

粒状体の北村モデルにおける粒子接点の発生・消滅

Estimation of disappearance & appearance of contact points in Kitamura Model for particulate material

荒木 功平*・酒匂 一成**・北村 良介***

Kohei Araki, Ryosuke Kitamura, Kazunari Sako

* 学生員 鹿児島大学大学院理工学研究科情報システム工学専攻

** 正会員 立命館大学 COE 推進機構

*** 正会員 鹿児島大学工学部海洋土木工学科教授

Particulate material such as sandy soil is an assembly of particles that is composed of particles (solid), water (liquid) and air (gas) in voids, i.e., a multi-phase material. Kitamura^{1),2)} (1981) proposed a numerical model for particulate material based on the mechanical and probabilistic consideration on the particle scale. In the model the contact angle was adopted as a random variable. The Markov process was applied to express the continuous change in contact angle in the deformation process. On the other hand the parameters to estimate the discontinuous behavior of disappearance & appearance of contact points were empirically obtained.

In this paper an improvement to estimate the discontinuous behavior of disappearance & appearance of contact point is tried based on some mechanical consideration on the particle scale. Then the relation between disappearance & appearance of contact point ~ volume change ~ energy is derived to estimate the ratio of disappearance & appearance of contact points and the stress-strain relation is calculated by using the improved Kitamura Model. Finally some discussion is done for the differences between experiments and numerical results.

Key Words : Energy, Particulate material, Volume change

1. はじめに

物質を構成する最小単位は原子である。分子はいくつかの原子の結合した物質である。結晶質は原子が規則正しく周期的な配列をした物質である。原子の配列が不規則な物質を非晶質(アモルファス(amorphous))という。このように地球上に存在する物質は原子(粒子)から成り立っている。しかし、原子の大きさは 10^{-10}m (0.1ナノメートル)程度であり、それらから構成される物質の力学的挙動を解析するためには物質が連続であると仮定し、微小要素での解析をもとにして導かれた運動方程式(微分方程式)を積分する方法、いわゆる連続体力学が金属や高分子材料に適用されてきた。金属や高分子材料に適用した連続体力学を土にも適用することが試みられ、それなりの成果を挙げてきた。

本来、土は土粒子と土粒子間の間隙を満たす液体、気体の集合体(三相混合体)である。土粒子は通常非晶質である。そのような土粒子からなる粒状体は形状、大きさの不規則な粒子の集合体であり、力学的性質は、巨視的・微視的な組織・構造に大きく依存する。21世紀の土質力学は土を連続体とみなすのではなく、三相混合体であるという立場に立ち、土粒子レベルでの力学挙動の解析に基づいた力学体系にすることを目標の1つとしなければならない。北村は粒状体の土粒子レベルでの力学挙動に着目し、粒状体の数値力学モデル(以下、北村モデルと称する)を提案している^{2),3)}。北村モデルでは、粒子接点での接点角の連続的な変化にはマルコフ過程を適用している。粒子接点の発生・消滅という不連続な挙動に対しては、経験式に実験結果を代入し、フィッティングパラメータを求めていた。

本論文は従来の北村モデルにおける粒子接点の発生・消滅という不連続な挙動を評価するパラメータの決定方法の改良を意図している。すなわち、粒子接点の発生・消滅という不連続な挙動を評価するパラメータを粒状体の体積変化や粒状体に与えられるエネルギーと関連づけている。そして、従来の北村モデルにおける粒子接点の発生・消滅という不連続な挙動を評価する部分に、本論文で導出された粒子接点の発生・消滅～体積変化～エネルギー関係を適用し、しらすを想定した応力～ひずみ関係を導き、土質試験結果との比較・検討を行っている。

2. 接点数変化率と体積の関係

まず、粒状体内に含まれる粒子の全接点数に着目する。粒状体内に存在する接点の総数 N_c は式(1)で算出される。

$$N_c = \frac{1}{2} C_a N_p \quad (1)$$

C_a : 平均配位数(粒子1個あたりの平均接点数),

N_p : 粒状体内の全粒子数

式(1)の右辺で1/2が乗じてあるのは1つの接点を2つの粒子で共有している状態を考えているためである。式(1)中 N_p は粒状体内の全粒子数を表しており、次式で求めることができる。

$$N_p = \frac{V}{1+e} \cdot \frac{1}{\bar{V}} \quad (2)$$

V : 粒状体の体積, e : 粒状体の間隙比,
 $\bar{V}$: 粒子1個あたりの平均体積。

Field⁴⁾は礫の平均配位数 C_a について、次式で示される経験式を提案した。小田⁵⁾は、ガラスビーズを用いた実験より、粒度配合のいかんに関わらず、平均配位数は間隙比によって一義的に決まることを明らかにしている。

$$C_a = \frac{12}{1+e} \quad (3)$$

式(4)は式(1)～(3)より得られる粒子接点数を示している。

$$N_c(s) = \frac{6}{(1+e(s))^2} \cdot \frac{V(s)}{\bar{V}} \quad (4)$$

$N_c(s)$, $e(s)$, $V(s)$ は応力状態 s での接点数, 間隙比, 粒状体の体積を表している。また、破碎性を無視できる粒子の場合 $\bar{V}$ は一定と考えられるので応力状態 s の関数としていない。

図-1に、直径 $D=0.01 \sim 1\text{mm}$ の球状粒子が $\phi 50\text{mm} \times 100\text{mm}$ の円柱粒状体に含まれる粒子数を式(1)～(3)により算出した結果を示す。

図-1より、 $\phi 50\text{mm} \times 100\text{mm}$ の円柱粒状体（例えば、三軸試験に用いられる供試体など）には $10^5 \sim 10^{12}$ （10万～1兆）個の粒子が含まれることがわかる。このことは、土粒子レベルでの解析から三軸試験によって得られる応力やひずみという巨視的な物理量を誘導するためには平均化が有用であることを意味している。

