

陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた圧縮荷重下にある き裂先端近傍応力場の有限要素解析

Finite element analysis of stress fields near a crack tip under compressive loads
using implicit elasto - plastic calculation algorithm

鱈 洋一*・矢富 盟祥**

Yoichi Suzuki and Chikayoshi Yatomi

*正会員 博士(工学) 五大開発株式会社 技術研究所 (〒921-8051 石川県金沢市黒田 1-35)

**正会員 Ph. D. 金沢大学大学院教授, 自然科学研究科 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

In this paper, we examine the implicit elasto-plastic calculation algorithm with contact conditions on the crack surfaces in order to obtain stress and strain fields near a crack tip under the biaxial compressive loads. It is important to elucidate the fracture criterions under compressive loads such as the explanation of the existence and the creation of long faults, landslide in slope ground and so on. We find that the mode II crack extension can be explained by plastic effect near a crack tip, and stretch fracture surrounding a plastic crack tip does not occur; especially, the internal friction angle is small. We also find, under the softening plasticity, that deviatoric strain region extends straightly from a crack tip and localizes to narrow band.

Key Words: contact problem, implicit elasto-plastic calculation algorithm, mode II crack extension.

1. はじめに

土木工学の分野においては、鋼、コンクリート構造物の破壊はもとより、地すべり、地震の活断層といった自然を相手にした破壊現象の把握という意味においても、ますます破壊力学の土木工学への応用は重要であると考え、破壊力学は、き裂が“いつ”、“どの方向に”進展するかという破壊規準を解明することを目的とした、力学分野においては比較的新しい学問であるが、コンピュータの進歩により計算力学、非線形破壊力学として近年急速に進歩している。それにより破壊メカニズムの解明という意味で様々な問題(特に地球規模での大規模な問題やミクロなメカニズムまで含めた問題など)が解くことが可能となっているが、未だ圧縮荷重下の破壊規準、3次元の破壊規準という難問が山積している。

コンクリート、岩盤、地盤材料における一軸圧縮荷重下の(ないし多軸圧縮荷重下においても)破壊面は図-1のようにモードII型で、供試体側面から見ると、ほとんどの場合、直線的ないし曲線的になめらかにモードII型で進展している。一方、モルタルやアクリルライト板などの材料にあらかじめ斜め初期き裂を挿入しておく、図-2のように、き裂面は最大引張り方向に折れ曲がっ

て、圧縮荷重が負荷されている方向になめらかに進展するウィングクラック型進展をする。

したがって圧縮荷重下で、どのような条件のもとで上記のようなモードII型のまま、き裂が進展するかを定量的に把握することは非常に興味ある、かつ、重要な問題となる。

なお、断層の生成メカニズム解明への破壊力学の応用や、コンクリートのせん断破壊メカニズム解明などの問題に対して破壊力学的手法を用いる際にモードII型き裂進展という言葉がしばしば用いられている。それらの中には応力状態がモードIIのみの場合であるき裂進展開始の限界値という意味合いから、進展開始後は元のき裂と同方向に進む場合と折れ曲がって進む場合のいずれの場合もモードII型き裂進展という言葉で混在して用いられている。本論文では混乱を避けるためモードII型き裂進展という言葉は進展開始後に元のき裂と同方向に進む場合に限定することに注意したい。

地震の断層生成メカニズム解明を意図してMelinはどのような時、モードII型のき裂進展するのか?と題した論文¹⁾(1986)を報告しており、その中でき裂面に対して等方圧縮応力とせん断応力の比によりモードII型進展が起こる条件を議論している。

また、Scholzらは長い直線的な断層(き裂)の生成メカニズムに対して実験的な論文を報告²⁾

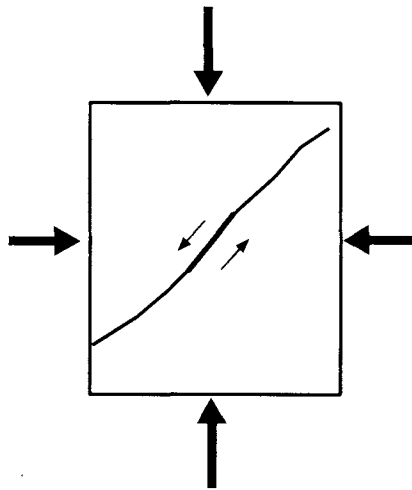


図-1 モードⅡ型き裂進展

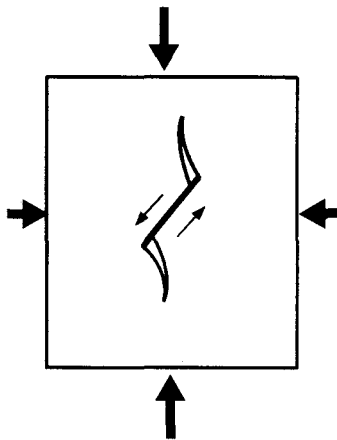


図-2 ウイングクラック型き裂進展

(1988) しており、せん断応力下では一般的に、き裂は折れ曲がり進展することより、長いせん断的な不連続面の存在は矛盾であり、単一き裂では説明できず、複数のき裂が連結する干渉により説明できるとしている。

