

圧縮荷重下における亀裂進展時のエネルギー解放率の X-FEM 解析

Energy release rate analysis of crack extension under compressive loads by the X-FEM

李 炳奇*, 矢富盟祥**

Li Bingqi, Chikayoshi Yatomi

*博士 (工学) 金沢大学大学院 21 世紀 COE ポストドクター (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

**正会員 Ph. D. 金沢大学大学院, 自然科学研究科教授 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

Using the X-FEM and the path independent E integral, we analyze the energy release rate at the onset of crack kinking for an isotropic linear elastic material in an infinite plate with a centered crack under a uni-axial and two axial compressive loads. In the X-FEM, we propose a simple method in which only the four-node quadrilateral isoperimetric elements in the fractured element are employed without the enrichment by the near-tip asymptotic solution. The friction forces are assumed to follow the Coulomb law, with a slip criterion treated in the context of a standard return mapping algorithm. Consistent linearization of the field equation is performed which leads a fully implicit scheme which preserves asymptotic quadratic convergence of the Newton-Raphson method.

Key Words: X-FEM, Energy release rate, E-integral, Coulomb law, Return mapping algorithm

1. はじめに

現在汎用されている破壊力学分野における有限要素法解析では、亀裂のような変位不連続面は、要素の辺上に沿って要素節点を分離する事によって表現されている。したがって、亀裂の進展挙動は、あらかじめ設定された要素配置に限定されてしまう。そこで、これを回避するために、非常に面倒な要素の逐次リメッシュによる方法が考案されてきたが、解析コードの煩雑化や計算コストの膨大化を招くなどの難点がある。

このような背景の下で、最近になって、面倒な要素のリメッシュを避けるため、Simo ら¹⁾、Oliver²⁾ や Larsson ら³⁾ によって要素内に不連続な形状関数を用いる強不連続解析手法や有限被覆法⁴⁾などが提案されている。前者の手法により荷重-荷重点変位関係などの解の要素依存性が大幅に軽減し、損傷モデルや弾塑性体などの亀裂進展解析が数多く報告された。しかし、この手法によると、不連続な形状関数の作成が非常に複雑となり、一般には、不連続面に沿う方向のひずみは不連続になるが、この研究で汎用されている階段関数から1次の3角形状関数を引くことにより作成された不連続な形状関数を用いた場合、不連続面両側の全ひずみ成分が常に同一になり、亀裂の進展挙動を捉える上では致命的な欠点を有する。一方、有限被覆法では、物理被覆に加え数学被覆を用いるなど解析理論の複雑さはあるが、初期の亀裂面発生からその進展までを総合的に扱うことが可能であり、今後の研究に期待する。

一方、最近になって物理的意味が分かり易い簡便な手法として、拡張有限要素法 (X-FEM: eXtended Finite Element Method) と呼ばれる解析手法が Belytschko ら⁵⁾ や Moes ら⁶⁾ によって提案されている。この手法は、き

裂などの変位の不連続面を有する要素に対して、その不連続量を単に要素節点に新たな自由度として付加することにより亀裂面の変位の不連続を表現できるようにしたものである。X-FEM は、未知量の増加により計算時間は多少増加するが、従来の有限要素法に付加的な自由度を加えるだけでよく、比較的容易にプログラムを作成することが可能である。X-FEM では、線形弾性体内の亀裂の先端近傍の解をより精度の良いものとするために、変位の不連続を表す自由度だけでなく、メッシュフリー法でも使用された亀裂先端近傍の応力の $-1/2$ 特異性をもつような変位分布の自由度をも節点に付加することを提案している。しかし、この付加自由度によって、未知数が大幅に増加するだけでなく、物体が線形弾性体でなく、例えば、一般の非線形弾性体や弾塑性体の場合では、亀裂先端近傍の応力ないしひずみの特性は、特別な場合を除き未知であるためこの手法は使えない。

そこで、著者らの将来の研究目的は、地盤の地滑りやコンクリートや岩盤などの弾塑性体挙動する破壊過程の解明にあるため、あえて、上記の応力の $-1/2$ 特異性を持つような変位分布の自由度を考慮せず、強不連続解析と同様に、変位の不連続量を表わす自由度のみ考慮し、亀裂先端は常に要素辺上に設定した簡便な X-FEM の手法を採用する。前報⁷⁾では、この X-FEM 手法を用いて、無限板中央に亀裂があり、それを、亀裂と垂直な方向に一軸引っ張り荷重を作用させた場合において、亀裂の任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を計算し、C. H. Wu⁸⁾による半理論解との比較を行う事によりこの手法の精度の検証を行ない本 X-FEM 手法の有効性を確認した。

今までに報告された X-FEM 手法を用いた亀裂進展解析において、理論解の存在する亀裂が直進する場合の精度の検証は行われている⁹⁾。しかし、亀裂が折れ曲がる場合の精度の検証は皆無である。数値解精度の保証の無い

亀裂の折れ曲がり進展解析をおこなっても、その進展挙動の信頼性に欠ける。

一方、著者らの将来の研究目的である地盤の地滑りやコンクリートや岩盤などの破壊現象では、前報のような引っ張り荷重下にある場合は稀であり、ほとんど場合、圧縮荷重下にある。そこで、本報告では、前報で、その精度を確認した X-FEM の手法の圧縮荷重下での応用を試みる。通常、圧縮荷重下にある亀裂面には摩擦力が存在し、引っ張り荷重下にある場合に比べ現象は複雑になる。この摩擦力が存在する場合の解析手法として、破壊力学で汎用されている要素の辺上に沿って要素節点を分離する事によって亀裂を表わす手法の場合、摩擦則の亀裂面判定には要素節点力を必要とする¹⁰⁾。ところが、X-FEM では、この要素節点力が陽な形で求まらない。したがって、X-FEM では、摩擦力のある問題を解析する方法として、釣り合い式の弱形式をそのまま使用する手法が簡便である。この手法の一つとして、J. Dolbow ら¹¹⁾ は、P. Ladevèze¹²⁾ の反復計算し収束させてゆく LATIN 法を採用した結果を報告している。しかし、この LATIN 法は、そのアルゴリズムが煩雑であり、特に収束性がこの手法で使用する重要なパラメータの値によって大きく左右され、しかも、その値をどのような値にすれば収束が早くなるのか前もって分からないなどの欠点を有している。そこで、本報告では、D. Perić ら¹³⁾ が提案した、釣り合い式の弱形式中の亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体に置き換えるペナルティ法に基づく摩擦モデルとし、その部分を 2 次収束性が保証されている陰解法リターンマップ手法¹⁴⁾を用いた弾塑性解析を採用した。また、物体の連続変位と亀裂面の不連続性を表す付加自由度を未知数とする離散化された全体の非線形連立剛性方程式も、それらの増分を未知数とした線形化を行ない、ニュートン・ラフソン法を採用した。この新しく開発した X-FEM 解析手法を用いて、一軸及び二軸圧縮荷重下にある亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を補ひずみエネルギー-E 積分公式¹⁰⁾を使用して、亀裂が直進する場合には、理論式との比較を行い、亀裂が折れ曲がる場合は、既報の結果¹⁰⁾との特性と比較検討を行なった。

