

粒状体の誘導異方性について

On the stress-induced anisotropy of granular materials

佐武正雄*

Masao SATAKE

*名誉会員 工博 東北大学名誉教授 (〒982-0801 仙台市太白区八木山本町 1-5-1-201)

The stress-induced anisotropy is one of the most important mechanical properties of granular materials. This paper proposes a new theory on this property. First, the features of the induced anisotropy are summarized and how to measure the anisotropy is described explaining the fabric tensor and defining the inductivity degree of anisotropy α . The proposed theory is based on the theory of space-mapping by a tensor, and the property that the force-line graph tends to coincide with the particle graph under a monotonic loading is assumed. This property is considered a most remarkable property in the induced anisotropy. From the proposed theory $\alpha=0.5$ is derived, that agrees well with the experiment results. The modified stress is defined from the theory and it is shown that, in the granular materials, the ordinary stress is shared by the anisotropy of contact normals and the modified stress.

Key Words : granular materials, stress-induced anisotropy, fabric tensor, modified stress

1. まえがき

粒状体が誘導異方性をもつことは、以前から知られているが、その性状、理論については未だ明確な議論がなされていない。本文はまず、数値実験などによって現在誘導異方性について知られている現象をまとめ、また誘導異方性の記述方法としてファブリックテンソルや異方性誘導度 α について説明する。次に、テンソルによる空間の写像が粒状体の異方性導入を表現できることを応用し、誘導異方性として観察されている“粒子接触力の摩擦角を減少させ力の伝達を安定化する”という性質を実現するような写像を与え、粒状体に異方性を導入する。異方性導入が完全な場合には $\alpha=0.5$ となり、実験結果に適合することを説明する。また、この場合のファブリックテンソルによって導入される修正応力について力学的役割を説明する。粒状体は離散的な材料であるが、本論文の理論解析は連続体力学に立脚し、粒状体に生じる誘導異方性を連続体における接続の異方性として捉えるものである。

ここで取扱う粒状体は円（または球形）の粒子集合体とし、主として 2 次元で説明する。単純な主軸の回転を伴わない単調載荷を考え、応力の主軸座標を用いる。ベクトル、テンソルは原則的に指標を付さないシンボリック表現（ボールド体）とし、説明のため、場合によつ

て指標表現を用いる。本論文で用いる主な記号は次の通りである。

 Φ : 写像テンソル F : ファブリックテンソル ϕ : 誘導異方性のファブリックテンソル $\bar{\sigma}$: (誘導異方性による) 修正応力 t : 中井の修正応力 W : 仕事テンソル $\bar{W}$: 修正仕事テンソル n : 接触法線、または接続ベクトル $\bar{f}$: 修正応力ベクトル α : 異方性誘導度 $f(n)$ または $f(\theta)$: n の確率密度関数 ϕ : 応力ベクトルの摩擦角 $\bar{\phi}$: 修正応力ベクトルの摩擦角 $\bar{W}$: 修正仕事

2. 力線グラフ

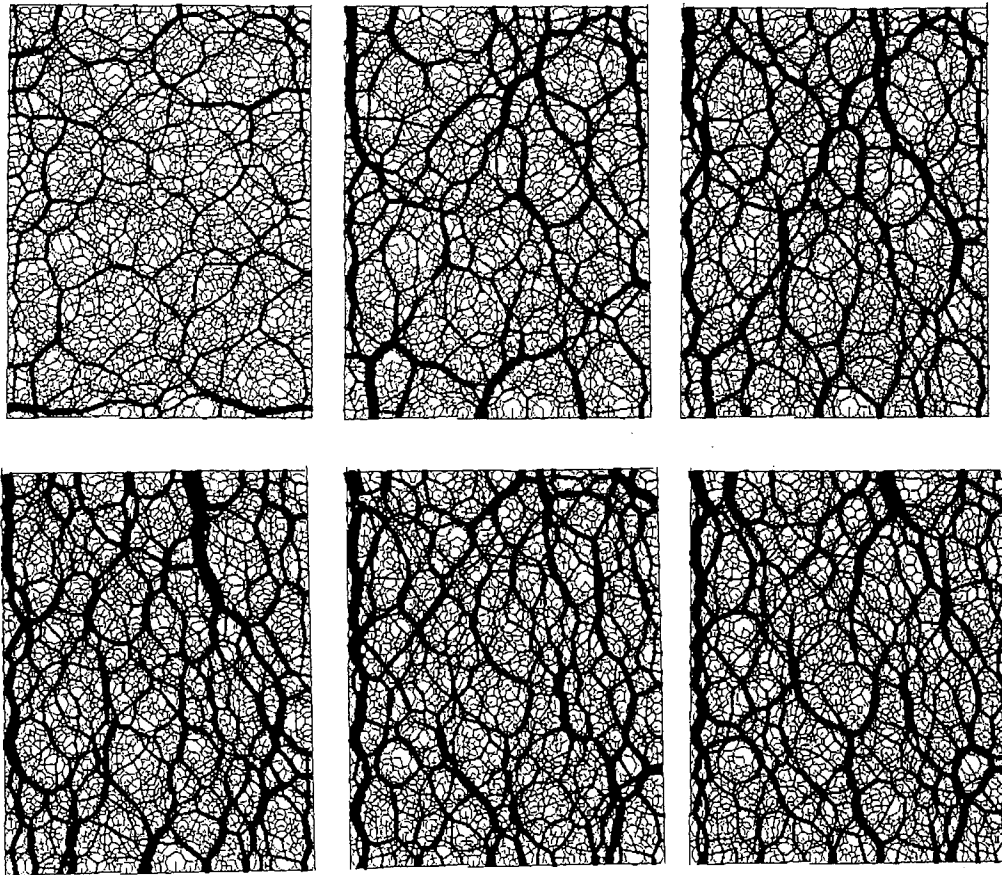


図-1 GEMによる二軸圧縮試験（土倉¹⁾による）

図-1はGEM（粒状要素法）による二軸圧縮試験の一例¹⁾で、上下方向が大きい主応力 σ_1 の方向である（載荷にしたがって上段左から下段右に向かう）。図からまず、上下方向の力線が太く成長してゆく状況が分かる。ここに言う力線とは、粒子から粒子への力の伝達を示す線で、個々の接触点において接触力をその方向のその大きさに比例する太さの線分で描いたものである。この個々の線分は、初期状態では必ずしも厳密に連結していない。しかし、載荷が進むにしたがって連結した線となり全体として力線グラフを形成するようになる。力線グラフは接触する粒子の中心を連ねて作られる粒子グラフとは異なるものであることに注意する。この力線グラフについて、一般的に次のようなことが観察される。