また、近年でも圧縮荷重下にあるき裂が直線的に進展する説明として折れ曲がりき裂先端の応力拡大係数 k_2 が最大となる方向へ進展するとして実験結果と比較している Isaksson らの報告³⁾

(2002) があるが、進展き裂、折れ曲がりき裂面上でき裂は閉じているという拘束の強い仮定をしている。

筆者らは既報^{4), 5)} において、無限板内に存在する直線的初期き裂に多軸荷重が載荷されるという簡単な問題設定をし、理論解析および数値解析を行う事より、そのき裂に対する応力状態を主応力で考えると最大主応力と最小主応力の比が大きい場合、元のき裂と同方向にモードⅡ型のままで、き裂が進展する可能性を示唆する結果を得た。

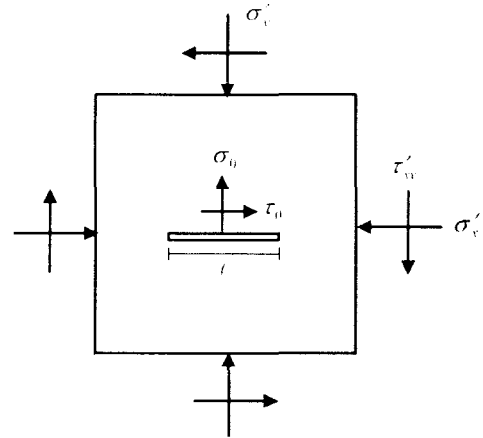


図-3 圧縮荷重下にある2次元無限板内のき裂 (矢印はすべて負の方向)

また、それらモードⅡ型き裂進展は圧縮荷重下でなければ起こらないと考えられることや、き裂に平行な T-Stress がモードⅡ型き裂進展に寄与している事を明らかにした。しかし、それらの報告でも述べたが、一般に主応力比の大きい圧縮多軸荷重下ではき裂周りの塑性域が大きく、小規模降伏の仮定が成立していないことも予想される。

そこで本論文では近年、弾塑性計算の精度が向上すると注目され国内外問わず研究・開発されている陰解法弾塑性計算アルゴリズムをき裂面上での接触・摩擦条件を考慮した解析手法に導入し、圧縮荷重下での弾塑性体内に存在するき裂先端近傍の応力分布について考察した。

2. 圧縮荷重下にあるき裂先端近傍での弾性応力場

本論文の目的は弾塑性体内に存在するき裂先端近傍の応力分布の評価であるが、き裂面上の接触・摩擦条件がある FEM 解析を用いた応力評価手法の精度を検証するために、まず線形破壊力学によるき裂先端近傍の応力解を求める。図-3に示すような2次元での平面ひずみ圧縮荷重下にある無限板内に存在するき裂を考える。圧縮荷重下にあるき裂の解は図-3のような無限遠から与えられる応力による解と、き裂面上での反力および摩擦力である応力による解の重ね合わせである。

その時の Westergaard の応力関数は次式のように示される⁶⁾。

$$\begin{Bmatrix} Z_I \\ Z_{II} \end{Bmatrix} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \begin{Bmatrix} \sigma_y^{\infty} - \sigma_0 \\ \tau_{xy}^{\infty} - \tau_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \tau_0 \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_x^{\infty} - \sigma_y^{\infty}}{2} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

