を示す。図に示すように、バネ定数の選択はひずみの大きさに影響を与えるので、選択は慎重に行う必要がある。実際の地盤材料の挙動を定量的に適合させるためには、入手可能な実験データでキャリブレーションを行う必要があるが、ここでは表-1 にあるデータに基づく定性的な検討を行うことにする。図-3 のせん断ひずみを参照すると、2つの供試体はパッキング密度の相違によりせん断強度が異なるが、圧縮から膨張に転じる点はバネ定数が異なるにも関わらずほぼ同じ軸差応力であり、粒状材料に共通した力学的に固有な応力状態が存在し得ると考えられる。

3. 固有状態弾塑性モデル

Krenk(2000)ら^{3, 4)}の提案した構成則モデルをシミュレーション試験で検討するに当たり、ここではまず、モデルの概要を示す。

3.1 モデルの基本的考え方

固有状態弾塑性モデル^{3) 4)}は、せん断を受ける粒状材料の体積ひずみが圧縮から膨張に転じる際の応力状態（固有状態）におけるせん断応力平均応力比などを用いて、非関連塑性理論として定式化されるものである。

このモデルで用いられる降伏関数と塑性ポテンシャル関数は、いずれも、応力の第3不変量 I_3 と等方応力 p の単純な関数として与えられる。塑性ポテンシャル関数は、摩擦により生じる塑性散逸エネルギー増分が最小主応力とせん断ひずみ増分の大きさに比例すると近似的に仮定することにより導かれる。

つぎに、硬化則に関しては、カムクレイモデルで考慮されていない塑性せん断仕事の等方降伏応力への依存性を導入し、ダイレイタンシーの増加が止まったときの急激な塑性変形の発生を抑えている。

このモデルは、以下に示すように最終的に、次の6つのパラメータが独立な材料定数となる。

- ①せん断弾性係数 G
- ②体積弾性係数 κ
- ③体積弾塑性係数 λ
- ④降伏曲面形状係数 m
- ⑤塑性ポテンシャル曲面形状係数 n
- ⑥硬化則式における塑性せん断仕事の寄与度 w

3.2 応力とひずみの定義

応力ひずみ関係を行列表示する際の応力 σ とひずみ ε のベクトル表示は以下の通りとする。

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})^T \quad (11)$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})^T \quad (12)$$

ここに、せん断ひずみは工学ひずみである。本モデルは現時点では等方的であり、応力やひずみを等方部分と偏差部分に分けた2次元的な定式化が簡便であるので、とくに3軸状態を想定して、ひずみと応力のパラメータとして、以下の量を用いる。

$$3 \text{ 軸状態における体積ひずみと偏差ひずみ} \\ \varepsilon_v = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_z + 2\varepsilon_x \quad (13)$$

$$\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_z - \varepsilon_x) \quad (14)$$

3軸状態における平均応力と軸差応力

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{1}{3}\sigma_z + \frac{2}{3}\sigma_x \quad (15)$$

$$q = \sigma_z - \sigma_x \quad (16)$$

応力とひずみの符号は、とくに断らない限り、圧縮を正とする。

3.3 各応力状態の定義

前述のように、図-3に示した3軸圧縮載荷応力ひずみ曲線において、体積ひずみが圧縮から膨張に転じる点、すなわち、

$$d\varepsilon_v = 0 \quad (17)$$

に対応する応力点が存在する。この状態を固有状態(characteristic state)と呼び、この時の応力比を

$$M_c = q/p|_c \quad (18)$$

と表す。つぎに、せん断強度を与える終局応力状態での応力比を

$$M_u = q/p|_u \quad (19)$$

と表す。

また、3軸圧縮状態に対して (p, q) 平面に描いた降伏曲線において q が最大となる点での応力比を

$$M_f = q/p|_f \quad (20)$$

と表す。なお、 M_f は次節に示す降伏関数を用いれば定数となる。 M_f は実験データから直接的には求められないが、Ahadiは数種の実験データを比較検討することにより、次の評価式を提案した⁴⁾。

$$M_f = \min(1, 2M_c - M_u) \quad (21)$$

3.4 降伏関数と塑性ポテンシャル関数

降伏関数と塑性ポテンシャル関数は塑性履歴に依存する応力の関数であり、次式のように与えられる。

$$f(\sigma) = -I_3 + p^3 \eta_f(p) \quad (22)$$

$$g(\sigma) = -I_3 + p^3 \eta_g(p) \quad (23)$$

ここに、 I_3 は次式で定義される応力の第3不変量である。

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{zx}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2) \quad (24)$$