- 1) 力線グラフは骨格をつくる太い線のグラフと網目のような細い線のグラフに分けられる。前者は数個の粒子を囲むループから成り、この太い線の骨格が力の伝達に主要な役割を果たしている。
 - 2) 骨格のグラフは、単調増加の載荷状態では、載荷が進むと太さを増して成長するが、ある段階でまた作り直され、このことを繰り返す。
- 通常、力線グラフというのは太い線の骨格を指し、力のネットワークなどとも呼ばれている。性質2)から、粒状体では連続体と異なり、粒子が荷重に対応して

移動、回転し、荷重を伝達するのに最適で安定な状態（力線グラフが粒子グラフに近づき、トラス構造になる）を作り出していると思われる。このことは、後述するように、応力によって粒状体の中に異方性が導入されていることを意味している。

力線グラフとその荷重による変化の性質は、確率論的なアプローチからも研究されている²⁾。

3. 粒状体のもつ誘導異方性の解析

この節では、ファブリックテンソル、接触法線密度や異方性誘導度を説明し、これらによる粒状体の誘導異方性の記述方法について述べる。

3.1 ファブリックテンソルと接触法線密度

粒状体は種々の異方性をもっている（粒子形状、堆積など）が、小田³⁾は、粒状体の内部の接触法線—粒子の接触点における法線—の方向の頻度分布に着目して、載荷によるその変化を調べ、載荷にしたがって接触法線の頻度（密度）は、大きい主応力の方向では増加し、小さい主応力の方向では減少することを示している。こういう現象をさらに精密に調べるためにはファブリックテンソルの導入が必要となる。

ファブリックテンソルは粒状体の接触法線の異方性

を示すもので、いろいろな定義^{4,5,6,7)}があるが、2次元の標準的な定義は次式のように記述される。

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{n}) \mathbf{n} \mathbf{n} d\theta \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ は接触法線（接触点の両側の二つの粒子で考えることができ、一方を $\mathbf{n}$ （傾角 θ ）とすれば他方は $-\mathbf{n}$ （傾角 $\theta + \pi$ ）となっている）で、 $\mathbf{n}\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}$ のダイアッド積（成分は $n_i n_j$ ）を示す。 $f(\mathbf{n})$ は $\mathbf{n}$ の確率密度関数で接触法線密度と呼ばれる。2次元では $f(\mathbf{n})$ は実質 θ の関数となる。離散力学における $f(\mathbf{n})$ の考え方については5.2で考察する。また、 $f(\mathbf{n})$ を与えれば $\mathbf{F}$ が一意的に決定されるが、 $\mathbf{F}$ を与えても $f(\mathbf{n})$ は一意的には決定されないことに注意する。また

$$\text{tr} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{n}) d\theta = 1 \quad (2)$$

である。

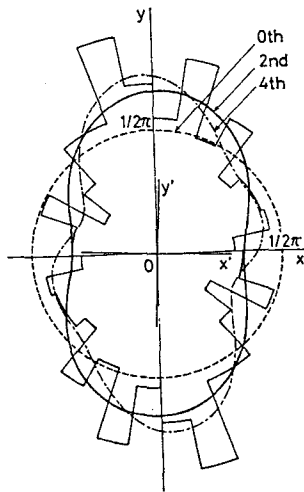


図-2 接触法線の頻度分布⁷⁾

図-2は $f(\mathbf{n})$ の実測を図示した一例で、図から明らかなように、等方性（ $f(\mathbf{n}) = 1/2\pi$ ）ではなく、異方性が示されている（この図では縦軸が大きい主応力の方向である）。金谷⁷⁾ はフーリエ級数と同様に、 $f(\mathbf{n})$ を高次のテンソルを含む級数に展開する解析を示している。すなわち

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} (D + D_{ij} n_i n_j + D_{ijkl} n_i n_j n_k n_l + \dots) \quad (3)$$

と展開する（金谷はここに現れる係数テンソルをファブリックテンソルと呼んでいる。また第3項まで図示されている）。式(3)で第2項までをとれば、 $D = 1$ であるから

$$f(\mathbf{n}) \approx \frac{1}{2\pi} (1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\mathbf{n}) \quad (4)$$

となる。 $\mathbf{D}$ は偏差テンソルで

$$\mathbf{D} = 4(\mathbf{F} - \frac{1}{2}\mathbf{I}) \quad (5)$$

とかける。ここに $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$ は単位テンソルである。 $\mathbf{F}$ の主軸の方向（ σ と共軸と考えられる）に座標軸をとり

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} F_1 & \\ & F_2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

とおく。 F_1, F_2 は $\mathbf{F}$ の主値（ $F_1 \geq F_2$ ）で、式(5)、(6)を用いれば

$$\begin{aligned} f(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2\pi} (4\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\mathbf{n} - 1) \\ &= \frac{1}{2\pi} (1 + d \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \{1 + 2(F_1 - F_2) \cos 2\theta\} \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。式(7)は $f(\mathbf{n})$ を $\mathbf{F}$ で表した一つの逆表現（一意的ではない）であり、2, 3行目は $\mathbf{F}$ の偏差部分の役割を示している。

3.2 ファブリックテンソルによる誘導異方性の解析

ここで、粒状体の誘導異方性の定義とひずみや摩擦性との関連について説明する。

誘導異方性は応力によって粒状体内の粒子配列構造に生ずるもので、本章で説明するように、接触法線の異方性としてファブリックテンソルによって表現される。応力によってはひずみも生じ、これも内部構造に変化をもたらす。しかし、ひずみは原則として、ファブリックテンソルに変化を及ぼさない（ひずみと誘導異方性の関連については、5.1(1)において触れる）。また、ひずみは応力の結果として生じる変形（長さや角度の変化）であるが、後述するように、誘導異方性は応力の作用を緩和するように働く。粒状体のもつ摩擦性も、応力が与えられた時、応力の定める方向（主軸）にしたがって異方性を示す。しかし、この異方性は誘導異方性とは別個のものである。摩擦性はたとえば岩石などにもあるが、粒状体の場合、特性として内部粒子の移動、回転を生じることによって、粒子間接触力の摩擦角を減少させ、力の伝達を安定化するような誘導異方性を生じると考えられる。

粒状体の誘導異方性の研究では、粒状体の誘導異方性を応力と関係づけ、数式によって表現することがまず必要である。粒状体の誘導異方性はファブリックテンソル $\mathbf{F}$ で、応力は応力テンソル σ （主応力 $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ）で記述され、主軸回転を伴わない単調載荷の場合は、 $\mathbf{F}$