ここで、式(5)のように元の接点数 $N_c(s)$ に対して応力状態が Δs 変化した際における接点数の変化量の割合を接点数変化率 dR_v と称する。

$$dR_v = \frac{N_c(s) - N_c(s + \Delta s)}{N_c(s)} \quad (5)$$

$V(s + \Delta s)$ と $V(s)$ の差を dV とすると、式(6)が得られる。

$$\frac{dR_v}{1 - dR_v} = \frac{1}{V(s)} dV \quad (6)$$

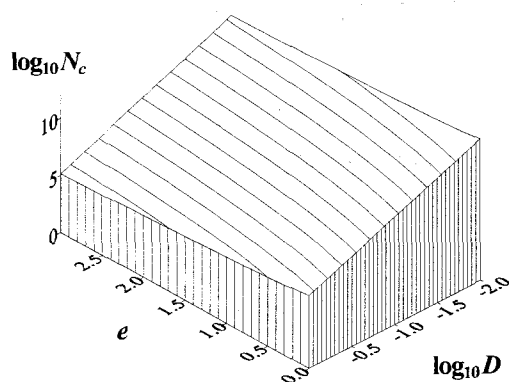


図-1 粒子数と間隙比と粒子直径の関係

$1 \gg dR_v$ として両辺を積分すると、式(7)が得られる。

$$R_v = \ln V(s) + C \quad (7)$$

C : 積分定数。

粒状体の初期状態を基準にとり $s = s_0$, $R_v = 0$ とすれば、 C が求まるので、 R_v は次式で算出される。

$$R_v = \ln \frac{V(s)}{V(s_0)} \quad (8)$$

接点数変化率は粒子接点数の変化する割合を示しており、式(3)において、状態変化に伴う分母 $(1+e)$ の比により表されるので、分子の数値(12)がいくつ値であってもよい。

3. 接点数変化率～エネルギー関係の導出

北村ら¹⁾は、粒状体の圧縮・せん断挙動を解析するために粒状体になされた仕事（エネルギー）を物理量として用いている。すなわち、単位体積当りのエネルギー W ～平均有効応力（正八面体垂直応力） σ_m ～正八面体せん断応力 τ_{oct} 関係に着目し、これらの成分で表される関係をエネルギー曲面と称し、実験的・理論的考察を加えてきている。図-2(a)は $W \sim \sigma_m \sim \tau_{oct}$ 空間に描かれたエネルギー曲面を示し、等方圧縮を含む応力比が一定の圧縮曲面が最も外側にあり、その内側に相似なせん断曲面が重なって存在していることを示している。この曲面は塑性論における塑性ポテンシャル曲面に対応しているものと考えられる。図-2(b)は $W \sim \sigma_m \sim \tau_{oct}$ 関係をエネルギー $\log_{10} W \sim$ 合応力 $\log_{10} (\sigma_m^2 + \tau_{oct}^2)$ 関係に変換し、二次元表示した図を示している。等方圧縮を含む応力比一定圧縮過程では、応力比に依存せず、1本の直線をたどり、せん断過程へと移行することを示している。

図-2(a), (b)のようなエネルギー曲面が存在するとき, ある応力状態でのエネルギー状態が決まる。応力状態 s (この s は状態量を意味することに注意する) における全粒子接点のエネルギーの総和 (接点に蓄えられる弾性エネルギーも含む) を $W(s)$, 粒状体中の個々の接点 (接点番号: $k=1, \dots, N_c(s)$) のもつエネルギーを $W_k(s)$ としたとき式(9)のようになる。

$$W(s) = \sum_{k=1}^{N_c(s)} W_k(s) \quad (9)$$

k におけるエネルギー増分を dW_k とすると, $W_k(s+\Delta s)$ は,

$$W_k(s+\Delta s) = W_k(s) + dW_k \quad (10)$$

応力状態が s から $s+\Delta s$ に変化した際のエネルギー増分 dW は次式により表される。

$$dW = W(s+\Delta s) - W(s) \quad (11)$$

式(9) ~ (11) から次式が得られる。

$$dW = \sum_{k=1}^{N_c(s+\Delta s)} dW_k + \sum_{k=1}^{N_c(s+\Delta s)} W_k(s) - \sum_{k=1}^{N_c(s)} W_k(s) \quad (12)$$

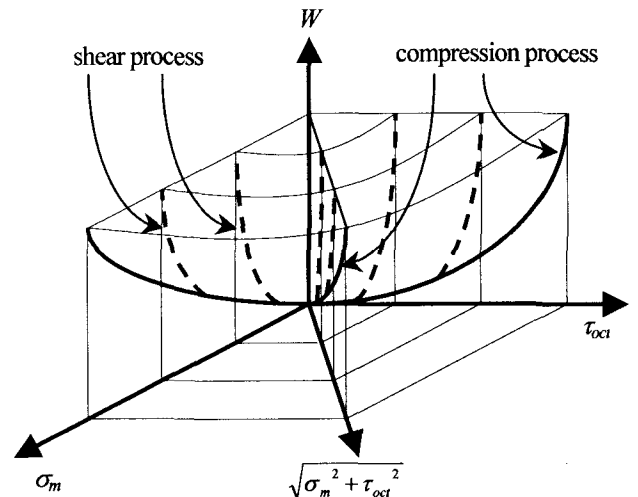
次に, 個々の粒子接点におけるエネルギーの平均 $\mu_{W(s)}$ は次式により表される。

$$\mu_{W(s)} = \frac{1}{N_c(s)} \sum_{k=1}^{N_c(s)} W_k(s) \quad (13)$$

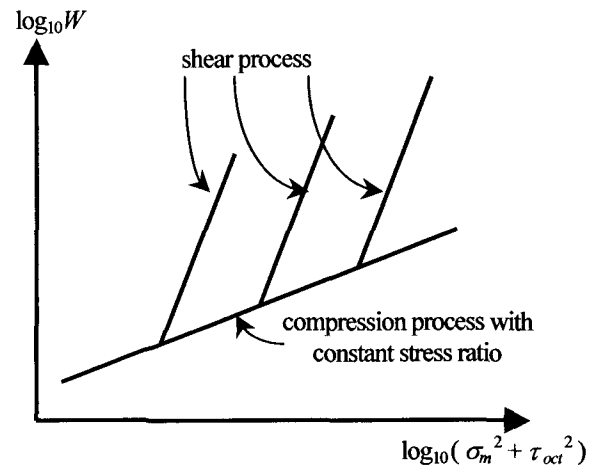
ここで, s のときのエネルギーをもつ接点を $\{N_c(s+\Delta s) - N_c(s)\}$ だけ増やし (減らし), 総和エネルギーをその時の接点の総数で除すと同様に平均値を示すことから, 式(14)が成立する。

$$\mu_{W(s)} = \frac{1}{N_c(s+\Delta s)} \sum_{k=1}^{N_c(s+\Delta s)} W_k(s) \quad (14)$$

式(14)は, 応力状態が s から $s+\Delta s$ に変化する場合において, 増加 (あるいは減少) した接点数における平均エネルギーが $\mu_{W(s)}$ であることを意味している。図-1 で示したように全粒子接点数は $\phi 50\text{mm} \times 100\text{mm}$ の円柱粒状体でも10万~1兆個ある (かつ整数である) ので式(14)は近