また、 $\eta_f(p)$ と $\eta_g(p)$ は0~1の間の値をとり、それぞれ降伏関数と塑性ポテンシャル関数に塑性履歴を反映させるための関数である。具体的な関数形を与えるにあたっては、次式のパラメータも用いられる。

$$\gamma_f^2 = 1 - \eta_f(p) \quad (25)$$

$$\gamma_g^2 = 1 - \eta_g(p) \quad (26)$$

降伏関数を滑らかな関数とするため、 $\eta_f(p)$ に対

しては、次のようなべき関数が仮定される。

$$\eta_f(p) = \left(\frac{p}{p_f}\right)^m \quad (27)$$

前述の塑性散逸エネルギーに対する仮定により、 γ_g は次のように定められる。

$$\gamma_g = 1 - \left(\frac{p}{p_g}\right)^n \quad (28)$$

式(27)と式(28)の中の p_f と p_g は硬化パラメータである。 $2n$ は材料の摩擦係数となる。なお、 η_g は実際の計算には用いられないが、式(26)、式(28)により定めることができる。

材料が降伏した状態に至ると、降伏関数と塑性ポテンシャル関数に対して次の等式が成り立つ。

$$f(\sigma) = 0 \quad (29)$$

$$g(\sigma) = g_0 \quad (30)$$

ここに、 g_0 はとくに意味はないが、 p_g を具体的に定めるためには、あらかじめ決定しておく必要がある。いま、 $\eta_g(p) = \eta_f(p)$ となるように $\eta_g(p)$ を定めると、

$$g(\sigma) = 0 \quad (31)$$

が成立し、これにより、 p_g は p_f で評価することができる。一方、 $\eta_f(p)$ の値は降伏条件を満たした場合、式(29)に現在の応力の値を代入することにより求めることができる。

3.5 体積ひずみと平均応力の関係

弾性変形状態および弾塑性変形状態の各々に対し、体積ひずみと $\ln p$ との間に線形的な関係があると仮定し、 κ 、 λ を各々の状態における $\varepsilon_v - \ln p$ 直線の勾配とすると、

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{p} dp \quad (32)$$

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda}{p} dp \quad (33)$$

と置くことができる。このとき、弾塑性変形状態における塑性体積ひずみに関して次式が成立する。

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_v - d\varepsilon_v^e = \frac{\lambda - \kappa}{p} dp \quad (34)$$

3.6 硬化則

静水圧軸に沿う等方載荷の場合、 $p_f = p$ 、 $dp_f = dp$ となる。式(34)から、次の関係式が得られる。

$$dp_f = \frac{1}{\lambda - \kappa} p d\varepsilon_v^p \quad (35)$$

一般の載荷経路に沿う場合では、平均応力 p 以外に、偏差応力の関与する塑性散逸エネルギーも dp_f

の変化に影響を与えられると考えられるので、次のように dp_f を与えることとする。

$$dp_f = \frac{1}{\lambda - \kappa} (p d\varepsilon_v^p + w s_{ij} de_{ij}^p) \quad (36)$$

ここに、 w は偏差応力が関与する塑性散逸エネルギー増分の dp_f への寄与度であり、 s_{ij} と e_{ij}^p は偏差応力と塑性偏差ひずみである。

3.7 弾性係数とコンプライアンス

応力 σ と弾性ひずみ ε^e は行列表示により次のように表すことができる。

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon^e \quad (37)$$

ここに、

$$\mathbf{E} = G \begin{bmatrix} a & b & b & & & \\ b & a & b & & & \\ b & b & a & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

は弾性係数行列である。式(38)の中の G は弾性せん断係数であり、 a 、 b は無次元の係数である。弾性変形状態での $\varepsilon_v - \ln p$ 直線の勾配 κ により、 a 、 b は次のように算出することができる。

$$a = \frac{p}{\kappa G} + \frac{4}{3}, \quad b = \frac{p}{\kappa G} - \frac{2}{3} \quad (39)$$

弾性係数マトリックスの逆行列、すなわち弾性コンプライアンス行列 \mathbf{C} は次式で与えられる。

$$\mathbf{C} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} d & e & e & & & \\ e & d & e & & & \\ e & e & d & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