2. X-FEM 解析

この節では、不連続変位場を有する物体の支配方程式の弱形式を離散化して解く X-FEM 手法の概説をする。ここでは議論を簡単にするため、変形は微小であるとし、運動は静的であり、物体力も無いものとする。

のとする。

2.1 支配方程式と境界条件

図-1 に示すような物体 Ω を考える。亀裂とその先端における接線を延長した線(図-1 中の破線)により分割される 2 つの領域を、それぞれ Ω^+ 、 Ω^- とする。図-1 には、 Ω^+ は灰色で塗りつぶしてある。 Γ は物体の全境界を表し、変位 $\mathbf{u}$ が既知である Γ_u 、表面力 $\mathbf{t}$ が既知である Γ_t 、亀裂の面 Γ_c を合わせた

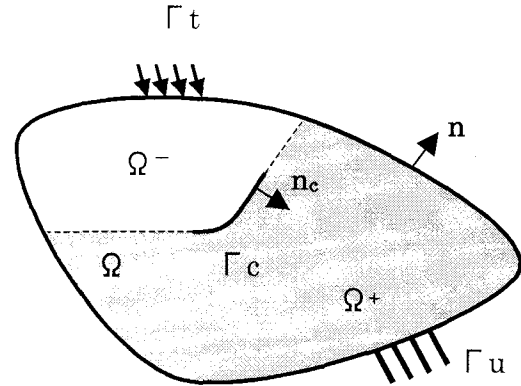


図-1 物体の領域と境界

ものである。

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t + \Gamma_c \quad (1)$$

釣り合い式と境界条件は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c &= \mathbf{f} \quad \text{on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (3)$$

ここで ∇ は、ナブラ演算子、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy の応力テンソル、 $\mathbf{n}$ は全境界 Γ の外向き単位法線ベクトル、 $\mathbf{n}_c$ は、 Γ_c の Ω^+ 側向き単位法線ベクトルであり、 $\mathbf{f}$ は Γ_c 上の表面力を表している。(・) はテンソルとベクトルの内積を示している。また上付きの (ー) は既知量であることを示す。ひずみは変位より以下のように示される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^s \quad (4)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソルを表し、 $\otimes$ はテンソル積である。上式の右肩の s は対称成分であることを表す。応力とひずみを関係付ける構成関係は次のような

Hooke の法則に従うものとする。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

ここで $\mathbf{C}^e$ は弾性構成テンソルで、 $(:)$ は 4 階のテンソルと 2 階のテンソルの内積を示す。なお、本報告では、問題を簡単化するため、物体 Ω は 2 次元線形等方弾性体と仮定する。

2.2 弱形式化

式(2)を弱形式化するため次のような Γ_c 上で不連続となる試験関数 $\boldsymbol{\eta}$ を考える。

$$\boldsymbol{\eta} := \left\{ \boldsymbol{\eta} : \Omega \rightarrow R^3 \mid \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \quad (6)$$

この試験関数を式(2)の両辺に掛け、物体の領域 Ω 全体で積分し Gauss の発散定理と境界条件(3)を用いると次式となる。

$$\int_{\Gamma_i + \Gamma_c} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}) d\Omega \quad (7)$$

2.3 不連続変位の定式化

近年、弾塑性体の解析手法として全体の非線形連立方程式を Newton Raphson 法に整合するよう Consistent 接線剛性テンソルを用い、求解の過程において誤差が 2 次収束することが保証された陰解法リターンマッピング計算アルゴリズムが提案されている¹⁴⁾。本報告では、亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体に置き換えるペナルティ法に基づく摩擦モデルを使用し、この弾完全塑性の解析に陰解法リターンマッピング手法を適用する¹³⁾。まず、式(7)を連続変位と不連続変位を用いて離散化する。一般に、有限要素法では変位は連続と仮定され、この連続節点変位 $\mathbf{a}$ のみを未知量として計算を行うが、X-FEM では亀裂面の不連続性を表すために、通常の連続節点変位 $\mathbf{a}$ に、付加的な自由度として不連続節点変位 $\mathbf{b}$ を節点に付加する。以下、これらの付加的な自由度をそれぞれ、亀裂を含む要素の不連続節点変位 $\mathbf{b}$ と呼ぶ。これらの付加項を加える点は図-2 の○で示してある。要素⑧内の亀裂先端では、変位が閉じていることを保証するため、△で示される点では、不連続節点変位 $\mathbf{b}$ は付加しない。

連続節点変位 $\mathbf{a}$ 、不連続節点変位 $\mathbf{b}$ を用いて亀裂面 Γ_c で変位 $\mathbf{u}$ が不連続となるように離散化された変位 $\mathbf{u}$ は次式のように表せる、

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{a}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{N}]\{\mathbf{b}\} \quad (8)$$

ただし、第 2 項は亀裂が存在する要素に(図-2

中、①, ②, ⑤, ⑧要素)のみ付加される。ここで $[\mathbf{N}]$ は節点変位 $\mathbf{a}$ に対する標準的な形状関数行列、 $\{\mathbf{a}\}$ は連続節点変位ベクトル、 $\{\mathbf{b}\}$ は不連続節点変位ベクトル、 $H(\mathbf{x})$ は亀裂面により分割された Ω^+ 、 Ω^-