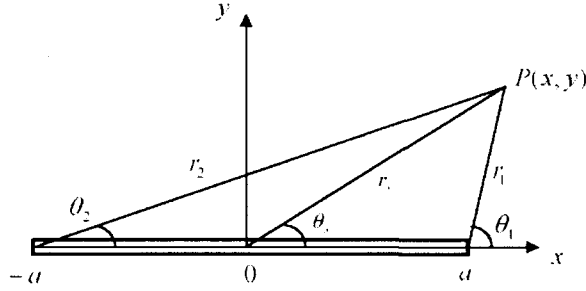


図-4 き裂先端近傍の極座標

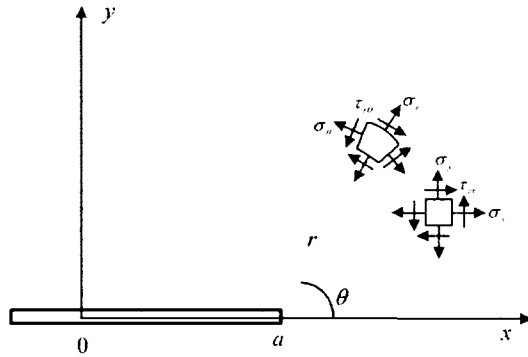


図-5 き裂先端近傍の極座標表示による周応力

ここで a はき裂の半分の長さ ($= \ell/2$) であり, σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ (< 0) はそれぞれ無限遠での, き裂面に平行, 垂直, せん断方向の圧縮応力である. また, σ_0 , τ_0 はき裂面上の反力, 摩擦力である. よって,

$$\begin{cases} \sigma_0 = \sigma_y^\infty & \text{if } \sigma_y^\infty < 0, \\ \sigma_0 = 0 & \text{if } \sigma_y^\infty \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \tau_0 = \pm \mu |\sigma_y^\infty| & \text{if } |\tau_{xy}^\infty| \geq \mu |\sigma_y^\infty|, \\ \tau_0 = \tau_{xy}^\infty & \text{if } |\tau_{xy}^\infty| < \mu |\sigma_y^\infty|. \end{cases} \quad (3)$$

と表せる.

一方, 物体内の応力は Westergaard の応力関数を用いて

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' \\ \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I' \\ -y \operatorname{Re} Z_I' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z_{II}' \\ -y \operatorname{Re} Z_{II}' \\ \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II}' \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

のように表される. よって図-4のような座標を用いることによって応力は以下のように表せる.

$$\sigma_x = \frac{r_0}{\sqrt{r_1 r_2}} (\tau_{xy}^\infty + \mu |\sigma_y^\infty|) \left[2 \sin \left(\theta_0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta_0 \cos \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] + \sigma_x^\infty \quad (5a)$$

$$\sigma_y = \frac{r_0}{\sqrt{r_1 r_2}} (\tau_{xy}^\infty + \mu |\sigma_y^\infty|) \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \times \cos \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} + \sigma_y^\infty \quad (5b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{r_0}{\sqrt{r_1 r_2}} (\tau_{xy}^\infty + \mu |\sigma_y^\infty|) \left[\cos \left(\theta_0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta_0 \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] - \mu |\sigma_y^\infty| \quad (5c)$$

き裂右先端近傍の応力分布はき裂長さ a に対して r の $-1/2$ のオーダーの特異性を持つ項から始まる級数により展開でき,

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{n=-1}^{\infty} A_n (\sqrt{r/a})^n f_{ij,n}(\theta) \quad (6)$$

と表わすことができる.

この応力を図-5で表すような極座標系における応力に変換し, r の $-1/2$ のオーダーをもつ第1項 (特異項) は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \frac{5}{4} \cos(\theta/2) - \frac{1}{4} \cos(3\theta/2) \\ \frac{3}{4} \cos(\theta/2) + \frac{1}{4} \cos(3\theta/2) \\ \frac{1}{4} \sin(\theta/2) + \frac{1}{4} \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\frac{5}{4} \sin(\theta/2) + \frac{3}{4} \sin(3\theta/2) \\ -\frac{3}{4} \sin(\theta/2) - \frac{3}{4} \sin(3\theta/2) \\ \frac{1}{4} \cos(\theta/2) + \frac{3}{4} \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

となり, 第2項 (定数項) は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^\infty \cos^2 \theta + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta + 2\tau_{xy}^\infty \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_x^\infty \sin^2 \theta + \sigma_y^\infty \cos^2 \theta - 2\tau_{xy}^\infty \sin \theta \cos \theta \\ (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}^\infty (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

と表せる.

なお, 式(7)中の K_I , K_{II} は引張り荷重下では

$$K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a} \quad (9)$$

であり, 圧縮荷重下では

$$K_I = 0, \quad K_{II} = (\tau_{xy}^\infty + \mu |\sigma_y^\infty|) \sqrt{\pi a} \quad (10)$$

である.