無次元の係数 d 、 e は弾性係数行列の係数 a 、 b により、次式のように求まる。

$$d = \frac{-(a+b)}{2b^2 - a(a+b)} \quad (41)$$

$$e = \frac{b}{2b^2 - a(a+b)} \quad (42)$$

3.8 応力増分とひずみ増分の関係式

ひずみ増分を弾性と塑性とに分けて考える。

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (43)$$

ここに、弾性ひずみ増分は次式で計算される。

$$d\varepsilon^e = \mathbf{C} d\sigma \quad (44)$$

塑性ひずみ増分は塑性ポテンシャルを用いて、

$$d\varepsilon^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\chi \quad (45)$$

と表すことができる。ここに、比例係数 $d\chi$ は Prager の適合条件

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma - H d\chi = 0 \quad (46)$$

により、次のように求まる。

$$d\chi = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma \quad (47)$$

ここに、 H は硬化係数であり、次式で与えられる。

$$H = -\frac{\partial f}{\partial p_f} \frac{dp_f}{d\chi} = H_1 H_2 \quad (48)$$

式(22)と式(25)により

$$H_1 = -\frac{\partial f}{\partial p_f} = mp^2 (1 - \gamma_f^2)^{(m+1)/m} \quad (49)$$

が求まる。また、式(36)と式(45)により、

$$H_2 = \frac{dp_f}{d\chi} = K_p \left\{ (1-w) \text{tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) + w \frac{\sigma}{p} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (50)$$

が得られる。ここに、

$$K_p = \frac{p}{\lambda - \kappa} \quad (51)$$

となる。式(45)～(50)は応力 $(q, p)^T$ 及びこれに対応するひずみ $(\epsilon_q, \epsilon_p)^T$ にも適用できる。

以上より、増分形の応力ひずみ関係が以下のよう
に得られる。

$$d\sigma = \left[\begin{array}{c} \mathbf{E} - \frac{\left(\mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \mathbf{E} \right)}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\mathbf{E} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)} \right] d\epsilon \quad (52)$$

3.9 係数 n , m と w

この3つの係数は固有状態および終局応力状態から求めることができる。すなわち、係数 M_c と M_u およびこれらの値より定まる M_f から求めることができる。

側圧一定 ($\sigma_x = \sigma_y$) の3軸载荷の場合、降伏関数と塑性ポテンシャル関数は次式のように表される。

$$f(q, p) = -\frac{2}{27} q^3 + \frac{1}{3} q^2 p - (1 - \eta_f) p^3 \quad (53)$$

$$g(q, p) = -\frac{2}{27} q^3 + \frac{1}{3} q^2 p - (1 - \eta_g) p^3 \quad (54)$$

(1) 係数 n

図-3 は固有状態と終局応力状態のせん断応力の差は小さい。そのため、固有状態での変形は主に塑性ひずみであると考えられるので、固有状態で弾性変形の影響を無視すると、 $d\epsilon_i = 0$ の条件は

$$d\epsilon_i^e = 0 \quad (55)$$

と置き換えることができよう。式(45)により、

$$\frac{\partial g}{\partial p} = 0 \quad (56)$$

が得られる。式(54)より、

$$p \frac{\partial g}{\partial p} + q \frac{\partial g}{\partial q} = 3g + p^4 \frac{d\eta_g}{dp} \quad (57)$$

が得られる。式(26), (28), (54), (56)を式(57)に代入して、形状係数 n は M_c により導かれる。

$$n = \frac{1}{9} \frac{M_c^2 (3 - M_c)}{\gamma_c (1 - \gamma_c)} \quad (58)$$

ここに、

$$\gamma_c^2 = \frac{1}{3} M_c^2 \left(1 - \frac{2}{9} M_c \right) \quad (59)$$

である。

(2) 係数 m

g の場合と同様に、式(53)より、

$$p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q} = 3f + p^4 \frac{d\eta_f}{dp} \quad (60)$$

が得られる。さらに、降伏曲面の静水圧軸からの距離が最大となる箇所次式を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (61)$$