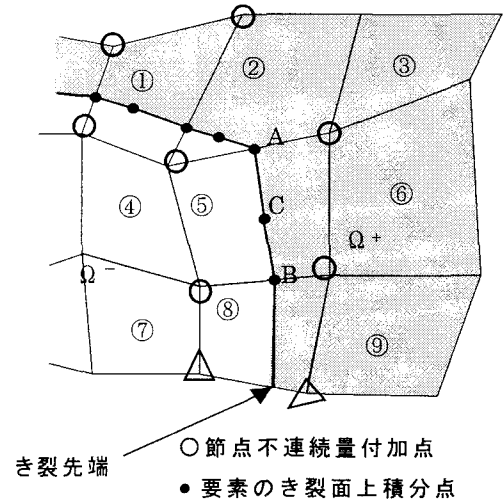


図-2 X-FEMによる解析の要素と節点

に対して以下のような値を持つ階段関数である。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (9)$$

ひずみは式(8)を微分して、次式のように表せる。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{a}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{B}]\{\mathbf{b}\} \quad (10)$$

ここで、 $[\mathbf{B}]$ は、 $[\mathbf{N}]$ の各成分を座標で微分した通常の B マトリクスである。数学的には、式(8)を微分する時、階段関数 $H(\mathbf{x})$ を微分した超関数の項が入るが、不連続面上でのひずみは、数値解析上関係無いので、式(10)では不要である。

試験関数 $\boldsymbol{\eta}$ に関しても変位と同様に離散化を行うと、

$$\{\boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (11)$$

のように表せる。また、 $\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}$ も、次式のようになる。

$$\{\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (12)$$

この試験関数も、変位と同じく第 2 項は亀裂が存在

する要素にのみ付加される。各要素ごとに式(10), 式(11), 式(12)を式(7)に代入すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (13)$$

$$\int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma = \int_{\Gamma_i^+} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (14)$$

式(13), (14)の両辺を次のようにおく。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{int},a} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^e) d\Omega \\ \mathbf{F}_{\text{ext},a} &= \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{int},b} &= \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^e) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) d\Gamma \\ \mathbf{F}_{\text{ext},b} &= \int_{\Gamma_i^+} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, $\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}$ とおいた。また, $\tilde{\mathbf{u}}$ は Γ_c 上の

相対変位である。f は亀裂上の表面力で, ここでは相対変位 $\tilde{\mathbf{u}}$ の関数とする。このモデルについては, 次節で説明する。

この時, 式(13)と式(14)は, 次式のように節点における離散化された連続節点変位 $\mathbf{a}$ と不連続節点変位 $\mathbf{b}$ を未知とする非線形連立方程式に帰着される。

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{u}^e) = \mathbf{F}_{\text{int},a} - \mathbf{F}_{\text{ext},a} = \mathbf{0} \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_b(\mathbf{u}^e) = \mathbf{F}_{\text{int},b} - \mathbf{F}_{\text{ext},b} = \mathbf{0} \quad (18)$$

次に, 式(17)と式(18)の連続節点変位 $\mathbf{a}$ と不連続節点変位 $\mathbf{b}$ に関する非線形連立方程式に Newton Raphson 法を適用するため, Taylor 展開を行い, その第1階微分項だけ残すと次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},a}(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}^e} \cdot \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{F}_{\text{ext},a} - \mathbf{F}_{\text{int},a}(\mathbf{u}^e) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},b}(\mathbf{u}^e)}{\partial \mathbf{u}^e} \cdot \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{F}_{\text{ext},b} - \mathbf{F}_{\text{int},b}(\mathbf{u}^e) \quad (20)$$

$$\text{ここで, } \Delta \mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{Bmatrix}$$

結局, 式(19), 式(20)より, 次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},a} \\ \mathbf{F}_{\text{ext},b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int},a} \\ \mathbf{F}_{\text{int},b} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで,

$$\mathbf{K}_{aa} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \mathbf{K}_{ab}^T = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{N} d\Gamma \quad (22)$$

3. 接触解析の弾完全塑性モデル

3. 1. 接触面の表面力と相対変位

ここではひとつの要素内の亀裂面は直線であると仮定し, 亀裂面の Ω^+ 側向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}_c$ を単に $\mathbf{n}$ とおき, その接線方向単位ベクトルを $\mathbf{t}$ (前節での表面力 $\mathbf{t}$ と同じ記号を使っているため, 意味が異なることに注意) とおくと, 亀裂面の表面力 $\mathbf{f}$ は次式のように与えられる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_n \quad (23)$$

ここで

$$\mathbf{f}_n = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad \mathbf{f}_t = \mathbf{f} - \mathbf{f}_n \quad (24)$$

亀裂面の相対変位 $\tilde{\mathbf{u}}$ も次式のように与えられる。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_t + \tilde{\mathbf{u}}_n \quad (25)$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{u}}_n = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_t = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_n \text{ であり,}$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \text{ と定義する。} \quad (26)$$

なお、X-FEM では、 $\tilde{\mathbf{u}} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{b}\}$ である。

弾完全塑性体モデルでは亀裂面での相対変位を、すべりを生じる以前の微小な相対変位に相当する”弾性成分”とすべりに相当する”塑性成分”に分解する。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^e + \tilde{\mathbf{u}}^p \quad (27)$$

従って、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_t &= \tilde{\mathbf{u}}_t^e + \tilde{\mathbf{u}}_t^p \\ \tilde{\mathbf{u}}_n &= \tilde{\mathbf{u}}_n^e \end{aligned} \quad (28)$$

なお、ここで法線方向のすべりは生じないので $\tilde{\mathbf{u}}_n^p = \mathbf{0}$ とおいた。

3. 2 弾完全塑性摩擦モデルの挙動

図-3 に示すように、弾完全塑性モデルの亀裂面の表面力は、次式のように相対変位の弾性成分で決まると仮定する。

$$\mathbf{f}_t = \alpha_t \tilde{\mathbf{u}}_t^e \quad \mathbf{f}_n = \alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_n^e \quad (29)$$

ここに、 α_t 、 α_n らの物理的意味は弾性係数であるが、実際、亀裂面間に物質があるわけではないので、数学的意味でのペナルティ係数であり十分大きな値を用いればよい。

滑りが開始する条件、すなわち“降伏条件”は γ_F を摩擦係数として次式で与えられる。

$$\phi(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}_t\| + \gamma_F f_n = 0 \quad (30)$$

ここで、 $f_n = \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n}$ であり、 $f_n \leq 0$ の場合は式(30)が成り立つが、 $f_n > 0$ の場合、 $\|\mathbf{f}_t\| = 0$ とする。

$\tilde{\mathbf{u}}_n^p = \mathbf{0}$ を満たすために次式の塑性ポテンシャル

$$\psi = \|\mathbf{f}_t\|$$

を定義すると、以下のような流れ則が成立ものとする。

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_t^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{f}_t} = \dot{\lambda} \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} = \dot{\lambda} \mathbf{t} \quad (31)$$