(a) $W \sim \sigma_m \sim \tau_{oct}$ 空間の模式図



(b) $\log_{10} W \sim \log_{10} (\sigma_m^2 + \tau_{oct}^2)$ 関係

図-2 エネルギー曲面³⁾

似的に成立すると考えられる。エネルギーと接点数との間には, 次式が成り立つ。

$$W(s) = N_c(s) \mu_{W(s)} \quad (15)$$

式(12)に式(13)~(15)および式(5)を代入すると, 次式が得られる。

$$dW = \sum_{k=1}^{N_c(s+\Delta s)} dW_k - W(s) dR_v \quad (16)$$

式(16)の右辺は第1項が粒子接点での連続的な変化, 第2項が粒子接点の不連続な変化 (接点の発生・消滅) を表していると解釈できる。また, 第2項には応力状態 s におけるエネルギーの影響が考慮されている。ここで, 第1項が粒子接点での連続的な変化を表していることから, 巨視的な dW と第1項が対応すると考え, 次のよう

に設定したパラメータ λ (dW の係数)を用いる。

$$\lambda dW = \sum_{k=1}^{N_c(s+\Delta s)} dW_k \quad (17)$$

ただし、式(16)より、 $dR_v=0$ のときは、 $\lambda=1$ であり、 dW は式(16)の第1項と等しい。また、式(8)より圧縮過程なら $dR_v<0$ であるので式(16)および式(17)より $\lambda<1$ であり、膨張過程なら $dR_v>0$ より $\lambda>1$ である。式(17)からわかるように「 λ は外力による巨視的なエネルギー増分を微視的なエネルギー増分に変換する際のエネルギー効率を表している。孤立系では、仕事によるエネルギー増分が熱に変換される場合と、熱が仕事に変換される場合とではエネルギー効率は異なる（熱を仕事に変換する効率の方が必ず小さくなる）という熱力学の第2法則（エントロピー増大の法則）がある。仕事が熱に、あるいは熱が仕事に変換されるという現象が本論文では粒子接点数の発生と消滅とに対応する。粒子接点はエネルギーを間隙物質から奪うことで発生し、エネルギーを間隙物質に与えることで消滅するという考え方をを用いているからである。式(17)は接点の発生・消滅を混合した全体のエネルギー効率を表している。すなわち、 $\lambda>1$ であるというのは熱を奪う現象の方が卓越していることを示し、 $\lambda<1$ であるというのは熱を放出する現象の方が卓越していることを示しているのであって、これと式(8)を比較することではじめて $\lambda>1$ が膨張過程を示し、 $\lambda<1$ が圧縮過程を示すことがわかるのである。一方、 λ は外から加えられるエネルギーの $N_c(s+\Delta s)$ 個の各接点への分配方法を意味しており、 λ は分配方法や粒子接点数に依存する無次元量である。実際には接点の発生と消滅でのエネルギー効率は異なることから接点の発生と消滅について分けて取り扱うことを考える必要がある。」

dR_v について整理すると、次式が得られる。

$$dR_v = \frac{(\lambda-1)}{W(s)} dW \quad (18)$$

式(18)の両辺を積分すると次式のようにになる。

$$R_v = (\lambda-1) \ln W(s) + C' \quad (19)$$

C' : 積分定数

粒状体の初期状態に $s=s_0$ 、 $R_v=0$ を基準にとると、 C' が求まるので、 R_v は次式で表される。

$$R_v = (\lambda-1) \ln \frac{W(s)}{W(s_0)} \quad (20)$$

$W(s)$ と $W(s_0)$ との差を ΔW とおく。式(20)においてテイラー展開を行い、 ΔW の高次項を無視したものを次式に示す。

$$R_v = (\lambda-1) \frac{\Delta W}{W(s_0)} \quad (21)$$

$W(s_0)$ は基準となるエネルギーを表す量であり、絶対温度 T をとった場合、 $\Delta W/W(s_0)$ (あるいは $dW/W(s_0)$) は熱力学的エントロピーを意味する。接点数変化率はエントロピーと関係することがわかる。

4. 試験データに基づく接点数変化率に関する考察

東九州自動車道清武IC (宮崎県) 付近の盛土から採取した攪乱した二次しらすを用いて行った、三軸圧縮試験の結果^{6),7)}をもとに考察をおこなう。用いた試験装置は、二重セル型の三軸試験装置であり、圧密排水条件で三軸試験をおこなった供試体の寸法は、 $\phi 50\text{mm} \times 100\text{mm}$ で、自然含水比で締固め度を $D_c = 80, 90, 100\%$ の3種類に変えて作製し、二重負圧法を用いて飽和させた。せん断試験の拘束圧 σ_c は30, 60, 120 kPaとし、せん断ひずみ速度は0.1%/minで、軸ひずみ20%程度まで計測を行った。表-1に試験に用いた試料の物理試験結果、表-2には締固め度、拘束圧で分けた試験データのケース番号を示している。ただし、試験データからエネルギー W を求める際には、次式を用いている（応力～ひずみ曲線を各軸方向に数値積分（台形積分）をおこなっている）。

$$W = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N \left[\frac{\sigma_i(j) + \sigma_i(j+1)}{2} \cdot (\varepsilon_i(j+1) - \varepsilon_i(j)) \right] \quad (22)$$

$\sigma_i (i=1, 2, 3)$: 主応力, $\varepsilon_i (i=1, 2, 3)$: 主ひずみ, j : データ番号 (軸ひずみの小さい順に $j=1, \dots, N$), N : 全データ数

図-3には三軸試験結果より得られたエネルギー～合応力関係（縦、横両軸とも自然対数を用いた）を示している。ただし、軸差応力がピーク値に達するまでについて示している。ここで、横軸には粒状体における潜在すべり面と考えられている松岡・中井⁸⁾の提案する空間滑動面 (SMP) 上の垂直応力 σ_{SMP} とせん断応力 τ_{SMP} により表される合応力 ($\sigma_{\text{SMP}}^2 + \tau_{\text{SMP}}^2$) を用いている。SMPを用いたのは、粒子接点の連続的な変化にマルコフ過程を適