式(25), (27), (53), (61)を式(60)に代入すると、形状係数 m は M_f を用いて次のように与えられる。

$$m = \frac{6M_f^2}{(3 - M_f)(3 + 2M_f)} \quad (62)$$

(3) 係数 w

終局応力状態では、硬化係数 $H_2 = 0$ になるため、係数 w は式(50)から求めることができる。

$$w = 1 - \frac{n(M_c)}{n(M_u)} \quad (63)$$

ここに、関数 $n(M)$ は式(58), (59)の中の M_c を変数 M に入れ替えたものである。 M_u は最終の载荷状態での応力比である。

4. 構成則とシミュレーション試験との比較

以上説明したように、固有状態弾塑性モデルには、独立な材料定数として、 G , κ , λ , M_c , M_u の5つの係数が含まれることになる。本章では、図-3に応力ひずみ関係を示した供試体 A の側圧一定3軸圧縮試験シミュレーション結果に基づいて、これらの値を同定し、固有状態弾塑性モデルの適合度を調べる。なお、全ひずみの中、弾性部分を分離するため、継続的に行う3軸圧縮载荷の各ステップ終了時にステップ分の除荷を分岐させて行い、回復部分として弾性ひずみ増分を求めた。

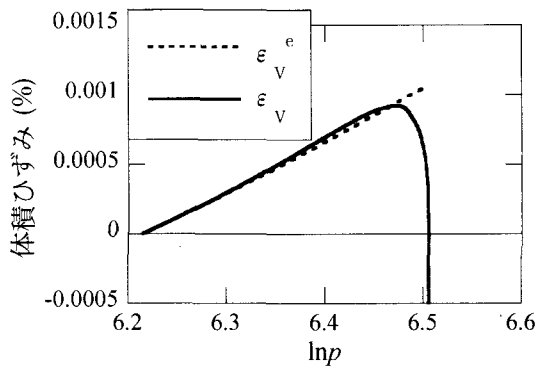


図-5 体積ひずみ- $\ln p$ 曲線

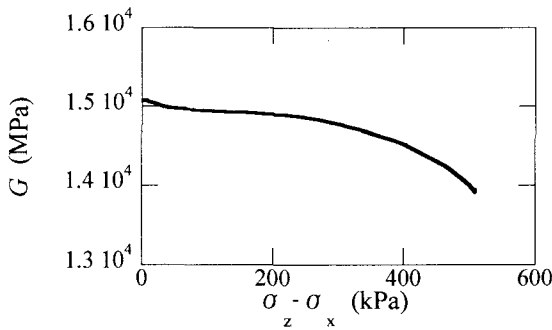


図-6 せん断弾性係数 G

4.1 固有状態弾塑性モデルの係数 κ , λ と G

(1) 体積弾性係数 κ と体積弾塑性係数 λ

図-5 は体積ひずみ $\ln p$ 関係である。図よりわかるように、固有状態以前の体積ひずみは図中の破線で示した弾性体積ひずみとの差は僅かであり、その変化は直線的であり、固有状態を超えるとダイレイタンスの発生に伴う塑性体積ひずみが急激に生じている。ダイレイタンス発生後、急速に終局状態に至るので、体積ひずみと $\ln p$ の関係は概ね線形であると仮定することができる。

体積弾性係数 κ と体積弾塑性係数 λ はそれぞれ弾性体積ひずみと全体積ひずみに対する体積ひずみ- $\ln p$ 曲線の傾きであるが、ここでは、各载荷ステップ毎に求めた接線係数に基づいて、これらの値を定めることとした。体積弾性係数 κ はせん断によるダイレイタンスの影響を排除するため、せん断载荷開始から固有状態に至るまでの最初の 1/3 の区間の平均値とし、体積弾塑性係数 λ は同区間における最大値とした。

(2) せん断弾性係数 G

図-6 は、各载荷ステップ毎に求めた接線せん断弾性係数をプロットしたものである。载荷につれて、せん断弾性係数 G は小さくなるが、終局応力状態でのせん断弾性係数 G は最大値の 92.5% である。そこで、せん断弾性係数 G の変化は小さいとみなし、全载荷区間共通の一定値を定めることとする。