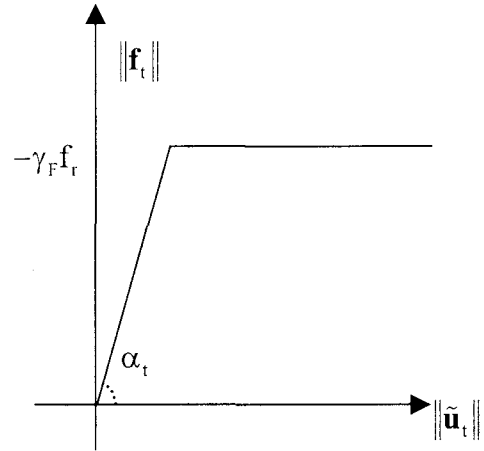


図-3 “弾完全塑性” 接触摩擦モデル

また除荷・負荷判定として、下記の Kuhn-Tucker 条件が課せられている。

$$\phi \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} \phi = 0 \quad (32)$$

4 増分・反復結合法による亀裂面に摩擦が存在する X-FEM 解析のアルゴリズム

本報告では、3 節の亀裂面上での弾完全塑性体モデルを解析するには、Newton-Raphson 法の 2 次収束性を保証する陰解法リターンマッピング手法を用いる。

4.1 陰解法リターンマッピング

亀裂面上での弾完全塑性体の増分・反復法及び陰解法リターンマッピングのアルゴリズムは Kuhn-Tucker 条件により以下のように行える。

(1) Elastic Trial

まず固着を仮定して弾性予測を行なう。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{t,n+1}^{\text{trial}} &= \mathbf{f}_{t,n} + \alpha_t (\tilde{\mathbf{u}}_{t,n+1}^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_{t,n}) \\ \mathbf{f}_{n,n+1}^{\text{trial}} &= \alpha_n \tilde{\mathbf{u}}_{n,n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (33)$$

Check Yield function

$$\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{\text{trial}}) = \|\mathbf{f}_{t,n+1}^{\text{trial}}\| + \gamma_F f_{n,n+1}^{\text{trial}} \quad (34)$$

If $\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{\text{trial}}) < 0$ then Elastic step

Set $(\bullet)_{n+1}^{(k)} = (\bullet)_{n+1}^{\text{trial}}$ EXIT

(2) Return Mapping(Plastic Corrector)

$$\mathbf{f}_{t,n+1}^{(k)} = -\gamma_F \mathbf{f}_{n,n+1}^{\text{trial}} \mathbf{t}_{n+1} \quad (35)$$

$$\text{ここで, } \mathbf{t}_{n+1} = \frac{\mathbf{f}_{t,n+1}^{\text{trial}}}{\|\mathbf{f}_{t,n+1}^{\text{trial}}\|}$$

一方, $\tilde{\mathbf{u}}_n^p = \mathbf{0}$ であるから,

$$\mathbf{f}_{n,n+1}^{(k)} = \mathbf{f}_{n,n+1}^{\text{trial}} \quad (36)$$

である.

なお微小変形の場合でも, 単位接線ベクトル $\mathbf{t}$ の方向は, 荷重のかけ方により向きが変化することに注意したい. 一方, 2次元問題の場合は Consistent 弾塑性係数は, 下記の弾塑性係数 $\mathbf{C}^{ep}$ と全く同様であることが簡単に証明できる.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = -\gamma_F \alpha_n \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + \alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (37)$$

また, 式 (37) を式 (22) の $\mathbf{K}_{bb}$ 中に代入し数値解析を行うため, 亀裂面に対する一次積分を計算しなければならない. 本報告ではニュートン・コーツのシンプソン則を用いて次式で求めた.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{N} d\Gamma \\ = \frac{h}{3} [(\mathbf{N}^T \mathbf{C}^{ep} \mathbf{N})_A + (\mathbf{N}^T \mathbf{C}^{ep} \mathbf{N})_C + (\mathbf{N}^T \mathbf{C}^{ep} \mathbf{N})_B] \end{aligned} \quad (38)$$

式 (38) の A, B, C は, それぞれ亀裂面の要素積分点である(図-2を参照), また h は要素内の亀裂の長さである. $\mathbf{C}^{ep}$ は式 (37) により計算する.

4.2 亀裂面に摩擦が存在する場合の X-FEM 解析のアルゴリズム

境界で与えられた表面力ベクトルや変位を n 等分して, n 個のステップに分け, 各ステップでの表面力ベクトルや変位において, 各ステップでの応力やひずみの近似解を, 図-4のように Newton-Raphson 法を用いた反復解析によって求める.