と σ は共軸と考えられる。佐武⁸⁾はファブリックテンソルの異方度 F_1/F_2 と応力テンソルの異方度 σ_1/σ_2 を直接関係づけ

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^\alpha \quad (8)$$

とにおいて α を異方性誘導度と呼び、 α を用いて誘導異方性を解析することを提案している。

$$\alpha = \frac{\log F_1 - \log F_2}{\log \sigma_1 - \log \sigma_2} \quad (9)$$

であり、テンソルの式として

$$F = \frac{1}{tr(\sigma^\alpha)} \sigma^\alpha \quad (10)$$

とかくこともできる。ここに、 σ^α は σ と共軸で $\sigma_1^\alpha, \sigma_2^\alpha$ を主値とするテンソルであり、通常の指数法則が適用できる。式(10)は3次元にも適用することができる。佐武は、さらに光弾性実験の結果から

$$\alpha \approx 0.5 \quad (11)$$

となることを予測している。

粒状体の誘導異方性に関する他の解析例はあまり多くない。小田⁹⁾は、ファブリックテンソルと応力の関係づけとして、 σ_1/σ_2 を F_1/F_2 のべき多項式で近似する式を示している。Rothenburgら¹⁰⁾は、ファブリックテンソルではなく、接触法線の密度関数 $f(n)$ と垂直応力成分 σ の関数形が、両方とも $a + b \cos 2\theta$ の形で表されることに着目し、数値実験の結果に対する一つの理論解析を示している。

4. 粒状体の誘導異方性の理論

4.1 応力の幾何学的表示

誘導異方性の理論にはいる前に、説明に関連する応力、応力ベクトルの表現について述べておく。

図-3は2次元の応力ベクトル f を示したもので、 n は断面の単位法線ベクトル(傾角 θ)、 ϕ は応力ベクトル f と n のなす角度で、ここでは摩擦角と呼ぶ。粒状体では、この ϕ は最大摩擦角(mobilized角)まで許容される。周知のようにコーシーの定理により

$$f = n \cdot \sigma \quad (12)$$

が成り立つ。

ここで2次元において、 n の傾角 θ に対し異方的に変化する応力ベクトル f の幾何学的表示法について説明する(図-4)。最もよく用いられるのはモールの円で、これを図-4(a)に示す(簡単のため、粘着力は省略

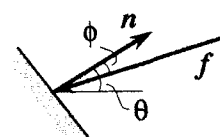
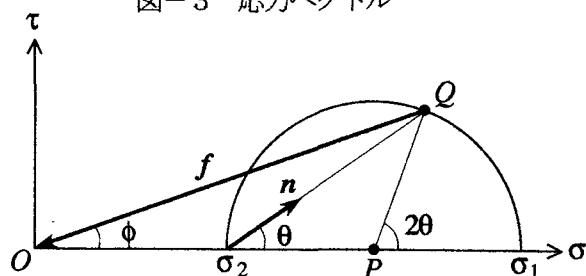
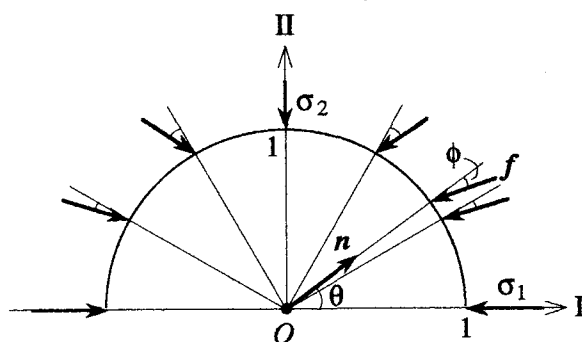


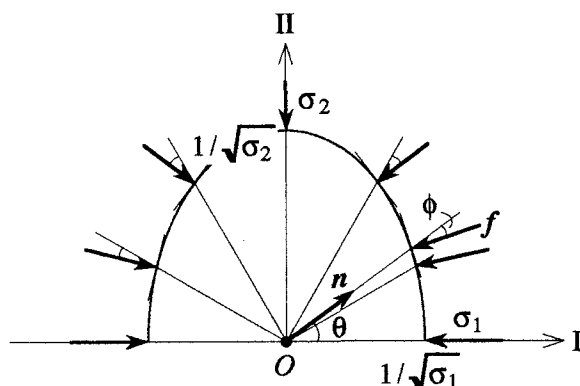
図-3 応力ベクトル



(a) モールの円



(b) 円周上の応力ベクトル



(c) 楕円周上の応力ベクトル

図-4 応力ベクトルの幾何学的表示

し純摩擦性としている)。図-4(b)は円周上に径ベクトルの方向 n に対応する応力ベクトル f を示したものである。

次に、楕円を用いる新しい表示法について説明する。Appendix(2)に説明しているように、一つの応力 σ に関する楕円

$$\sigma \cdot xx = \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 = 1 \quad (13)$$

の周上の点における接線の法線と径ベクトルの方向 n のなす角度は、 n に対応する応力ベクトル f の摩擦角 ϕ に等しい。したがって、図-4(c)の表示は(b)の表示より幾何学的関係が深められている。また、(a)の表示では摩擦角 ϕ が円周上で 2θ の方向の点に対応

しているのに対し、(c) の表示では摩擦角 ϕ が直接 θ の方向に対応しているので、 $\mathbf{n}$ の方向変化による異方性を考察するのにも都合がよい。また、(c) の表示は、3次元の場合、楕円を楕円体に、接線を接面に変えるだけで、全く同様の考察が可能である。

4.2 誘導異方性の微視的性質

この節では、今まで観察されている誘導異方性についてまとめる。ここで述べる性質は、主軸回転や荷重の繰返しのない単純な単調載荷におけるピーク時までの性質である。

まず、粒状体は載荷によって構造変化を起すが、その全体的マクロな様子は 2. に述べた力線グラフによって考察される。この場合、力線グラフの骨格が形成される過程で、何回かその作り直しが起こり、力を最適に安定に伝えるように、内部構造の改変が行われる。このことは言い直せば、粒子接触力の摩擦角を減少させ、力線グラフを粒子グラフに近づける構造変化と考えることができる。

個々の粒子に関する微視的な誘導異方性は、3.1 に述べたように、まず、主軸の回転のない単調載荷においては、大きい主応力の方向で接触点が増加し、小さい主応力の方向で接触点が増減することとして観察されている。このことは小田³⁾ 以外の研究者によっても示されており^{11, 12)}、誘導異方性の分かり易い基本性質である。

誘導異方性の微視的性質は、さらに接触法線密度の分布形（一例を図-2 に示す）の載荷に伴う変化として、一般的に多くの研究者によって考察されている。

粒状体の誘導異方性が、内部構造のどのような変化によって導入されてゆくかを知ることが必要である。このことに関しては、山本、松岡¹²⁾ によって示された 2 軸圧縮数値実験に関する微視的考察が重要と思われるが、その内容は、ひずみと誘導異方性の複雑な関連であり、5.1 (1) で考察する。

以上述べたように、粒状体の誘導異方性は主応力方向の粒子接触点の増減と、力の伝達の安定化のための力線グラフの変化に要約され、何れも作用する応力を緩和する働きをもつと考えられる。