この一定値は、せん断载荷開始から固有状態に至るまでの最初の 1/3 区間における平均値とした。

4.2 降伏関数と塑性ポテンシャル関数の偏微分係数

塑性ひずみ増分を算定するとき、降伏関数と塑性ポテンシャル関数の偏微分係数の値を求める必要があるため、ここでは、これらの偏微分係数を表す式をまとめておく。

(1) 応力テンソル成分による偏微分係数

式(22)~(28)より、降伏関数と塑性ポテンシャル関数の応力テンソル成分に関する偏微分係数は次式のように求まる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} + p^2 \eta_f \left(1 + \frac{m}{3}\right) \delta_{ij} \quad (64)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} + p^2 \left[1 - \gamma_g^2 + \frac{2}{3} m \gamma_g (1 - \gamma_g)\right] \delta_{ij} \quad (65)$$

上式中の偏微分式は次式で与えられる

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} = & \frac{1}{6} e_{pqr} e_{lmn} \left(\sigma_{qm} \sigma_{rn} \delta_{pi} \delta_{lj} \right. \\ & \left. + \sigma_{pl} \sigma_{rn} \delta_{qi} \delta_{mj} + \sigma_{pl} \sigma_{qm} \delta_{ri} \delta_{nj} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

ここに、 e_{ijk} はエディントンのイプシロン、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

なお、 η_f と γ_g は、降伏している状態において、式(29)、(31)が成立していることを考慮すれば、次式のようにおくことができる。

$$\eta_f = I_3 / p^3 \quad (67)$$

$$\gamma_g = \sqrt{1 - I_3 / p^3} \quad (68)$$

(2) 平均応力 p と偏差応力 q に関する偏微分係数

塑性ひずみは、前節の偏微分係数に基づき一般的に求められる。一方、载荷を 3 軸状態に限定し、式(13)、(14)に示した体積ひずみ成分と偏差ひずみ成分を直接的に求めるためには、降伏関数と塑性ポテンシャル関数の平均応力 p と偏差応力 q による偏微分係数を求めておくと便利である。

三軸状態の降伏関数および塑性ポテンシャル関数式(53)、(54)の p 、 q に関する偏微分係数は以下のように算定される。

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{3} q^2 - (3+m) p^2 \gamma^2 + m p^2 \quad (69)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{2}{9} q^2 + \frac{2}{3} q p \quad (70)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{1}{3} q^2 - (3+2n) p^2 \gamma^2 + 2n p^2 \gamma \quad (71)$$

$$\frac{\partial g}{\partial q} = -\frac{2}{9} q^2 + \frac{2}{3} q p \quad (72)$$

ここに、 γ は降伏条件 $f = 0$ から次式のように定まる。

$$\gamma = \sqrt{\frac{-\frac{2}{27}q^3 + \frac{1}{3}q^2p}{p^3}} \quad (73)$$

式(70)と式(72)は同一であることから、偏差成分に関する限り、流動則は関連流動則的であるが、式(69)と式(71)とが異なるため、流動則は全体として非関連となる。

4.3 同定の結果

以上述べた方法により、側圧一定3軸圧縮試験シミュレーションの結果に基づいて、固有状態弾塑性モデルの材料定数の同定を行った。その結果を表-2に示す。

表-2 同定した材料定数

供試体	κ 10 ⁻⁴	λ 10 ⁻⁴	G MPa	M_c	M_u	M_f
A	0.344	0.387	14967	0.68	0.76	0.60
B	4.154	5.242	1122	0.71	0.86	0.56

これらの定数を構成則に代入し、シミュレーション実験と同一の载荷条件に対して計算される応力ひずみ関係とシミュレーション実験結果との比較を図-7~10に示す。

図-7, 8は、それぞれ、供試体 A, B の弾性ひずみの比較である。いずれも、構成則計算値とシミュレーション実験値とはよく一致している。载荷が進み、供試体の破壊点が近づくとずれが生じるが、その差は非常に小さく、弾性部分に関する限り、構成則は妥当であると言えよう。

図-9, 10は、それぞれ、供試体 A, B の弾性ひずみと塑性ひずみを加えた全ひずみの比較である。供試体 A については、表示してある範囲で、構成則計算値とシミュレーション実験値はよい一致をみている。供試体 B については、せん断が進むにつれ、両者間のずれが大きくなっている。また、破壊点付近では、硬化係数 H が 0 に近づき、非常に大きな塑性ひずみが計算されるので、A, B いずれの場合も、誤差は大きくなる。しかし、全体的には実験値をよく表現できていると考えられる。