< $n+1$ ステップ目の Iteration >

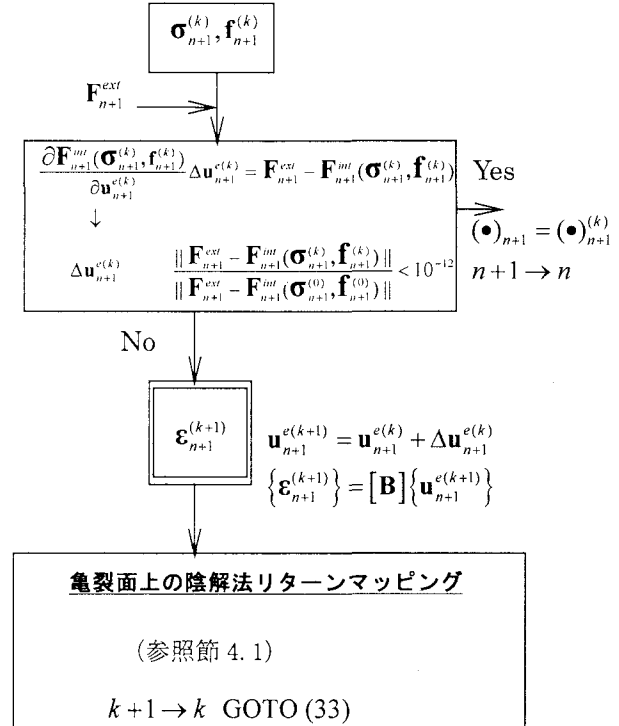


図-4 X-FEM解析のアルゴリズム

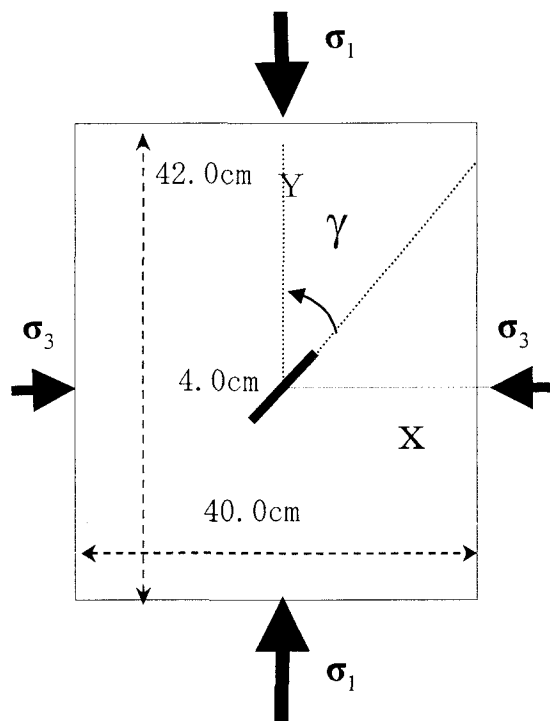
5. X-FEM 解析モデル及び精度の検証

5.1 解析モデル

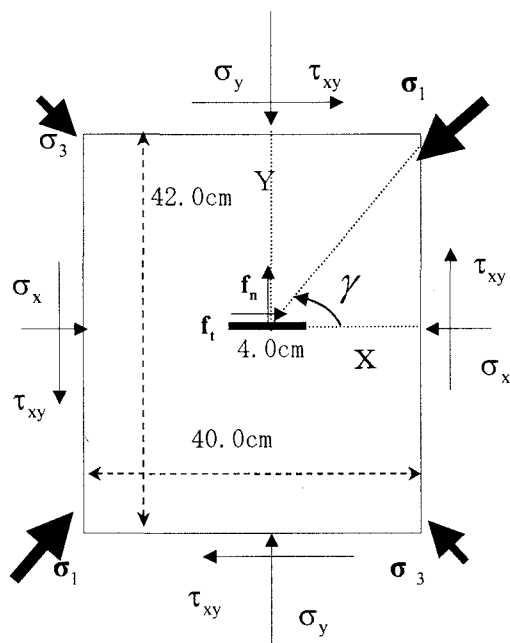
本報告で提案した解析手法を検証するために, 図-5に示すように2次元線形等方弾性体であり, ヤング係数 $E=70\text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu=0.2$, 中央に長さ $\ell=4\text{ cm}$ の亀裂(変位不連続)が存在しており, 無限遠方より2軸圧縮分布応力 σ_1 と, σ_3 が作用している無限板のモデルを考える. 亀裂(変位不連続)は, 最大圧縮 σ_1 応力方向から γ 傾いて存在している. また, ペナルティ係数 α_t , α_n の値はヤング係数 E と同じ値とした.

なお, 図-5のようなま X-FEM 解析モデルを作ると, 亀裂の角度 γ を変化させる場合, 要素の配置や形状を変更することが必要になり非常に面倒である. 本報告では, 図-5と等価である図-6のような X-FEM 解析モデルを作成し, 亀裂の角度 γ を変化させる場合には, 下式(39)のような応力の変換関係を使って荷重を変化させた.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \gamma + \sigma_3 \sin^2 \gamma \\ \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma \\ \tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma \end{aligned} \quad (39)$$



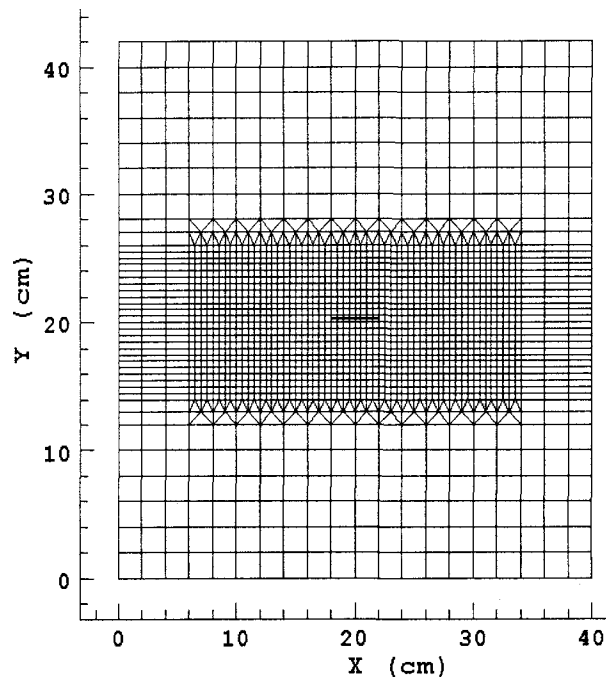
図—5 無限板解析モデル



図—6 接触を考慮する X-FEM 解析モデル

解析モデルのメッシュ分割は、図-7に示す。この図では、亀裂の上下に三角形要素があるが、前報⁷⁾のように3三角形の一つの頂点を二つに分離して、4節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法を採用しているため、近似モデルの要素は、全て4節点アイソパラメトリック要素であり、合計1960節点2024要素に分割している。なお、物体の剛体変位を取り除くため、長方形モデル中央左端の要素の左上の節点変位は、X、Y両方向を固定し、左下

の節点変位は、Y方向の変位のみを固定した。なお、亀裂は、中央線の一つ下の要素内の中央に沿って挿入している。亀裂先端の変位をゼロとするため、亀裂先端は、亀裂を含む要素辺中央上に設置し、その節点を含む要素辺の上下の節点には、不連続節点変位**b**は付加しない。



図—7 解析モデルのメッシュ図

5.2 E積分によるエネルギー解放率とその近似公式

本報告では線形等方弾性体を仮定しているので、エネルギー解放率を求める経路独立なE積分は、進展亀裂先端を含む物体内の任意領域の全境界Γ上の経路積分として次式のように補ひずみエネルギー型E積分公式を使用する¹⁰⁾

$$E(\ell) = \frac{\partial}{\partial \ell} \left\{ \int_{\Gamma_i + \Gamma_c} \left(\frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \right) ds \right\} - \int_{\Gamma_i + \Gamma_c} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (40)$$

ここで、 ℓ は亀裂の長さであり、 $\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{u}$ は、それぞれ、表面力および変位である。