用するに際して、潜在すべり面として SMP を採用しているためである。

CASE1, 2, 3 を比較すると、それぞれ直線的にエネルギーが増加していることがわかる。CASE1, 2, 3 の順に合応力は増加しており、エネルギー～合応力関係はそれぞれほぼ平行である。したがって、エネルギー～合応力関係は拘束圧の増加に伴い、平行移動するとおもわれる。次に CASE1, 4, 7 では初期の変形過程ではほぼ重なっていることがわかる。そして、合応力がある値より大きくなると CASE4, 7 は別の経路を取り始め、しばらくすると、CASE4 は CASE7 と別の経路をとる。また、枝分かれしたあとの経路は CASE1 におけるエネルギー～合応力関係とほぼ平行である。また、CASE1, 2, 3 が直線的な傾向を示しているのは締固め度が小さいためとおもわれ、CASE4, 7 が CASE1 から枝分かれする経路は締固めエネルギーが CASE1 より大きいためとおもわれる。そして CASE4 は CASE7 より締固めの影響が小さいために CASE7 から途中で枝分かれするとおもわれる。このことは CASE2, 5, 8 の関係および CASE3, 6, 9 の関係においても同様の傾向がみられる（図中、せん断過程（緩状態）、せん断過程（密状態））。次に、拘束圧一定の等方圧縮過程では、合応力は変化しないが、変形は進行する。合応力が変化を開始する点を結んだ線は等方圧縮過程を示す線となる（図中、等方圧縮過程）。CASE1, 2, 3 のピーク（図では軸差応力のピークまでの経路を示しているのでエネルギーのピークは軸差応力のピークと一致している）を結んだ線は粒状体の緩い状態における破壊曲面をあらわし（図中、破壊曲面（緩状態））、CASE7, 8, 9 のピークを結んだ線は密な状態における破壊曲面（図中、破壊曲面（密状態））を表しているとおもわれる。そして、緩い状態における破壊曲面と密な状態における破壊曲面および等方圧縮過程の曲面はそれぞれほぼ平行であることがわかる。また、CASE1 から CASE4, 7, CASE2 から CASE5, 8, CASE3 から CASE6, 9 に枝分かれする点を結ぶ（図中、弾性限界曲面）と二つの破壊曲面および等方圧縮過程の傾きにはほぼ平行であることがわかる。この点に達するまでの領域では変形が微小な領域であり、そのため可逆的な変形とおもわれるので、それを結んだ線は可逆的な変形の限界（弾性限界）をあらわしているとおもわれる。

これらの曲面を表す直線は傾き a 、切片 d として式で表すと次式となる

$$\ln W = a \ln \sqrt{\sigma_{SMP}^2 + \tau_{SMP}^2} - d \quad (23)$$

（図-3 よりせん断過程（緩状態）における a は 9、せん断過程（密状態）における a は 5）。

図-4 には図-3 に示したせん断過程（緩状態）を近似した直線の切片と拘束圧関係を示している。また、図中には

表-1 物理特性（清武しらす）

土粒子密度 g/cm^3	2.52
自然含水比 %	25
最適含水比 %	31
最大間隙比	1.65
最小間隙比	1.03
最大乾燥密度 g/cm^3	1.26

表-2 ケース番号

	締固め度 $D_c(\%)$	拘束圧 $\sigma_c(kPa)$
CASE1	80	30
CASE2	80	60
CASE3	80	120
CASE4	90	30
CASE5	90	60
CASE6	90	120
CASE7	100	30
CASE8	100	60
CASE9	100	120

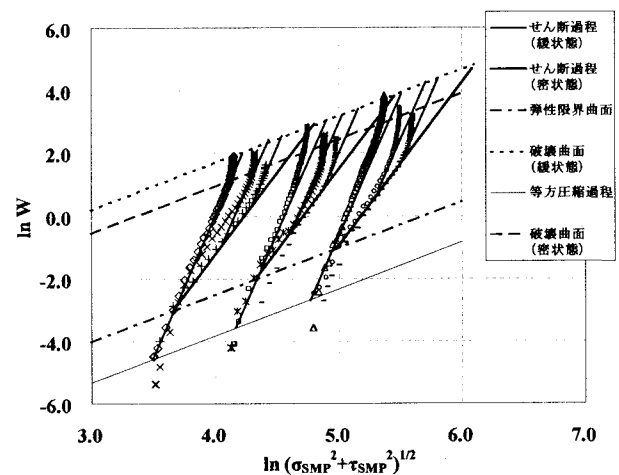


図-3 三軸試験結果およびエネルギー曲面（プロットは左から、CASE 1, 4, 7, CASE 2, 5, 8, CASE 3, 6, 9 を表している。）

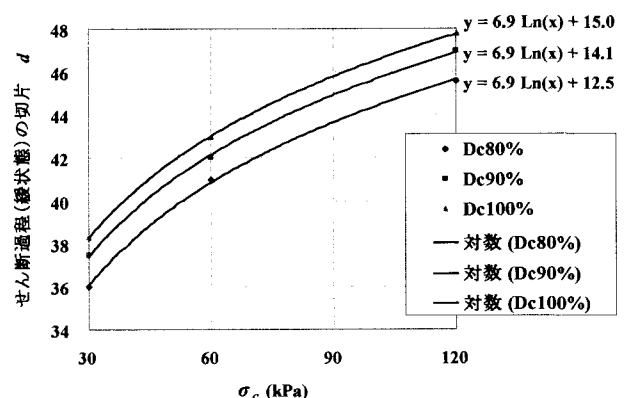


図-4 せん断過程（緩状態）の切片～拘束圧関係

この関係を対数関数で近似した曲線を示している。 $D_c = 80, 90, 100\%$ ともこの対数近似曲線の傾きが同じであることがわかる。したがって、切片は拘束圧の対数をとることで評価され、その傾きを d_1 、切片を d_2 とおくと、

$$d = d_1 \ln \sigma_c + d_2 \quad (24)$$

図-5 には $d_2 \sim D_c$ 関係を示している。図中には線形近似式を示しており、線形式との誤差はそれほど大きくないようにおもわれる。 d_2 の値が締固め度により決まる場合でも、エネルギー曲面を描くには、基準となる拘束圧・締固め度での試験と、締固め度が同じで拘束圧の異なる試験と、締固め度が異なり拘束圧が同じである試験を行う必要があり、最低でも試験を3つ行う必要がある。

図-6 にはせん断過程（密状態）における切片～拘束圧関係を示している。この図から、図-4 と同様に拘束圧の対数をとることでせん断過程（密状態）における切片は評価することが可能であるとおもわれる。

図-7 には接点数変化率～エネルギー関係を示している。横軸は自然対数表示である。図-7 より、 $\ln W$ がゼロまでは R_v はほぼゼロであり、 $\ln W$ がゼロよりある程度大きくなってくると、ある傾きで増加し始めることがわかる。その傾きは CASE3 を除いた多くの CASE においてあまり大差ないようにおもわれる。一方、その直線に移行する際のエネルギー点はそれぞれ異なっている。これは、式(20)において、実際にはエネルギー W を $W(s_0)$ により除す必要があることと関連しているとおもわれる。しかし、 $W(s_0)$ は粒状体におけるエネルギーの初期状態を表しているが、 $W(s_0)$ をゼロとすると分母が 0 となるため式(20)を解くことができない。したがって、最適な $W(s_0)$ を選ぶ必要があるとおもわれる。 $W(s)/W(s_0)$ の代わりに次式に示す諸戸⁹⁾の巨視的なエントロピー S を導入することを考える。