以下、供試体 A を対象として考察を進める。なお、供試体 A の粒子間バネ定数は供試体 B のバネ定数より大きく、粒子はより剛体的に挙動することになる。

以上は、側圧一定3軸圧縮载荷の結果であるが、供試体 A について側圧一定3軸伸張载荷を行った結果を図-11に示す。同図より、シミュレーショ

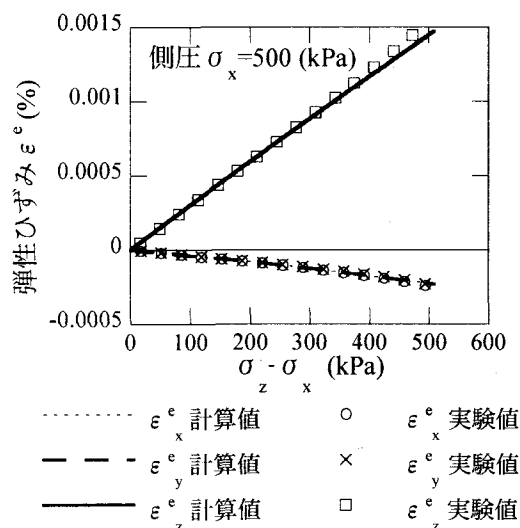


図-7 弾性ひずみの比較 (供試体 A)

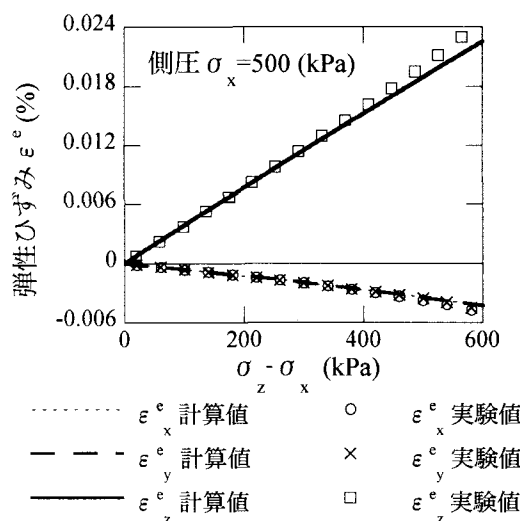


図-8 弾性ひずみの比較 (供試体 B)

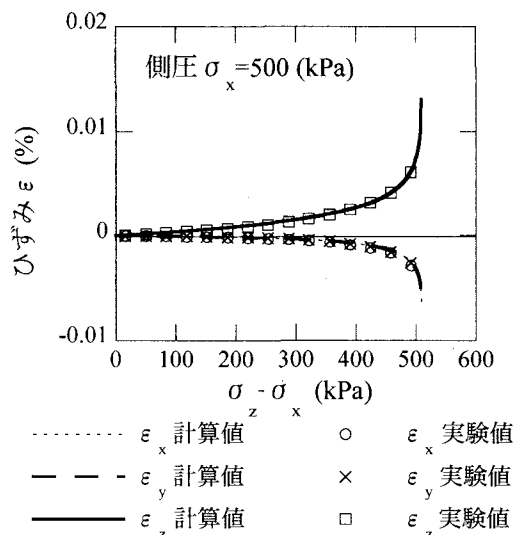


図-9 全ひずみの比較 (供試体 A)

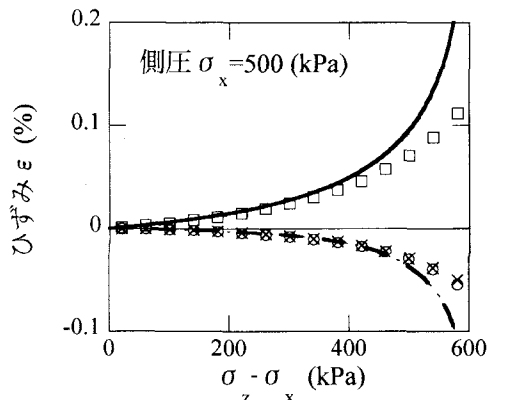


図-10 全ひずみの比較 (供試体 B)