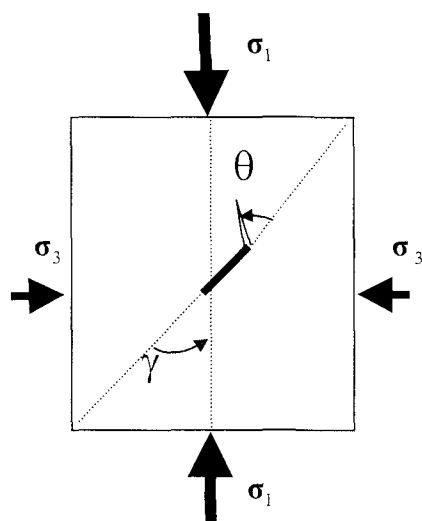
式(40)を数値解析する際に、式中の ℓ による偏微分項は2点差分近似、経路積分は表面力と変位をそれぞれ離散化した等価節点表面力 t_i と節点変位 u_i を積分経路上の全節点で和をとることにより、次式を用いた。

$$E = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{t_i(\ell + \Delta\ell) \cdot u_i(\ell + \Delta\ell) - t_i(\ell) \cdot u_i(\ell)}{2\Delta\ell} - \frac{t_i(\ell + \Delta\ell) - t_i(\ell)}{\Delta\ell} \cdot u_i(\ell) \right\} \quad (41)$$

ここで n は積分経路上の節点の数であり、 $\Delta\ell$ は基本モデルと、亀裂進展モデルの進展亀裂長さの差である。また式(41)内の変数の (ℓ) および $(\ell + \Delta\ell)$ は、それぞれ基本モデル、亀裂進展モデルの物理量であることを表している。E積分による方法は、全エネルギー法とよばれる方法を経路独立型積分に一般化した方法であり、このように進展亀裂長さの異なる2つのモデルを解析する必要がある。

5.3 X-FEM 解析を用いたエネルギー解放率－解析

本節では、5.1節で述べたモデルおよび構成式を使用し、図－8のように、亀裂右先端が折れ曲がり進展する瞬間時のエネルギー解放率を、前節で述べた X-FEM を使用し、式(41)によって求める。

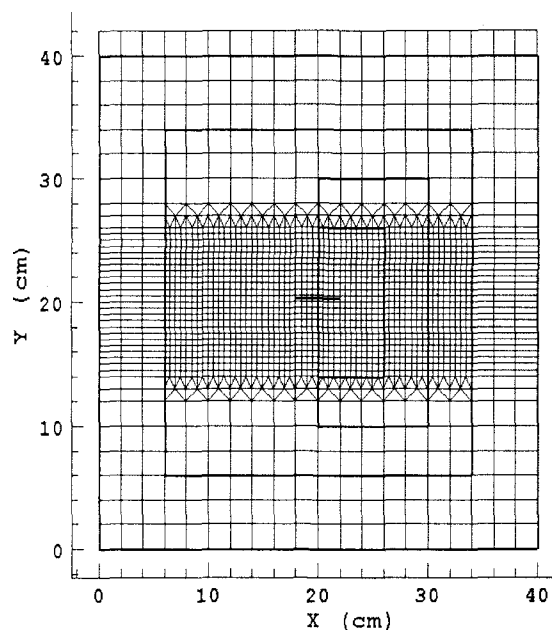


図－8 折れ曲がり進展亀裂

また、エネルギー解放率を算出する積分経路は、図－9のように、亀裂右先端を囲む経路1、2、及び両側先端を囲む経路3、4の合計4種類設定した。(番号が小さいほうが、小さな閉経路となっている。)なお、E積分では積分経路を要素辺上に設定し、ひずみや応力より精度の良い節点での表面力、変位のみで計算することができるため、ひずみないし応力が必要な周知のJ積分より精度が良い。

圧縮荷重下 ($\sigma_1 < 0, \sigma_3 < 0$) の場合では、亀裂面の大部分は閉じて接触しながら進展するため、亀裂面上の各点で摩擦力が存在する。このときの亀裂が直進方向に進展する場合のエネルギー解放率の理論解は次式で与えられる¹⁰⁾。

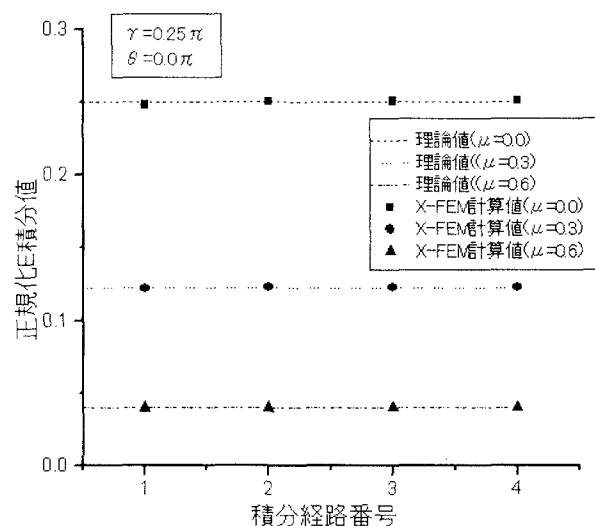
$$G = \frac{\pi\ell}{2E} \begin{cases} [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma - \mu(\sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma)]^2 & \text{for } [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma - \mu(\sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma)] < 0 \\ 0 & \text{for } [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma - \mu(\sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma)] \geq 0 \end{cases} \quad (42)$$



図－9 積分経路の設定

5.3.1 一軸圧縮荷重下にある摩擦力が存在する直進進展亀裂のエネルギー解放率

図－10は一軸一様圧縮荷重 σ_1 を $\gamma = 0.25\pi$ ($=45^\circ$) の方向から比例的に載荷した時に、亀裂が直進する場合 ($\theta = 0.0\pi$ とした場合) のエネルギー解放率である。横軸は経路番号であり、縦軸は無限遠からの一様引っ張り荷



図－10 経路独立性の検証

重下にある進展亀裂の理論解により求まるエネルギー解放率

$$G = \frac{\sigma_1^2 \pi \ell}{2E} \quad (43)$$

で正規化してある。以後すべて正規化したエネルギー解放率とは、補ひずみエネルギー型E積分公式(40)の数値解公式(41)の値を、式(43)で正規化したものである。図-10からわかるように、進展亀裂右先端のみを囲む経路1, 2, および進展亀裂両先端を囲む経路3, 4のどの経路においても、一定の値となっており経路独立性が示されている。また摩擦係数 μ は0.0, 0.3, 0.6の3つの場合をそれぞれ解析したが、どの摩擦係数でも経路独立性が示されていることがわかる。また図中の点線は式(42)で表される亀裂面上に摩擦力が存在する場合のエネルギー解放率の理論解であり、本解析方法によるエネルギー解放率と非常に良く一致していることがわかる。また、その誤差は摩擦係数の大きさに関わらず、どの経路においても約0.25%程度と、無限板を有限板にした差と一致しており、非常に良い精度で解析できていることが分かる。