$$S = \frac{1}{p} \int dW \quad (25)$$

p : 平均主応力。

諸戸は p のかわりに最小主応力や単純せん断における垂直応力なども用いることができると述べている¹⁰⁾。式(20)に S を代入して整理すると、

$$R_v = (\lambda - 1) \ln S - (\lambda - 1) \ln \frac{W(s_0)}{p} \quad (26)$$

上式において、 $W(s_0)$ が p に等しい場合、右辺第二項を無視することができる。また、このことから、接点数

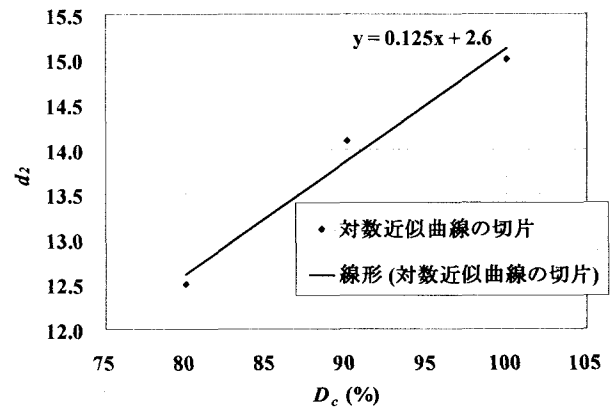


図-5 $d_2 \sim D_c$ 関係

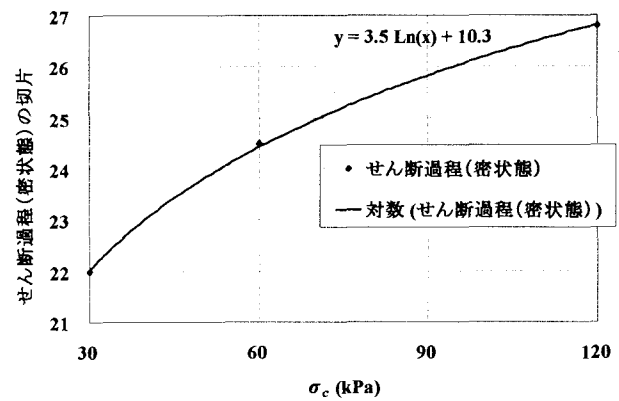


図-6 せん断過程（密状態）の切片～拘束圧関係

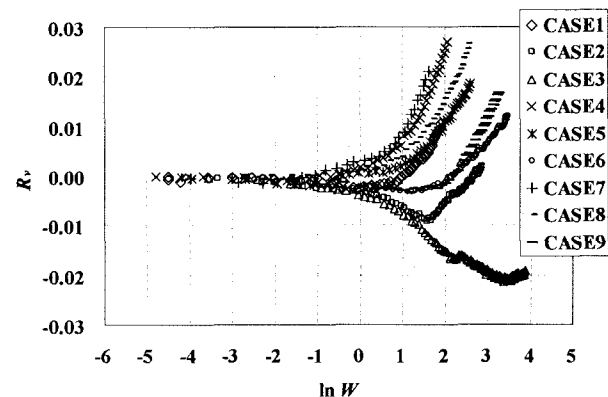


図-7 接点数変化率とエネルギー関係

変化率～エネルギー関係、接点数変化率～エントロピー関係のどちらにおいても傾きは $\lambda - 1$ であることがわかる。ただし、エネルギーを p で除すと p 方向の仮想的なひずみを表す量となる。したがって、 p 方向の仮想的なひずみが粒子接点の発生や消滅とどのように関連しているかを明らかにする必要がある。仮想的なひずみと粒子接点の発生・消滅との関連を明らかにする試みの第一段階として以下に考察を述べる。

R_v のうち、粒子接点の発生に関する量を R_o 、消滅に関する量を R_d とおき、 R_v は応力状態の変化に伴う粒子接点の消滅を正にとっているため、 R_v が R_d と R_o との差、

$\lambda-1$ が λ_d と λ_a との差で表される。式(26)における p に対応するものとして p_d , p_a を用いると次式で表される。

$$\begin{aligned} R_v &= R_d - R_a \\ &= \lambda_d \left(\ln \frac{W(s)}{p_d} - \ln \frac{W(s_0)}{p_d} \right) - \lambda_a \left(\ln \frac{W(s)}{p_a} - \ln \frac{W(s_0)}{p_a} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

さらに、 R_a は常に $R_a \geq 0$ である必要がある(負の場合、消滅を意味してしまうため)。軸圧縮過程では、常に軸圧縮するので次式のように表すことができる。

$$R_a = -\ln \frac{H(s)}{H(s_0)} \quad (28)$$

$H(s)$, $H(s_0)$: s , s_0 における粒状体の高さ。

粒状体に潜在的なすべり面がある場合、粒子接点の発生(R_d)はその潜在すべり面に平行な方向に卓越する(潜在すべり面へ指向する)とおもわれる。粒状体における潜在すべり面として、松岡・中井⁹⁾の提案する空間滑動面(SMP)を導入すると、SMPに平行なせん断応力 τ_{SMP} が指向させる働きをしていると考えられる。このとき、 p_a には τ_{SMP} が該当する。そこで、次式により表されるような量 S_T を導入する。

$$S_T = \frac{W}{\tau_{SMP}} \quad (29)$$

図-8には三軸試験結果より得られた $R_d \sim \ln S_T$ 関係を示している。どのCASEにおいても同じような経路をとることから R_d と $\ln S_T$ には一義的な関係があるとおもわれる。接点の発生において、熱を仕事に変える必要があることを述べたが、 S_T はせん断応力あたりのエネルギー(せん断に伴う仮想的な熱)を評価したものである。

一方、粒子接点の消滅に関する量 R_b は、SMPに垂直な応力 σ_{SMP} と関係があると考えられる。このとき、 p_d には σ_{SMP} が該当する。そこで、次式により表されるような量 S_N を導入する。