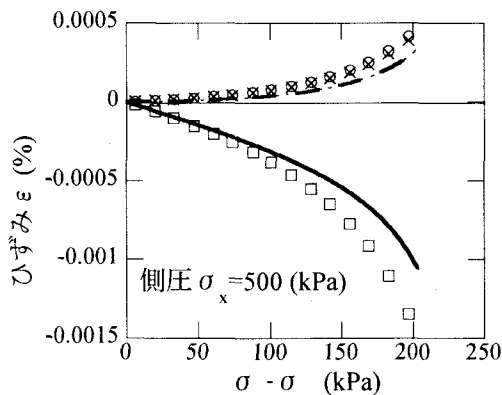


図-11 3軸伸張試験の全ひずみ (供試体 A)

ン試験における塑性ひずみの発達はモデルによる予測より早いと言いうことができる。したがって、降伏条件式に関しては修正の余地があると考えられる。

5. 降伏条件の適応性の検討

前節では側圧一定3軸状態に限定して固有状態弾塑性モデルの妥当性の検討を行ったが、ここでは、ある3軸圧縮状態から除荷した後、異なる応力経路で再載荷した場合に、同モデルの降伏条件が妥当な条件を与えるかどうかを検討する。

図-12には除荷と再載荷経路を示す。前節の側圧一定3軸圧縮経路は、図中のA→C、伸張経路はA→Fである。ここでは、側圧一定3軸圧縮経路上の応力点B (σ_z=800kPa) から除荷した状態A'から出発し、次の3つの方向に再載荷を行う。

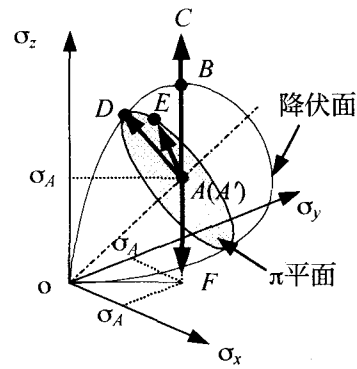
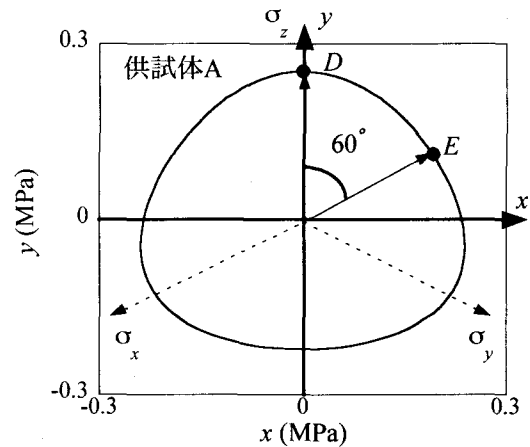


図-12 載荷経路



A点 (p=0.5 MPa) を通るπ平面

図-13 降伏曲面のπ平面上の切り口

- Case-1 A' → B → C
- Case-2 A' → D (π平面上)
- Case-3 A' → E (π平面上)

ここに、後の2つのケースは図-13に示すようなπ平面内の方向である。

除荷後の再載荷では、再び降伏条件を満たすまで、硬化パラメータ p_f は一定である。そこで、式(22)と(27)を参照して、次のパラメータを定義する。

$$\xi = I_3 / p^{3+m} \geq \left(\frac{1}{p_f} \right)^m \quad (74)$$

また、偏差ひずみを不変量の形で

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_x)^2} \quad (75)$$

と定義する。式(74)より、ξがB点での値ξ_Bより小さくなると、理論上再降伏が生じることになる。

図-14にCase-1のξ-Q関係図を示す。この場合、実験値は理論で予測された通り、除荷点B付近で元の曲線に戻っており、3軸圧縮載荷経路に関する限り、理論と実験とは良好な一致を見ている。

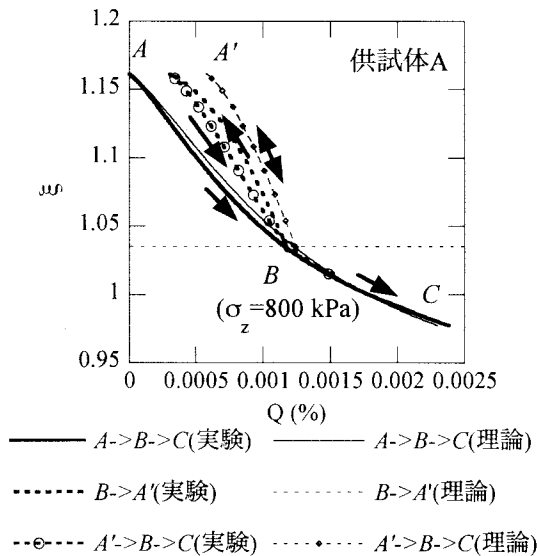


図-14 ξ-Q 関係図 (Case-1)