図-11は一軸圧縮荷重下で圧縮荷重角度 γ を 0.0π から 0.5π まで 0.05π ごと、また摩擦係数 μ を0.0, 0.3, 0.6と変えた時のエネルギー解放率を求めたものである。横軸は圧縮荷重角度 γ であり、縦軸は正規化したエネルギー解放率である。図中曲線は式(42)で表される理論解である。どのような圧縮荷重角度においても理論解との誤差は約0.25%以内であった。この図からも圧縮荷重下での進展亀裂のエネルギー解放率の解析に、E積分を用いた本報告による摩擦を考慮したX-FEM解析が有効であるこ

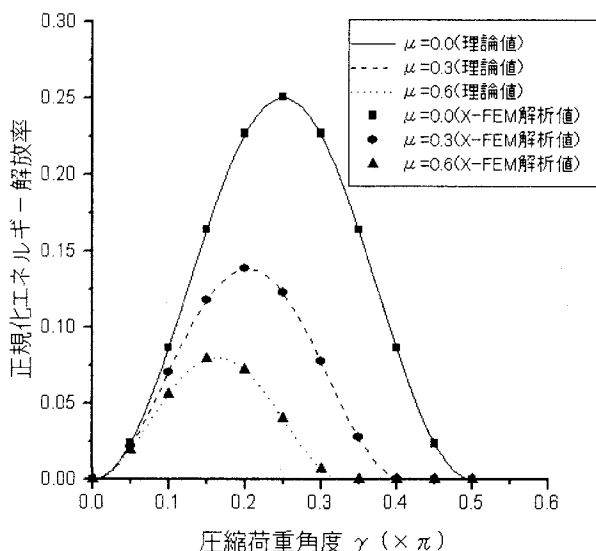


図-11 一軸圧縮荷重角度 γ の変化とエネルギー解放率

とが示されている。また、圧縮荷重角度がある値以上になると、摩擦力により亀裂面は動かなくなり、エネルギー解放率がゼロとなることもわかる。そのエネルギー解放率がゼロとなる圧縮荷重角度は、式(42)によると、摩擦係数 μ が0.3の時は $\gamma \cong 0.41\pi$ 、 μ が0.6の時は $\gamma \cong 0.33\pi$ となることが分かるが、本解析でも図-11の様に、同様の荷重角度付近でエネルギー解放率がゼロとなっていることが分かる。

5.3.2 一軸圧縮荷重下にある摩擦力が存在する折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

5.3.1節で一軸圧縮荷重下の場合に摩擦力が存在する直進亀裂の問題を解析し、理論解と比較することにより本報告によるX-FEM解析が有効であることが確かめられた。次に、この方法を用いて折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を解析し、その進展特性を議論する。

図-12は一軸一様圧縮荷重下で圧縮荷重角度 γ が 0.25π ($=45^\circ$)の場合、折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を求めたものである。横軸は亀裂折れ曲がり角度 θ で、縦軸は正規化したエネルギー解放率である。亀裂折れ曲がり角度 θ は 0.0π から 0.5π までの 0.1π ごとに、また摩擦係数 μ は0.0, 0.3, 0.6の場合をそれぞれ解析した。この図から、摩擦係数の大きさによらず、最大エネルギー解放率により、亀裂は初期亀裂面から約 $0.39\pi \sim 0.41\pi$

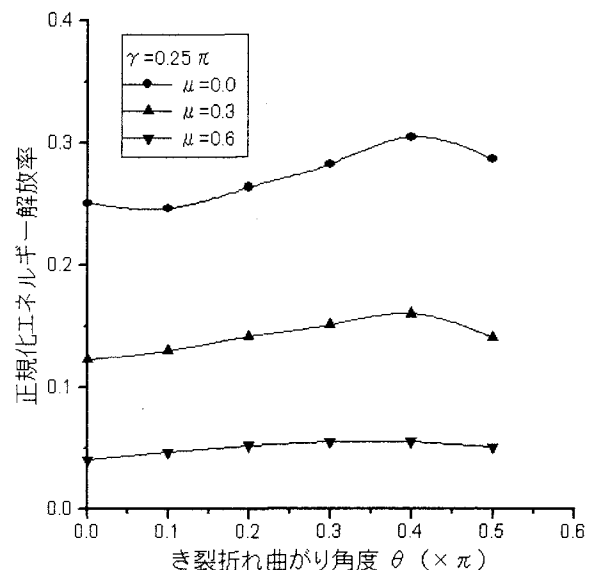


図-12 一軸圧縮荷重下で折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

($\approx 70^\circ \sim 73^\circ$) 圧縮荷重 σ_1 方向へ折れ曲がって進みやすいことがいえる。これは図-13 に示すような圧縮荷重下でのウイングクラックタイプの亀裂の折れ曲がり進展開始方向を表わしていると考えられる。

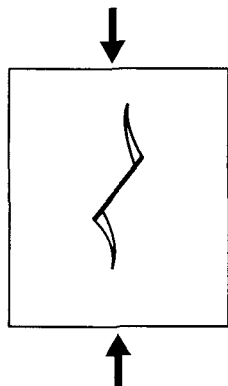


図-13 ウイングクラック型亀裂進展

行ったものである。主応力比 σ_3/σ_1 が、0.5以上になると、

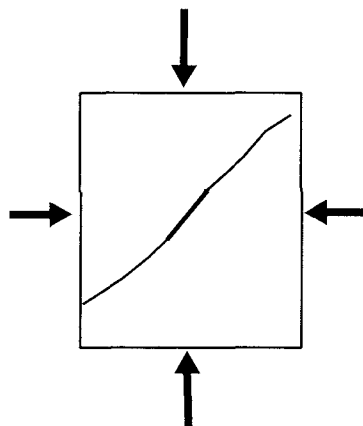


図-15 直進亀裂進展

亀裂面は滑らず固着状態となるため、エネルギー解放率はゼロとなる。図-17は $\mu=0.6$ の場合で主応力比が0.3より大きいとエネルギー解放率がゼロとなったので主応力比