4.3 写像による誘導異方性の理論

佐武¹³⁾ はテンソルによる写像を用いて粒状体の降伏条件の考察を行っているが、ここではテンソルによる写像 (Appendix 参照) によって空間に異方性を導入し、粒状体の誘導異方性を解明することを試みる。

粒状体の異方性導入を次のような数学モデルによって表現する。図-5 に示すように、応力 σ の与えられている空間を基準空間 (通常の連続体の空間) とし、この空間に一つのテンソル

$$\Phi = \sigma^\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 0.5) \quad (14)$$

による写像を与えて接続の異方性を導入する。この場合、
接続ベクトル — 空間の点と点とを接続する方向ベクトル — $\mathbf{n}$ は、基準空間では連続的、等方的に分布しているが、写像後の空間では

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{r} \sigma^\alpha \cdot \mathbf{n} \quad (15)$$

$$r = \sqrt{\sigma_1^{2\alpha} \cos^2 \theta + \sigma_2^{2\alpha} \sin^2 \theta} \quad (16)$$

となり、図-5 に示すように異方性をもっている。この異方性を表すファブリックテンソル $\mathbf{F}$ は、Appendix の式 (A26) から

$$\mathbf{F} = \frac{1}{tr \sigma^\alpha} \sigma^\alpha (= \varphi \text{ とおく}) \quad (17)$$

と求められる。この式は式 (10) と同一となり、このことが写像によって誘導異方性を考察できる根拠となる。 φ (主値を φ_1, φ_2 とする) はこの場合のファブリックテンソルで、単純な載荷の場合は σ と共軸と考えてよい。われわれは、この異方性の導入された空間を、粒状体を連続体化した空間と考えて考察する。

異方性が導入された空間の応力ベクトル (粒状体の接触力に相当する) を $\bar{\mathbf{f}}$ とし、修正応力ベクトルと呼ぶ。コーシーの定理から、通常の応力ベクトル $\mathbf{f}$ は応力テンソル σ に対し

$$\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} n f d\theta \left(= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} n f d\theta \right) \quad (18)$$

を満たすが、異方性をもって分布している $\bar{\mathbf{f}}$ の場合は、

式 (18) の $1/2\pi$ を $\bar{\mathbf{f}}$ (すなわち $\mathbf{n}'$) の密度関数 $f(\theta)$ で置き換え

$$\sigma = 2 \int_0^{2\pi} \mathbf{n} \{f(\theta) \bar{\mathbf{f}}\} d\theta \quad (19)$$

が成り立たなければならない。式 (12) と同様に基準空間でコーシーの定理

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma} \quad (20)$$

を満たす応力 $\bar{\sigma}$ (修正応力という) を考え、式 (20) を式 (19) に代入すれば

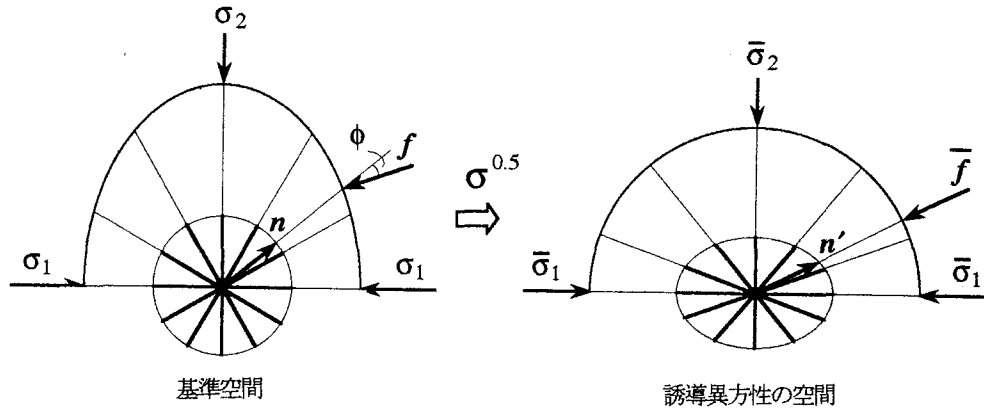


図 - 5 誘導異方性の導入

$$\sigma = 2 \left(\int_0^{2\pi} f(\theta) n n d\theta \right) \cdot \bar{\sigma} = 2\phi \cdot \bar{\sigma}, \quad (21)$$

$$\therefore \bar{\sigma} = \frac{1}{2} \phi^{-1} \cdot \sigma = \frac{1}{2} tr(\sigma^\alpha) \sigma^{1-\alpha} \quad (22)$$

が得られる。式 (21) から、誘導異方性をもつ空間では、基準空間の応力 σ を、異方性 ϕ と修正応力 $\bar{\sigma}$ によって分担していることが分かる。また、 ϕ と σ とが共軸ならば、 $\bar{\sigma}$ も共軸で対称テンソルとなる。

式 (15) から

$$n = r \sigma^{-\alpha} \cdot n' \quad (23)$$

であるから、式 (20) に式 (22)、(23) を代入すれば

$$\bar{f} = \frac{r}{2} tr(\sigma^\alpha) n' \cdot \sigma^{1-2\alpha} \quad (24)$$

が得られる。この式は $\bar{f}$, n' , σ の間の関係を示し、誘導異方性をもつ粒状体に適用される一般化したコーシーの定理である。 $\alpha=0$ ($\Phi=I$) の場合には通常のコーシーの式 (12) に帰着する。修正応力ベクトルについては

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \phi^{-1} \cdot f \quad (25)$$

も成立する。なお、3次元の場合には、式 (21)、(22)、(24)、(25) の係数 $2, 1/2$ は、 $3, 1/3$ で置き換えられる。

粒状体の誘導異方性の一つの働きは、4.2 で説明したように、粒状体内部の力の伝達を最適に安定的にしようとする構造変化と考えることができる。このことは言い換えれば、力線グラフを粒子グラフに近づける (軸力で力を伝えるトラス構造にしようとする) こと

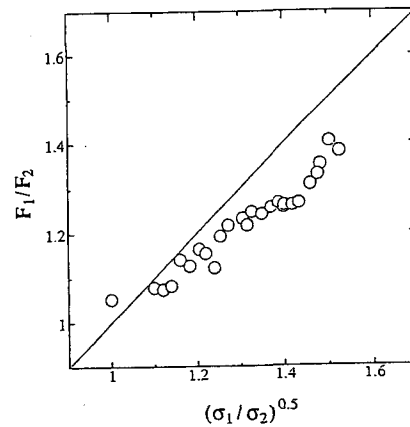
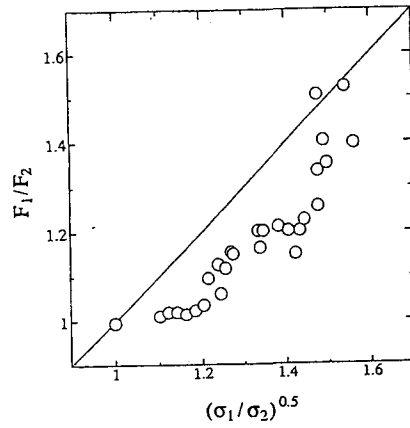