上式より, き裂先端近傍の応力は式(7)で近似されるが, σ_θ などの大きさは K_I , K_{II} に無関係な σ_x^∞

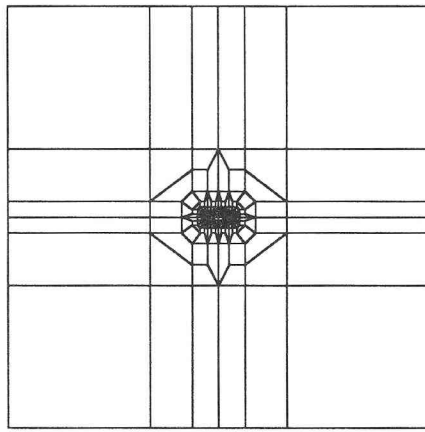


図-6 有限要素メッシュ

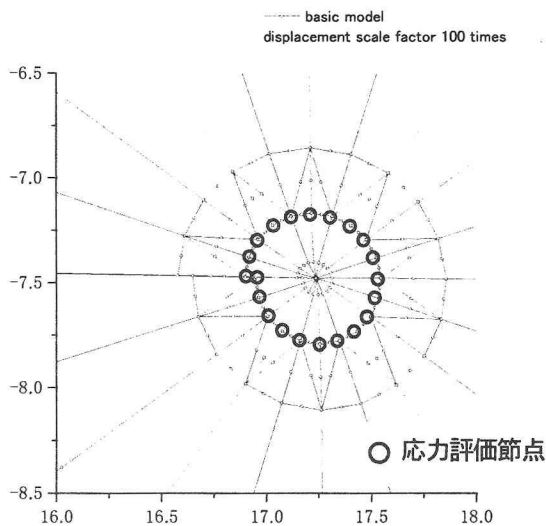


図-7 き裂先端近傍の応力を評価する節点

の影響が大きくなり、式(8)の項 (T-stress と呼ばれている) が無視できなくなる。以後、式(7)と式(8)の和でもって σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ を近似して議論する。

3. 圧縮荷重下にあるき裂先端近傍応力場の FEM 解析

前章で考えた、2次元で圧縮荷重を受ける無限板内に存在するき裂先端近傍での応力場を FEM を用いて求める。圧縮荷重下でのき裂面は閉じて接触し、応力状態によってはき裂面上で摩擦力を受けながらすべる。そのような圧縮荷重下では通常の FEM を用いると、き裂上下面がお互いの物体内に食い込んでしまい、非現実的な解となってしまう。そこでき裂面上の節点で接触・摩擦条件を全体剛性方程式に導入する方法⁴⁾を用いて解析を行った。また本論文で扱う荷重はすべて比例荷重とし、すなわち所定の荷重状態まで1パラメータで表せるような荷重状態を徐々に増加させた。FEM 解析では最終荷重状態までを等分割した荷

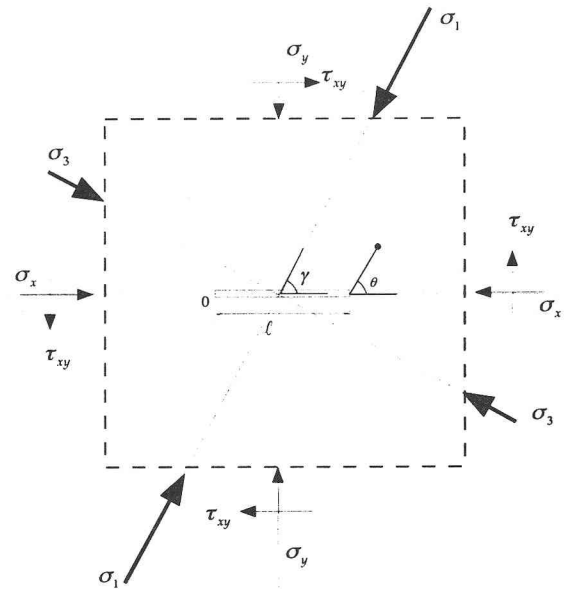


図-8 2軸圧縮荷重下にあるき裂

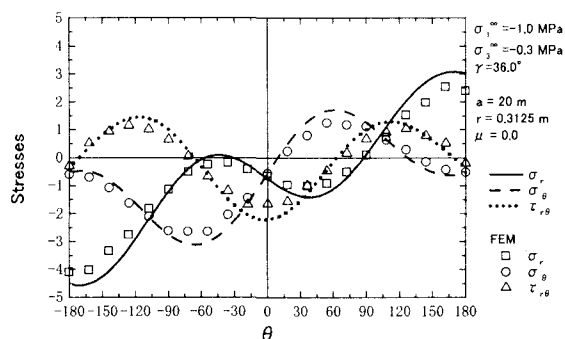
重をステップごとに与え、最初のいくつかの解析で陰解法弾塑性計算の特徴である、ある程度のステップ数に分割すればステップ数に依存しない解が得られることを確認した。