5.3.3 二軸一様圧縮荷重下にある摩擦力が存在する折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

図-14は、二軸一様圧縮荷重を $\gamma=0.2\pi$ ($\approx 36^\circ$) の方向から、主応力比 σ_3/σ_1 を0.0から0.9まで0.1ごとに変えて比例的に载荷した場合の、摩擦が無い折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を求めた図である。この図から進展方向は主応力比が0.1から0.3ぐらいまでは、一軸

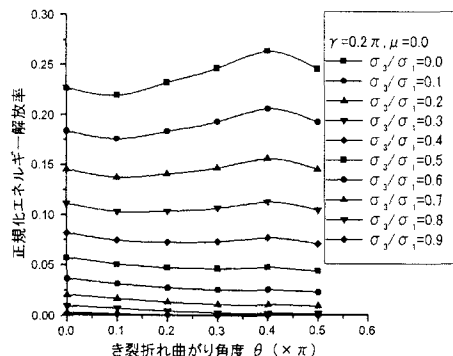


図-14 二軸圧縮荷重で $\mu=0.0$ の場合、折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

の場合 (主応力比が0.0) のように、初期亀裂面に対して最大主応力 σ_1 方向へ約 0.4π 傾いた方向に進展しやすいことが分かるが、主応力比が0.4から0.9までは直進方向 ($\theta=0.0\pi$) のほうが大きくなっており、図-15のように、折れ曲がらず直進する方向にせん断破壊していくことが予想される。

同様の二軸一様圧縮荷重下で、主応力比は0.1ごとに亀裂面に摩擦が存在する場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を計算した。図-16は $\mu=0.3$ の場合で解析を

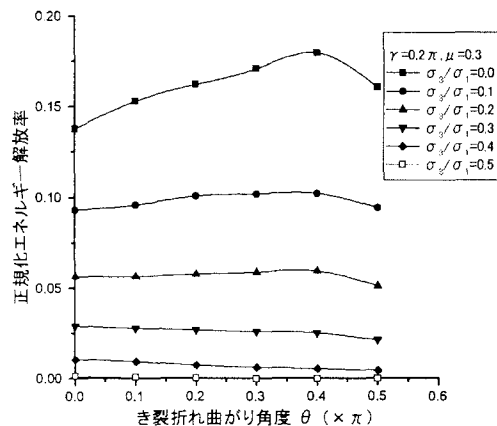


図-16 二軸圧縮荷重下で、 $\mu=0.3$ の場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

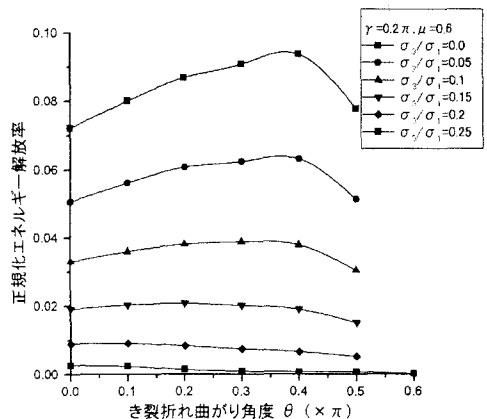


図-17 二軸圧縮荷重下で、 $\mu=0.6$ の場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

を0.05ごとに変えて解析をおこなった。以上の一軸及び二軸の一樣圧縮荷重の時、折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の折れ曲がり角度 θ に関する分布形状は既報¹⁰⁾の結果の特性と非常に良く一致していることが分かった。ただし、既報¹⁰⁾の解析では、不連続面を要素の辺上に沿って節点を分離する古典的な手法であるため、亀裂折れ曲がり方向はあらかじめ設定された方向に作られてしまうが、本X-FEMによる手法では、亀裂折れ曲がり方向は全く任意方向にとれる優位性がある。

6. 結論

本報告では、非線形方程式の解析に対して収束が早くかつ精度の良い陰解法リターンマッピング計算アルゴリズムを組み込み、離散化された全体の非線形連立剛性方程式をNewton Raphson法に整合させた摩擦を考慮したX-FEM解析手法を提案した。その解析手法により、中央に亀裂がある無限板を近似したモデルに、一樣圧縮荷重が一軸と二軸に載荷された場合において、E積分により折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を求めた。その結果、進展亀裂先端を囲み、先端近傍から離れた任意の積分経路で、折れ曲がり方向にかかわらず精度良くエネルギー解放率を求めることができた。従って、提案した摩擦を考慮したX-FEM解析手法は、非常に精度の良いものであることが確認できた。

参考文献

- 1) Simo, J.C. Oliver, J. and Armero, F.: An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent solids, *Computational Mech.*, 12, pp.277-296, 1993.
- 2) Oliver, J.: Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation, *Int. J. Num. Meths. Engng.* 39, pp.3601-3623, 1996.
- 3) Larsson, R. and K. Runesson: Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity, *J. of Eng. Mech.*, pp.402-411, 1996.
- 4) 浅井光輝, 寺田賢二郎: 有限被覆法による不連続面進展解析, *応用力学論文集*, Vol.6, pp193-2004.
- 5) Belytscheko, T and T. Black: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Num. Meths. Engng.* 45, pp.601-620, 1999.
- 6) Moes, N. and J. Dolbow, and T. Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Num. Meths. Engng.* 46, pp.131-150, 1999.
- 7) 矢富盟祥, 李 炳奇: X-FEMによる亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析, *応用力学論文集*, Vol.6, pp19-26, 2003.
- 8) Wu, C.H.: Explicit asymptotic solution for the Maximum Energy Release Rate problem, *Int. J. Solids Structures*, Vol.15, pp.561-566, 1983.
- 9) 長嶋利夫: X-FEMによる弾性解析の精度についての検討, *日本機械学会論文集 (A編)* 67, pp. 1569-1575, 2001.
- 10) 例えば, 矢富盟祥, 鱸 洋一: 圧縮荷重下にある進展亀裂のE積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, *土木学会論文集*, No.612, I-46, pp.251-263, 1999.
- 11) J. Dolbow, N. Moes and T. Belytschko: An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, pp. 6825-6846, 2001.
- 12) P. Ladevèze: *Nonlinear Computational Structural Mechanics*, New York: Springer Verlag, 1998.
- 13) Perić, D. and Owen, D.R.J., *Computational Model for 3-D Contact Problems With Friction Based on the Penalty Method*, *Int. J. for Num. Meth. In Eng.*, Vol.35, pp.1289-1309, 1992.
- 14) 例えば J. C. Simo, T.J.R. Hughes: *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag New York, 1998.

(2004年4月16日 受付)