$$S_N = \frac{W}{\sigma_{SMP}} \quad (30)$$

図-9には三軸試験結果より得られた $R_d \sim \ln S_N$ 関係を示している(R_d は R_v と R_a を用いて式(27)から算出される)。

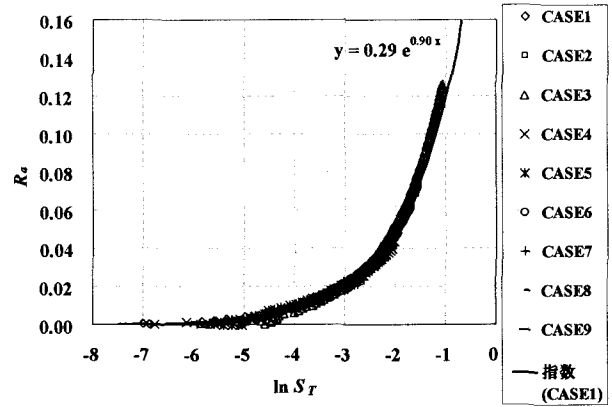


図-8 $R_d \sim \ln S_T$ 関係

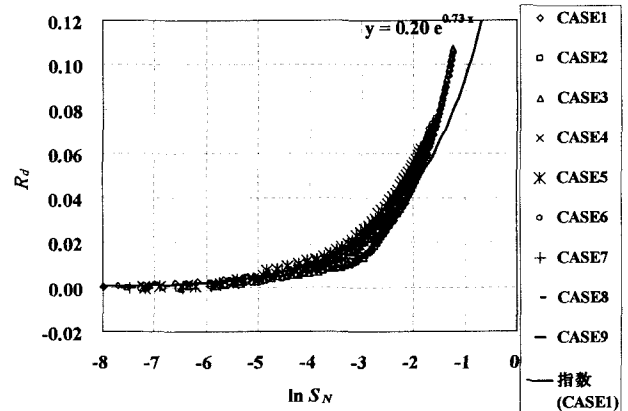


図-9 $R_d \sim \ln S_N$ 関係

図-9においても多少のばらつきはあるが、ほぼ一義的に表されている。接点の消滅を評価する際において、仕事を熱に変える必要がある(接点が消滅する際には熱を放出するという考え方をういている)が、これは外力による変形に伴う仕事であるために拘束圧に着目する必要がある。図-8,9にはCASE1における実験結果の指数近似式を示してある。この近似式は式(27)における $W(s_0)$ 項を無視した場合における式(30)や式(31)を利用した考え方を示している。実際には、 λ (もしくは λ_d , λ_a) がエネルギーの分配方法(分け方に依存するものでエネルギーそのものには依存しない)や粒子接点数、間隙物質への熱伝導率などの無次元量に影響されるとおもわれるが、本論文ではそれらを個別に求めるのではなく、実験結果を利用して大局的に求めることを目指している。

5. 応力～ひずみ関係の算出

5.1 北村モデルの概要

北村モデルでは粒状体の状態変数として粒子接点角を用いている。粒子接点角とは、図-10に示すように粒子接点における接平面の法線ベクトルが直交座標軸 X_i ($i=1, 2, 3$) となす角(以下、接点角) $\eta=(\beta_1, \beta_2)$ (余弦定理より β_3 は規定できる)である。北村モデルのフローを図-11に示している。接点角の連続的な変化にはマルコ

フ過程を適用している。基礎方程式は、式(31)のように表される。この変形過程での粒子の挙動は、初期接点角分布をもつ粒子接平面が、せん断の推移とともに潜在すべり面に平行になるように指向するという仮説を導入して、基礎方程式の係数 (*drift vector* と *diffusion tensor*) を決定している。パラメータには応力の変化を用い、また状態の遷移過程には剛体粒子の可逆と非可逆の移動の可能性を定めるポテンシャル障壁の概念を導入している。不連続運動の生起確率はマルコフ過程とは独立に求め、連立させて応力～ひずみ関係を導いてきている。

$$\frac{\partial}{\partial s} \omega(\eta, s) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial \beta_i} \{ A_i(\eta, s) \omega(\eta, s) \} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta_i^2} \{ B_{ii}(\eta, s) \omega(\eta, s) \} \quad (31)$$

$$A_i(\eta, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\beta_{i,s+\Delta} + \beta_{i,s}) P(\eta_s, \eta_{s+\Delta}) d\beta_1 d\beta_2 \quad (32)$$

$$B_{ii}(\eta, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\beta_{i,s+\Delta} + \beta_{i,s})^2 P(\eta_s, \eta_{s+\Delta}) d\beta_1 d\beta_2 \quad (33)$$

$$\text{ただし, } |\beta_1| \geq \left| \beta_2 - \frac{\pi}{2} \right| \quad (34)$$

s : 応力状態を表す,

$\omega(\eta, s)$: 応力状態変化に伴う接点角分布を与える確率密度関数,

$A_i(\eta, s)$: 接点角変化量の平均 (*drift vector*),

$B_{ii}(\eta, s)$: 接点角変化量の二乗平均 (*diffusion tensor*),

Δ : s の増分,

$\beta_{i,s}$: s における X_i 軸に対する接点角,

$\beta_{i,s+\Delta}$: $s+\Delta$ における X_i 軸に対する接点角,

$P(\eta_s, \eta_{s+\Delta})$: 接点角変化の遷移確率,

η_s : s における接点角,

$\eta_{s+\Delta}$: $s+\Delta$ における接点角。

s には応力状態を表す最適なパラメータが必要であるが、せん断過程では SMP 上でのせん断垂直応力比 τ_{SMP}/σ_{SMP} を、圧縮過程では SMP 上の垂直応力 σ_{SMP} をとる。したがって、圧縮過程、せん断過程とも表すことができる。

5.2 北村モデルと三軸試験結果との比較

北村モデルによるせん断過程の応力～ひずみ曲線の評

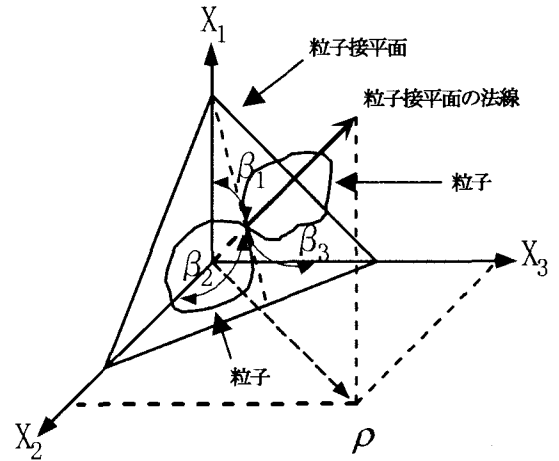


図-10 接平面と粒子間力

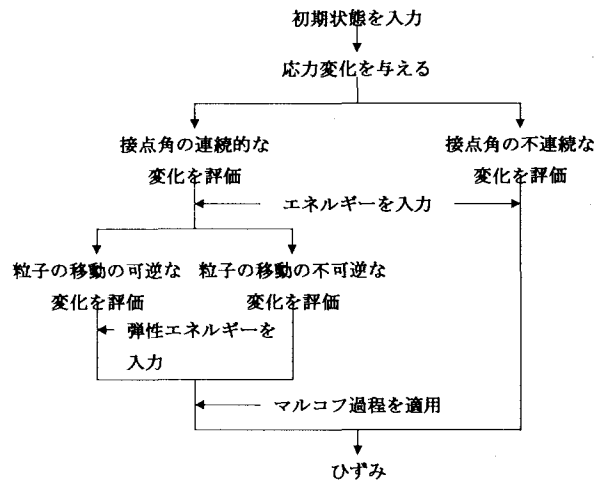


図-11 北村モデルのフロー

価を行う。せん断過程 (緩状態)、せん断過程 (密状態) におけるエネルギーの算出式は次式を用いている。

せん断過程 (緩状態) (参照：式(22)および図-4、図-5)

$$\ln W = 9 \ln \sqrt{\sigma_{SMP}^2 + \tau_{SMP}^2} - (6.9 \ln \sigma_c + 0.125 D_c + 2.6) \quad (35)$$