図-6 F_1/F_2 と $(\sigma_1/\sigma_2)^{0.5}$ の対比 (山本¹⁴⁾ による)

となり、異方性が完全に導入されれば、 $\bar{f}$ (力線グラフの傾き) と n' (粒子グラフの傾き) は同方向となる。このことを理論の仮定として取り入れれば、式 (24) から

$$\sigma^{1-2\alpha} = I (= \sigma^0), \quad \therefore \alpha = 0.5 \quad (26)$$

となる。この場合、異方性誘導度は 0.5 となり、3.2 の式 (11) に合致する。

図-6¹⁴⁾ は 2次元数値実験¹⁵⁾ の一つの結果で、 F_1/F_2 と $(\sigma_1/\sigma_2)^{0.5}$ とを対比したものであるが、

この場合、異方性誘導度は、0.5 よりやや小さいことが示されている。これは理想的な異方性の誘導が、ひずみなどの束縛によって完全には行われていないためと考えられる。 $\alpha = 0.5$ の検証は、最近他の例についても行われている¹⁶⁾

上記の結果は次のように考えることもできる。摩擦角 ϕ (図-4 (c)) は、Appendix (2) の説明のように、写像 $\Phi = \sigma^{-0.5}$ による楕円に生じているので、粒子接触力の摩擦角を打ち消す (力線グラフを粒子グラフに一致させる) ような誘導異方性を導入するには、その逆写像

$$\Phi = \sigma^{0.5} \quad (27)$$

を与えればよい。この場合

$$\mathbf{x}' = \sigma^{0.5} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \sigma^{-0.5} \cdot \mathbf{x}' \quad (28)$$

となるから、式 (13) の楕円は

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = x_1'^2 + x_2'^2 = 1 \quad (29)$$

の円に写像される。図-5 に示すように、摩擦角は消滅し、所期の異方性が導入されている。なお、 $\bar{\mathbf{f}}$ の摩擦角が消滅しても基準空間の応力 σ のもつ摩擦性には何の変化もないことに注意する。

$\alpha = 0.5$ の場合、式 (16) から

$$r^2 = \sigma \cdot \mathbf{nn} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \quad (30)$$

となり、接続ベクトルの密度関数は、Appendix の式 (A24) により

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta} \quad (31)$$

となる。また、この場合

$$\varphi = \frac{1}{\text{tr}(\sigma^{0.5})} \sigma^{0.5} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \sigma^{0.5} \quad (32)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \varphi^{-1} \cdot \sigma = \frac{1}{2} (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}) \sigma^{0.5} \quad (33)$$

が成り立つ。したがって、ファブリックテンソル φ と修正応力 $\bar{\sigma}$ とは等しい異方度を持ち

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2}} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{0.5} \quad (34)$$

となっている。中井(1984)¹⁷⁾ は、ここで述べた修正応力 $\bar{\sigma}$ と同じ異方度をもつ力学量 $\mathbf{t} = (t_{ij})$ を別の立場から導入して、粒状体の力学挙動の解析に大きい成果を

げている。中井の修正応力との関連については 5.1 (2) で説明する。

式 (33) はさらに

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \mathbf{I}) \quad (35)$$

と書くこともできる。この式は3次元の場合は

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{3} (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3}) \sigma^{0.5} \\ &= \frac{1}{3} \{ \sigma + (\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 \sigma_3} + \sqrt{\sigma_3 \sigma_1}) \mathbf{I} \\ &\quad - \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \sigma^{-0.5} \} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。何れの場合も、修正応力は元の応力より等方性に近くなっており、元の応力が誘導異方性によって緩和されていることが分かる。

なお、ここで述べた修正応力 $\bar{\sigma}$ は誘導異方性をもつ粒状体の接触力に相当する修正応力ベクトルのために導入されものであり、粒状体を通常連続体として、力の釣合い、降伏条件などを考える場合は、基準空間で通常の応力 σ が用いられることに注意する。また、異方性を内蔵する一般材料の解析において、修正応力はさらに広い意味で用いられている¹⁸⁾。それぞれの場合、修正応力の力学的意味を的確に把握して用いることが大切である。

5. 考察

5.1 誘導異方性の理論の考察

前節の理論に用いた誘導異方性の数学モデルの性質について考察する。

(1) 微視的性質

式 (26) を式 (24) に入れば

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{r}{2} (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}) \mathbf{n}' \quad (37)$$

が得られ、修正応力ベクトル $\bar{\mathbf{f}}$ と接続ベクトル $\mathbf{n}'$ と

は、図-5 に示すように、方向が一致している。このことは、誘導異方性によって、粒状体において接触力の方向 (力線グラフ) と接触法線の方向 (粒子グラフ) とが一致し、力の伝達に安定な構造となることを示している。また図-5 から分かるように、大きい主応力の方向で接触点が増加し、小さい主応力の方向で接触点が増加する性質ももっている。したがって、4.3 の理論は、粒状体の誘導異方性の性質を十分に表現する数学モデルとなっていることが分かる。

次に、写像による接続ベクトル $\mathbf{n}$ の方向変化について調べよう。 $\mathbf{n}$ の角度変化を $\Delta\theta$ とすれば

$$\cos \Delta\theta = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r} \boldsymbol{\sigma}^{0.5} \cdot \mathbf{nn}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos^2 \Delta\theta &= \frac{(\boldsymbol{\sigma}^{0.5} \cdot \mathbf{nn})^2}{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{nn}} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}^{0.5} \cdot \mathbf{nn})^2}{(\boldsymbol{\sigma}^{0.5} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{0.5} \cdot \mathbf{n})} \\ &= \frac{(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{nn})^2}{(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})} = \cos^2 \bar{\phi} \end{aligned} \quad (39)$$

ここに $\bar{\phi}$ は修正応力ベクトル $\bar{\mathbf{f}}$ の摩擦角である。したがって

$$\Delta\theta = \bar{\phi} \approx \tan \bar{\phi} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} \quad (40)$$

が得られる。

山本、松岡¹²⁾ は、DEM 解析によって粒状体の二軸圧縮過程における微視構造の変化を詳細に考察し、大きい主応力方向付近の接触点の発生、小さい主応力方向付近の接触点の消滅が、誘導異方性の主たる要因であることを示している。また、接触を保つ2粒子は作用する応力ベクトルによって滑動、回転するが、その接触法線の傾きの変化はせん断ひずみとなること、同時に上述の接触点の発生、消滅の原因となっていることを示している。