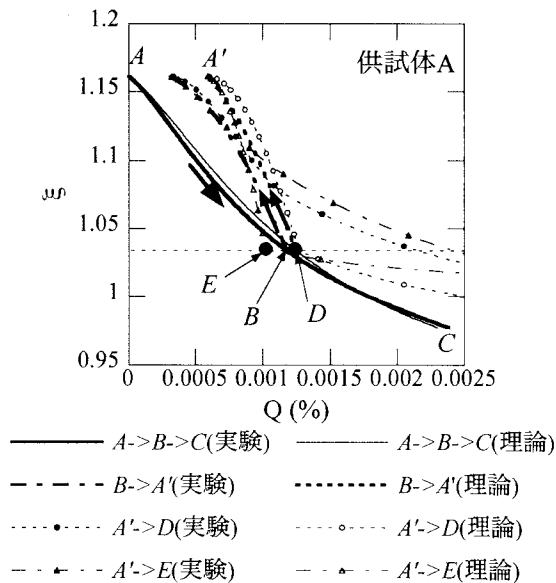


図-15 ξ-Q 関係図 (Case-2, 3)

図-15 に Case-2, 3 の ξ-Q の関係図を示す。これらのケースの場合、Case-1 に比べ、理論値と実験値との差が大きい。いずれの場合も、側圧一定 3 軸伸張荷重の場合と同様に、塑性ひずみの発達が予測値よりもかなり早いと言える。したがって、降伏条件を、原点と B 点を結ぶ曲線がより内側に位置するような形状となるような曲面で表されるように修正する必要がある。

岸野⁷⁾、郷ら⁸⁾は、応力荷重の方向によって異なる塑性変形メカニズムがあるために、降伏曲面が一意的には定まらないことを示した。本論文で示されているシミュレーション実験結果の中にもこのような要素が含まれていると考えられるので、将来的にはより一般的な検討が必要であろう。

6. 結論

本論文においては、固有状態の概念に基づいて定式化された Krenk の粒状材料構成則の検証を行う目的で粒状要素法シミュレーション実験を実施し、実験結果と理論との比較考察により次の結論を得た。

1) 側圧一定 3 軸圧縮試験シミュレーションにより固有状態弾塑性構成則に必要な 5 つの独立な係数を決定することができることを示した。

2) 側圧一定 3 軸圧縮荷重に関しては、荷重経路および再荷重ともに、シミュレーション結果と理論値とは良い一致を見た。

3) 3 軸伸張方向や π 平面上への再荷重に関しては、予測値との適合性は必ずしも良いとは言えず、降伏関数の設定など、将来の課題を残している。

今後、3次元粒状要素を広範に応用し、粒状材料の変形挙動をより広く把握するとともに、構成則理論の修正を行いたいと考えている。

参考文献

- 1) Schofield, A. and Wroth, C.: Critical state soil mechanics, McGraw-Hill Book Co., London, 1968.
- 2) Roscoe, K., Schofield, A. and Wroth, C.: Yielding of clays in states wetter than critical, Geotechnique, Vol.13, No.3, pp.211-240,1963.
- 3) Krenk, S.: Characteristic state plasticity for granular materials Part I: Basic theory, International Journal of Solids and Structures, 37, pp.6343-6360, 2000.
- 4) Ahadi, A. and Krenk, S.: Characteristic state plasticity for granular materials Part II: Model calibration and results, International Journal of Solids and Structures, 37, pp.6361-6380, 2000.
- 5) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, No.406/III-11, pp.97-106, 1989.
- 6) 石井建樹, 金子賢治, 岸野佑次: 真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について, 応用力学論文集, Vol. 5, pp.451-460, 2002.
- 7) Kishino, Y.: On the incremental nonlinearity observed in a numerical model for granular media, The Italian Geotechnical Journal, 2003-3, pp.30-38, 2003.
- 8) 郷春躍, 岸野佑次: マルチメカニズムを考慮した粒状材料の構成則に関する研究, 応用力学論文集, Vol. 6, pp.575-584, 2003.

(2004年4月16日 受付)