せん断過程 (密状態) (参照：式(22)および図-6)

$$\ln W = 5 \ln \sqrt{\sigma_{SMP}^2 + \tau_{SMP}^2} - (3.5 \ln \sigma_c + 10.3) \quad (36)$$

接点の発生・消滅については、図-6、図-7 に示している CASE1 における指数関数近似曲線を用いた。この他に必要なパラメータを表-3 に示している。初期接点角分布は、小田^{11), 12)}の実験的研究成果より五角形とし、さらに最大と最小高さの比を 3 : 1 と仮定¹³⁾している。粒子間摩擦係数は松岡・中井¹⁰⁾のストレス・ダイレイタンスー式を利用している。すなわち、実験データを整理し、縦軸切片 μ (垂直ひずみ増分がゼロの時の応力比) を求め、

それを粒状体の平均的な粒子間摩擦係数としている。図-12, 13 には北村モデルに接点の発生・消滅率を代入することにより得られた軸差応力～軸ひずみ, 側方ひずみ関係 (図中, 解析結果) と三軸試験結果 (図中, 試験結果) を CASE1 ($D_c = 80\% \cdot \sigma_c = 30\text{kPa}$), CASE9 ($D_c = 100\% \cdot \sigma_c = 120\text{kPa}$) について示している。

図-12 をみると, 初期の応力段階では, 応力の増加に伴い軸ひずみが減少する挙動が解析結果にみられる。そして軸ひずみが一旦減少し, 徐々に増加に向かうことがわかる。軸ひずみの増加する過程においては, 解析結果の方が試験結果よりも同じ応力値における軸ひずみの値は若干小さいことがわかる。側方ひずみについては初期の応力段階では解析結果との一致はよいとおもわれるが, 軸差応力が約 100～150kPa においては試験結果よりも側方ひずみは大きい値を取り始め, 約 150～180kPa においては試験結果に近づくが約 180kPa 以上では, 試験結果よりも側方ひずみは小さいことがわかる。

図-13 においても図-12 と同様に, 応力段階の初期において, 軸ひずみがかなり大きい値を示しており, 徐々に軸ひずみが小さくなり, 軸差応力が 200kPa 前後で試験結果と一致することがわかる。その後, 試験結果より小さい軸ひずみの値をとることがわかる。側方ひずみについては初期の応力状態から試験結果より若干大きい値をとっており, 軸差応力が 850kPa 前後で試験結果と解析結果が交わり, その後解析結果の方が試験結果より小さい側方ひずみをとることがわかる。

図-12, 13 に示した解析結果のせん断初期およびピーク値付近での試験結果との差異が生じた原因のひとつとして, 式(29)を用いたことが挙げられる。式(27)の $W(s_0)$ 項を無視して解くために, p_d に τ_{SMP} を用いたが, せん断過程の初期状態においては τ_{SMP} の値が 0 に近く, 式(35)で与えられる W に対して式(29)の値は発散する傾向があらわれた。せん断過程の初期において τ_{SMP} よりも大きいせん断応力が生じているか, または式(35)ではせん断初期における W を大きく評価していることが考えられる。一方, 式(30)では p_d に σ_{SMP} を用いており, この場合, 初期には等方圧状態が該当するために, σ_{SMP} は 0 に近い値とはならないため発散しない。図-8, 図-9 における指数近似曲線は図-8 の方が精度よく近似できており, 本来は軸ひずみを表す挙動の方が試験結果に近づくと考えられるので, エネルギーの初期状態における評価が妥当であれば本手法より精度良く応力～ひずみ曲線を表すことができるとおもわれる。

次にエネルギー曲面から応力～ひずみ曲線の差異への影響を考察する。図-14 および図-15 には CASE1 ($D_c = 80\% \cdot \sigma_c = 30\text{kPa}$), CASE9 ($D_c = 100\% \cdot \sigma_c = 120\text{kPa}$) における軸差応力～エネルギー関係を示している。

図-14 をみると, 全体的に解析結果の方が試験結果より軸差応力が大きいことがわかる。したがって, 図-12 において同じ軸ひずみの値における軸差応力は解析結果

表-3 入力パラメータ

Dc(%)	80	90	100
初期間隙比	1.5	1.2	1.1
初期高さ(cm)	10		
初期直径(cm)	5		
粒径平均(cm)	0.02		
初期接点角分布	0.159		
粒子間摩擦係数	0.3		