この結果は、誘導異方性が単純に式 (40) に示した接続ベクトルの方向変化によって生じるのではなく、上述の複雑な要因によって生じ、総合結果として本論文で述べてきたファブリックテンソルの形に表現されるものとなることを示している。松岡、山本¹⁹⁾ は上述の観察に基づき粒子移動予測法によって、応力ひずみ関係の推定を行っている。

(2) 修正応力、修正仕事

粒状体の内部の仕事を示す仕事テンソルの増分は、修正応力を用いると

$$d\mathbf{W} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = 2\boldsymbol{\phi} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} (= 2\boldsymbol{\phi} \cdot d\bar{\mathbf{W}} \text{ とおく}) \quad (41)$$

とすることができ。 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみ増分である。修正応力による仕事 $\bar{\mathbf{W}}$ (修正仕事テンソルという) の増分は

$$d\bar{\mathbf{W}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}^{-1} \cdot d\mathbf{W} \quad (42)$$

となる。仕事増分 (スカラー) dW は

$$dW = \text{tr}(d\mathbf{W}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = 2\boldsymbol{\phi} \cdot d\bar{\mathbf{W}} \quad (43)$$

とかけるから、 dW は誘導異方性と修正仕事増分によって分担されていることが分かる。また、修正仕事 (スカラー) は

$$d\bar{\mathbf{W}} = \text{tr}(d\bar{\mathbf{W}}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (44)$$

である。

中井¹⁷⁾ は SMP (空間滑動面) の法線ベクトル

$$\mathbf{n}_{\text{SMP}} = \sqrt{\frac{I_3}{I_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_3}} \right) \quad (45)$$

(I_2, I_3 は応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ の第2、第3不変量) を用いて、修正応力

$$\mathbf{t} = \sqrt{\frac{I_3}{I_2}} \boldsymbol{\sigma}^{0.5} \quad (46)$$

を導入している。 $\mathbf{n}_{\text{SMP}}$ の3個の成分は、 $\alpha=0.5$ の場合の $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ の3個の主値に比例しているため、式 (33) と (46) から明らかのように、 $\mathbf{t}$ と $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ の違いはスカラー係数だけとなり、同一の異方性をもつ。したがって、応力比による解析においては、二つの修正応力に全く差異がない。中井の修正応力は粒状体の摩擦性を表す SMP を基礎としているので、提案の理論は、その解析に誘導異方性に関連する力学的意味も付け加えるものとする。

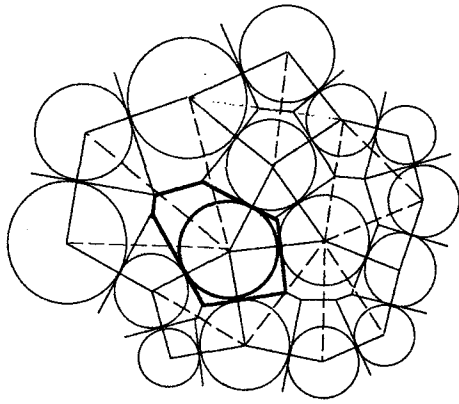
中井^{17,20)} は、さらに修正応力 $\mathbf{t}$ による修正仕事を導入し、SMP による応力・ひずみ増分式や塑性ポテンシャルへの応用を示している。

5.2 離散力学における接触法線密度

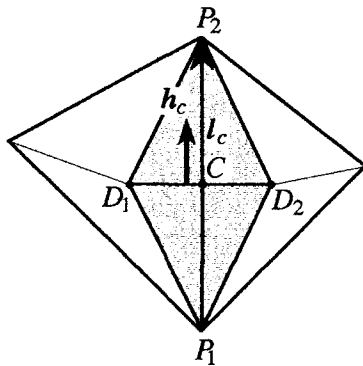
接触法線 $\mathbf{n}$ の密度関数は、通常、単に $\mathbf{n}$ をもつ接触点の密度として求められる。しかし、粒状体の離散力学では、接触点は離散的に分布し、接触点に対応する粒子グラフの枝の長さは、等球パッキングの場合以外、必ずしも等しくない。こういう粒状体の離散的不均一性を考慮にいたした解析では、ファブリックテンソルの $\mathbf{n}$ の代わりに枝ベクトル $\mathbf{l}$ (方向、向きは $\mathbf{n}$ に同じ) を用いる試みがなされている²¹⁾。ここでは、佐武²²⁾ によって離散力学に導入された接触セルを用いるファブリックテンソルの定義について述べる。

一つの接触点 C に対応する接触セル (2次元) は、図-7に示すように、枝ベクトル $\mathbf{l}_c = l_c \mathbf{n}_c$ とこの枝ベクトルを共有する二つのデローニー3角形のデリクレ中心 D_1, D_2 によって形成される4角形の領域である。この接触セルによって、次式で定義される双対枝ベクトル

$$\mathbf{h}_c = h_c \mathbf{n}_c = \overline{D_1 D_2} \mathbf{n}_c \quad (47)$$



(a) デリクレ分割とデローニーネットワーク



(b) 接触セル (2次元)

図-7 離散力学の接触セル

を導入すれば、接触セルの面積は

$$S_c = \frac{1}{2} l_c h_c = \frac{1}{2} l_c \cdot h_c \quad (4.8)$$

となる。領域全体の面積は

$$S = \sum S_c \quad (4.9)$$

とかけることを考慮し、離散力学におけるグローバルなファブリックテンソルを、次式のように定義する。

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2S} \sum l_c h_c = \frac{1}{S} \sum S_c n_c n_c \quad (5.0)$$

Σ は領域内の総和を示す。 $\mathbf{F}$ は対称テンソルで、 $\text{tr} \mathbf{F} = 1$ の条件を満足している。この定義では、 S_c/S が $n_c n_c$ のウエイト(確率密度)として用いられている。

ここでは2次元で説明したが、3次元の場合でも類同の考察が可能である。

6. 結語

本論文では、粒状体のもつ誘導異方性について、今まで数値実験などで得られている知見をまとめ、粒状体の誘導異方性が、等方的接続をもつ連続体に一つの写像

$\Phi = \sigma^\alpha (0 \leq \alpha \leq 0.5)$ を与える数学モデルによって表

現できることを示した。このモデルは、誘導異方性のもつ力線グラフを粒子グラフに近づけ、粒状体内の力の伝達を安定化させる性質と、主応力方向の接触点の増減の特性の両方を表現している。また、誘導異方性をもつ場合のコーシーの定理の一般化を示して、異方性誘導度 $\alpha = 0.5$ となることを導き、実験結果にも適合することを示した。粒状体における誘導異方性による応力や仕事の修正について説明し、誘導異方性と修正応力が応力の作用を分担していることを示した。