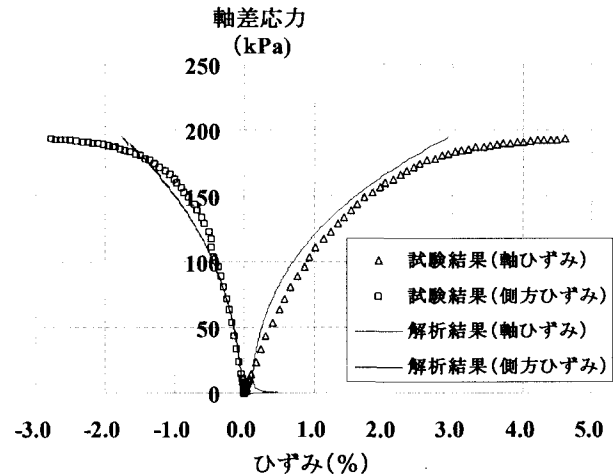


図-12 CASE1 における応力～ひずみ関係

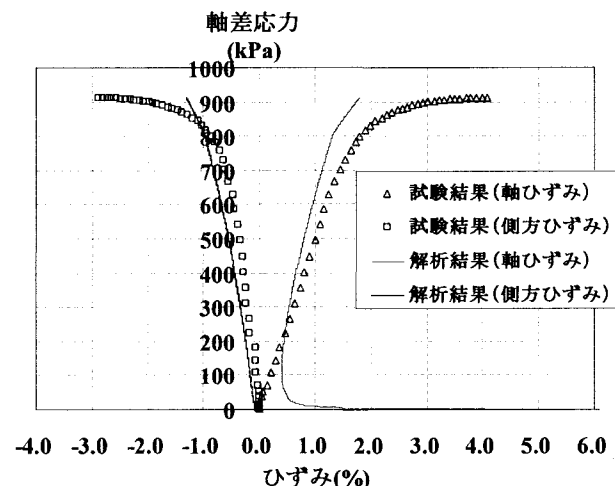


図-13 CASE9 における応力～ひずみ関係

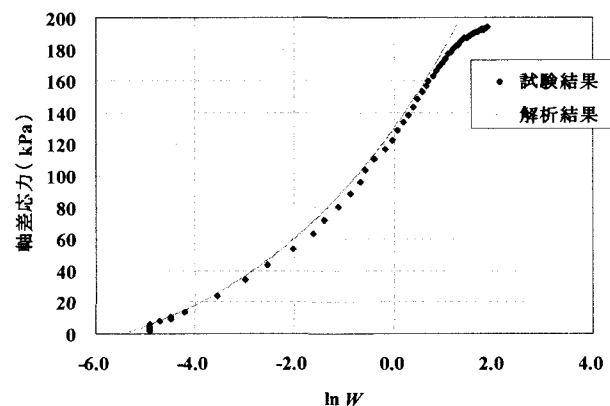


図-14 CASE1 における軸差応力～エネルギー関係

の方が大きくなることが説明できる。また、軸差応力が180kPa 以上において試験結果と解析結果に比較的大きな誤差が生じてくることがわかる。

図-15 をみると解析結果と試験結果が交わっていることがわかる。そのため図-13 における解析結果と試験結果は軸ひずみの挙動について交わったのではないかと考えられる。軸差応力が100kPa 以下において軸差応力が0 に近づくほど試験結果と解析結果がかなり大きく外れることがわかる。したがって、エネルギー曲面については応力状態の初期段階およびピーク値付近についてある程度近似の精度をあげる必要があるとおもわれる。一方、軸差応力が850kPa 以上になると、図-14 と同様に解析結果と試験結果に比較的大きな誤差がみうけられる。エネルギー曲面をより合理的に評価すること（例えば、図-3 で示した破壊曲面近傍におけるエネルギー挙動を評価する式を導入するなど）により、応力～ひずみ曲線は北村モデルで試験結果に十分近づけることは可能であるとおもわれる。また、式(29)や式(30)を用いた場合、接点数の発生・消滅率はエネルギーに依存する量となるので、エネルギー曲面をより合理的に評価することにより精度を上げることにつながるものとおもわれる。図-8,9 のようにどのCASE においてもほぼ同じ経路をとり、一義的な関係で求められることが期待できれば、三軸試験を一回行うのみで式(29)や式(30)を用いて接点数の発生、消滅率は算出することが可能である。

6. おわりに

「粒子接点の不連続な挙動」を表すパラメータとして「粒子接点の発生・消滅」を表すパラメータが粒状体の体積や粒状体に与えられたエネルギーと関連づけられることを示した。また、三軸試験を行い、そこで得られた「粒子接点の発生・消滅」を表すパラメータと諸戸のエントロピーと比較し、そのパラメータが諸戸のエントロピーにより一義的に表されるパラメータとおもわれることを示した。さらに、そこで得られた粒子接点の発生・消滅～体積変化～エネルギー関係を北村モデルに導入することで得られる応力～ひずみ関係について若干の考察をおこなった。その結果、その「粒子接点の発生・消滅」を表すパラメータと諸戸のエントロピーとの関係は側方ひずみについては良好な傾向がみられたが、軸ひずみについてはせん断過程の初期状態において発散する傾向がみられた。

今後の課題として、エネルギー曲面を破壊面近傍や初期状態において、より合理的に評価することのできるように実験精度を向上させることが必要である。接点数変化率～エネルギー関係におけるパラメータ λ の材料依存性、エネルギー効率、熱伝導率、分配関数との関連性などについて考察を行う必要がある。

本研究に対して科研費（基盤(B), No.13450196, 代表北村良介)の援助をいただいた。ここに謝意を表します。

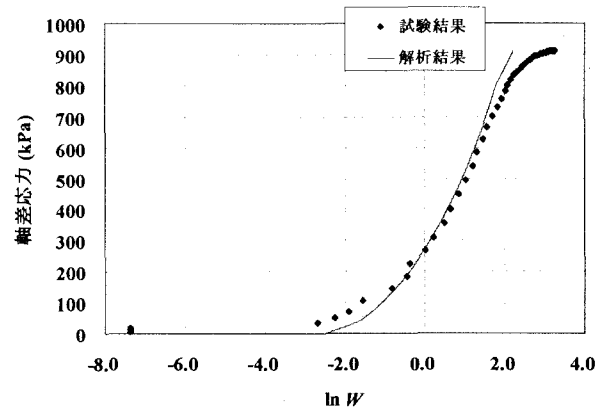


図-15 CASE9 における軸差応力～エネルギー関係

【参考文献】

- 1) Ryosuke Kitamura : A mechanical model of particulate material based on stochastic process, Soils and Foundations, Vol.21, No.2, pp.64-72, 1981.
- 2) Ryosuke Kitamura : Analysis of deformation mechanism of particulate material at particle scale, Soils and Foundations, Vol.21, No.2, pp.85-98, 1981.
- 3) 北村良介：マルコフ過程を用いた粒状体の力学，科研費報告書(No.60550355), 1987.
- 4) Field, W.G : Towards the statistical definition of a granular mass, Proc. 4th A. and N.Z. cont. on Soil Mech., pp.143-148, 1963.
- 5) Oda, M.: Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material, Soils and Foundations, Vol.17, No.2, pp.29-42, 1977.
- 6) 牛嶋國雄ら：不飽和しらすのせん断強度特性，第38回地盤工学研究発表会, pp.1339-1340, 2003.
- 7) 荒木功平ら：攪乱飽和と二次しらすの力学特性について，第39回地盤工学研究発表会, 2004（掲載予定）.
- 8) Matsuoka, H. and T. Nakai : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, Proc. Japan Society of Civil Engineers, 232, pp. 59-70, 1974.
- 9) Moroto, N. : A new parameter to measure degree of shear deformation of granular material in triaxial compression tests, Soils and Foundations, Vol. 16, No. 4, pp. 1-10, 1976.
- 10) 粒状体力学に関する国内委員会 社団法人 土質工学会：粒状体の力学，pp. 30-32. 1993.
- 11) Masanobu ODA: Initial fabric and their relations to mechanical properties of granular material, Soils and Foundations, Vol.12, No.1, pp.17-36, 1972.
- 12) Masanobu ODA: The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, Soils and Foundations, Vol.12, No.2, pp.1-17, 1972.
- 13) 福原清作，植村桂樹，北村良介：水の浸透による不飽和粒状体の崩壊挙動のモデル化，応用力学論文集，Vol.1, pp.757-766, 1998.

(2004年4月16日)