ここでは、円形(球形)粒子集合体の単純な載荷の場合しか扱っていない。任意形状粒子の場合、主軸の回転や繰返し載荷の場合の誘導異方性はこれからの研究課題と考える。ここに提案した理論は、粒状体の誘導異方性の性質を明確化しているので、上記の複雑な場合の挙動解析にも役立つのではないかと考える。また、理論の過程で導いた誘導異方性をもつ場合の一般化したコーシーの定理は、粒状体の挙動のミクロの立場からの考察に有用と思われる。

本論文に図や論文の引用を快く認めて下さった方々、有益な意見をお寄せ頂いた多くの方に厚く謝意を表します。また、図面の作成等のお世話になった東北大学大学院土木工学専攻の技官石見政男氏に対し感謝いたします。

Appendix テンソルによる写像

テンソルによる空間の写像と、その写像に付随する楕円表示(3次元では楕円体表示)、応力ベクトルの摩擦角との関連、写像によって生じる異方性、などについて述べる。説明は主として2次元で行う。

(1) テンソルによる写像と楕円表示

一つの対称テンソル Φ による空間の点 $\mathbf{x}$ の次のような写像を考える。

$$\mathbf{x}' = \Phi \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A1})$$

座標軸を Φ の主軸の方向にとれば

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2) = (\Phi_1 x_1, \Phi_2 x_2) \quad (\text{A3})$$

となる。ここに、 Φ_1, Φ_2 はテンソル Φ の二つ主値($\Phi_1 \geq \Phi_2$)である。この写像により一つの単位円

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1 \quad (\text{A4})$$

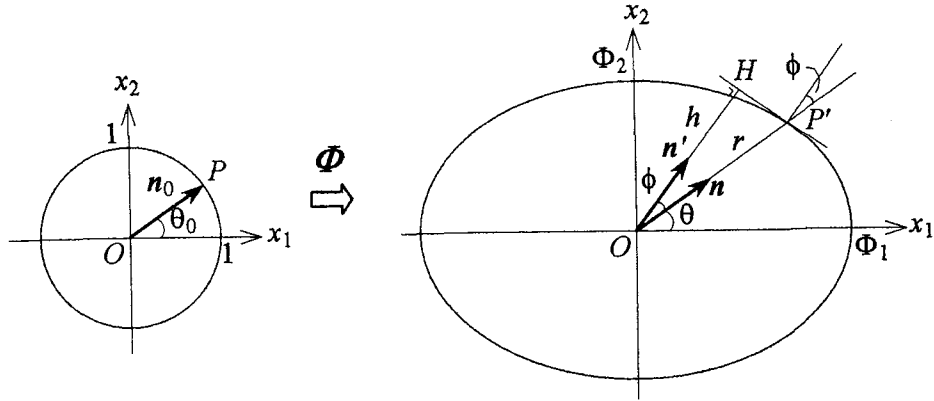


図-A1 テンソル Φ による写像

は一つの楕円

$$\Phi^{-2} \cdot x'x' = \frac{x_1'^2}{\Phi_1^2} + \frac{x_2'^2}{\Phi_2^2} = 1 \quad (\text{A5})$$

に変換される (図-A1)。

元の単位円の一つの径である単位ベクトル n_0 は、この写像によって、楕円の一つの径ベクトル

$$\overline{OP'} = r = rn = \Phi \cdot n_0 \quad (\text{A6})$$

に写像される。ここに、 r は r の長さ、 n は r の方向の単位ベクトルで

$$n = (n_1, n_2) = \frac{1}{r} \Phi \cdot n_0 = \frac{1}{r} (\Phi_1 n_{01}, \Phi_2 n_{02}) \quad (\text{A7})$$

となる。 P' において楕円の接線を引き、原点からの垂線を

$$\overline{OH} = h = hn' \quad (\text{A8})$$

とおく。 h は h の長さ、 n' は h の方向の単位ベクトルである。楕円の接線の性質を用いると

$$n' = (n'_1, n'_2) = h \Phi^{-1} \cdot n_0 = h \left(\frac{n_{01}}{\Phi_1}, \frac{n_{02}}{\Phi_2} \right) \quad (\text{A9})$$

とかくことができる。式 (A7), (A9)より

$$n_0 = r \Phi^{-1} \cdot n, \quad (\text{A10})$$

$$n' = h \Phi^{-1} \cdot n_0 = rh \Phi^{-2} \cdot n \quad (\text{A11})$$

とかけ、 n_0 , n' は単位ベクトルであることから

$$\frac{1}{r^2} = (\Phi^{-1} \cdot n) \cdot (\Phi^{-1} \cdot n) = \Phi^{-2} \cdot nn$$

$$= \frac{n_1^2}{\Phi_1^2} + \frac{n_2^2}{\Phi_2^2}, \quad (\text{A12})$$

$$\frac{1}{r^2 h^2} = (\Phi^{-2} \cdot n) \cdot (\Phi^{-2} \cdot n) = \Phi^{-4} \cdot nn$$

$$= \frac{n_1^2}{\Phi_1^4} + \frac{n_2^2}{\Phi_2^4} \quad (\text{A13})$$

が得られる。

(2) 楕円表示と応力ベクトルの摩擦角

楕円周上の点 P' における接線の法線と径ベクトルのなす角度を ϕ とすれば、式 (A12), (A13)から

$$\cos^2 \phi = \frac{h^2}{r^2} = \frac{(\Phi^{-2} \cdot nn)^2}{(\Phi^{-2} \cdot n) \cdot (\Phi^{-2} \cdot n)} \quad (\text{A14})$$

となっている。

応力テンソル σ の法線 n をもつ面における応力ベクトル f とその成分 (σ, τ) について

$$f = n \cdot \sigma, f^2 = (n \cdot \sigma) \cdot (n \cdot \sigma) = \sigma^2 + \tau^2,$$

$$\sigma = nn \cdot \sigma \quad (\text{A15})$$

が成り立つから、式 (A14) において

$$\Phi^{-2} = \sigma, \quad \Phi = \sigma^{-0.5} \quad (\text{A16})$$

とおけば

$$\cos^2 \phi = \frac{(\sigma \cdot nn)^2}{(\sigma \cdot n) \cdot (\sigma \cdot n)} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2},$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{\tau}{\sigma} \quad (A17)$$

が得られる。 ϕ は、この場合、応力ベクトルの摩擦角になっていることが分かる。したがって、次の命題が成り立つ。

“応力テンソル σ に関する写像 $\sigma^{-0.5}$ による楕円表示

$$\sigma \cdot xx = \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 = 1 \quad (A18)$$

において、一つの方向 n に対応する楕円周上の点における接線の法線と径ベクトルのなす角度 ϕ は、法線 n の面上の応力ベクトル f のもつ摩擦角に等しい”

3次元においても、楕円を楕円体に、接線を接平面と置き換えれば、上記と全く同様の解析を行うことができる。

なお、式 (A15) と同様な誘導で

$$\cos^2 \phi = \frac{h^2}{r^2} = \frac{(\Phi^2 \cdot n' n')^2}{(\Phi^2 \cdot n') \cdot (\Phi^2 \cdot n')} \quad (A19)$$

となるから

$$\Phi^2 = \sigma, \quad \Phi = \sigma^{0.5} \quad (A20)$$

においても、上述と同様の結果（上記の記述で $\sigma^{-0.5}$ を $\sigma^{0.5}$ に、 n を n' に換えたもの）が得られる。佐武¹³⁾はこの場合の楕円表示を用い、 $\lambda = \tan \phi$ について楕円の幾何学的性質を応用して粒状体の降伏条件（SMP条件）の考察を行っている（なお記号の用い方は本文と少し異なっている）。

また、従来、応力の表示の一つとして“応力楕円”と呼ばれているものは、式 (A5) で $\Phi = \sigma$ とおいたものであり、ここで説明した応力の楕円表示とは全く異なるものである。

(3) 写像によって生じる異方性

一般に連続体の内部の点はあらゆる方向に接続していると考えられる。一つの接続の方向を単位ベクトル n で表し接続ベクトルと呼ぶ。粒状体における接続は離散的な粒子と粒子の接触となり、接触法線が接続ベクトルに相当すると考える。

等方的な接続をもつ基準空間（接続ベクトル n_0 ）は、テンソル Φ の写像によって、異方的接続をもつ空間（接続ベクトル n ）に写像される。この場合の異方性を表すファブリックテンソルと接続ベクトル n の密度関数

を求めよう。

n_0 , n の傾角を θ_0 , θ とすれば、式 (A7) より

$$n = (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{r} (\Phi_1 \cos \theta_0, \Phi_2 \sin \theta_0). \quad (A21)$$

したがって

$$\tan \theta = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \tan \theta_0, \quad (A22)$$

$$\therefore d\theta_0 = \frac{r^2}{\Phi_1 \Phi_2} d\theta (= 2\pi f(\theta) d\theta \text{ とおく}) \quad (A23)$$

式 (A12) を用いれば

$$f(\theta) = \frac{r^2}{2\pi \Phi_1 \Phi_2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi_1 \Phi_2}{\Phi_1^2 \sin^2 \theta + \Phi_2^2 \cos^2 \theta} \quad (A24)$$

が得られる。ファブリックテンソルは

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n n d\theta_0 = \int_0^{2\pi} f(\theta) n n d\theta \quad (A25)$$

とかけるから、 $f(\theta)$ は接続ベクトル n の確率密度関数となっている。式 (A24) を式 (A25) に入れて計算すれば、写像によって生じる異方性のファブリックテンソル

$$F = \frac{1}{\Phi_1 + \Phi_2} \Phi = \frac{1}{tr \Phi} \Phi \quad (A26)$$

が得られる。 F はスカラー係数以外、写像のテンソル Φ と一致することが分かる。

参考文献

- 1) 土倉 泰：著者との研究連絡により提供を受けた資料, 2000
- 2) Radjai, F.: Features of force transmission in granular media, in Powders & Grains 2001 (ed. Kishino, Y.), Balkema, 157-160, 2001
- 3) Oda, M.: Initial fabric and their relations to mechanical properties of granular material, Soils and Foundations, 12-1, 18-36, 1972
- 4) Satake, M.: Constitution of mechanics of granular materials through the graph theory, in Continuum-Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials (ed. Cowin, S.C. and Satake, M.), Gakujyutsu Bunkai Fukyukai, 47-62, 1978
- 5) Oda, M. et al.: A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules, Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomechanics, 6, 77-94, 1982
- 6) Satake, M.: Fabric tensor in granular materials, in Deformation and

- Failure of Granular Materials, (ed. Vermeer, P.A. and Luger, H.J.), Balkema, 63-68, 1982
- 7) 金谷健一：ファブリックテンソルによる構造異方性の特徴づけと統計検定、土質工学論文報告集 **23-4**, 171-177, 1983
- 8) Satake, M.: Graph-theoretical approach to the mechanics of Granular materials, in Continuum Models of Discrete Systems (ed. Spencer, A.J.M.), Balkema, 163-173, 1987
- 9) Oda, M.: Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials: Effects of particle rolling, Mechanics of Materials **1**, 269-283, 1982
- 10) Rothenburg, L. and Bathurst, R.J.: Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials, Geotechnique **39-4**, 601-614, 1989
- 11) Kishino, Y.: Disc model analysis of granular media, in Micromechanics of Granular Materials (ed. Satake, M. and Jenkins, J.T.), Elsevier, 143-152, 1988
- 12) 山本修一, 松岡 元：粒状体のせん断時の粒子構造の変化とせん断ひずみの関係、土木学会論文集 **505/III-29**, 219-228, 1994
- 13) Satake, M.: On distortion of tensor and yield criteria of granular materials, Int. J. Engng. Sci., **19-12**, 1643-1650, 1981
- 14) 山本修一：著者との研究連絡により提供を受けた資料, 1993
- 15) 松岡 元, 山本修一：個別要素法による粒状体のせん断機構の微視的考察、土木学会論文集 **487/III-26**, 167-175, 1994
- 16) 桑原直範、大野了悟、前田健一：DEM による密度・過熱圧密履歴が異なる粒状材料の変形・破壊挙動と内部構造変化の解析、土木学会応用力学論文集 **5**, 431-440, 2002
- 17) Nakai, T. and Mihara, Y.: A new mechanical quantity for soils and its application to elastoplastic constitutive models, Soils and Foundations **24-2**, 82-94, 1984
- 18) 飛田善雄 他：工学材料の異方的挙動の簡易な表現方法：修正応力法の地盤材料への応用、土木学会応用力学論文集 **6**, 407-418, 2003
- 19) 松岡元, 山本修一：粒子移動予測法による粒状体のせん断時の応力～ひずみ関係の推定、土木学会論文集 **511/III-30**, 191-197, 1995
- 20) Nakai, T.: An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the 1 stress path dependency in three-dimensional stresses, Soils and Foundations **29-1**, 119-137, 1989
- 21) Satake, M.: Fundamental quantities in the graph approach to granular materials, in Mechanics of Granular Materials: New Models and Constitutive Relations (ed. Jenkins, J.T. and Satake, M.), Elsevier, 9-19, 1983
- 22) 佐武正雄：粒状体のひずみについて、土木学会応用力学論文集 **5**, 423 - 430, 2002

(2004 年 4 月 16 日受付)