用いた有限要素メッシュは図-6に示したものであり、要素数 332、節点数 920 である。き裂先端近傍の要素は特異要素^{7), 8)}、もしくは2次の6節点三角形アイソパラメトリック要素を用い、それ以外の部分は2次の8節点四角形アイソパラメトリック要素を用いて要素分割を行った。き裂はモデル中央に存在し、き裂長さ 40m に対して縦横それぞれ 800m で無限板を近似した。ヤング率は花崗岩を想定し 50GPa、ポアソン比は 0.3 とした。

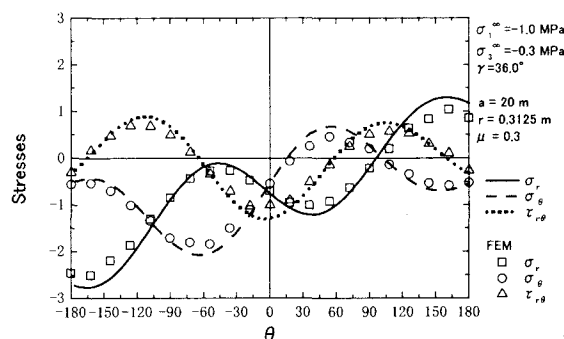
図-7はき裂先端近傍の要素分割図であるが、き裂先端から要素辺1つ分 ($r=0.3125\text{m}$) の箇所にある丸印を付けた節点で応力を評価した。この節点での応力は隣接している要素の最近接 (もしくは一致) しているガウス点の応力を平均することにより求めた。まず、このき裂先端近傍の応力評価法の精度を検証する為に、物体全体を弾性体として FEM 解析を行い、理論解と比較した。

対象とした問題は図-8に示すような、き裂面からの角度 γ が 36 度の方向から最大主応力 σ_1 が -1.0MPa で、それと 90 度の角度の方向から最小主応力が σ_3 が -0.3MPa で載荷されている2軸圧縮荷重下を考える。この最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 の比 σ_3/σ_1 を以後主応力比と呼ぶ。また、き裂面上の摩擦係数 μ は 0.0 と 0.3 の場合を考える。

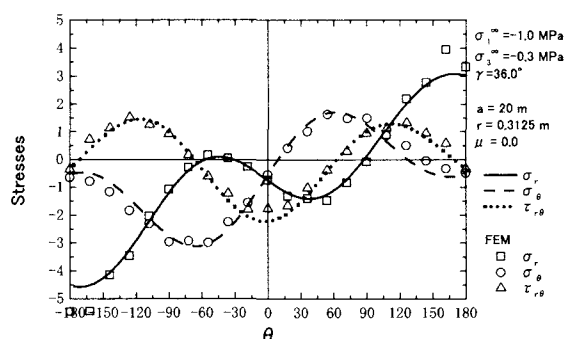
図-9(a)~(d)は極座標で表した、き裂先端近傍の応力分布である。横軸はき裂先端からの角度 θ



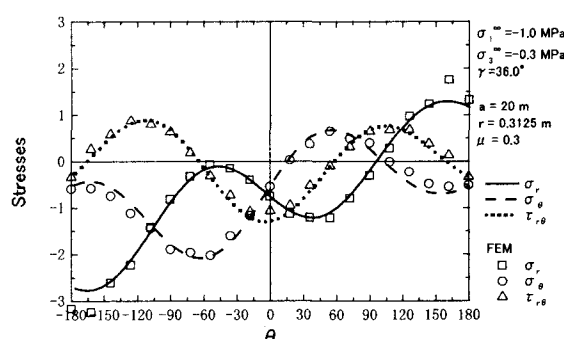
(a)き裂先端近傍要素: 特異要素 き裂面上の摩擦係数 $\mu : 0.0$



(c)き裂先端近傍要素: 特異要素 き裂面上の摩擦係数 $\mu : 0.3$



(b)き裂先端近傍要素: 2次アイソパラメトリック要素 き裂面上の摩擦係数 $\mu : 0.0$



(d)き裂先端近傍要素: 2次アイソパラメトリック要素 き裂面上の摩擦係数 $\mu : 0.3$

図-9 き裂先端近傍の応力分布: 理論解とFEMの比較

であり、縦軸は各応力 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ である。図中 $\square$ は σ_r , $\circ$ は σ_θ , $\triangle$ は $\tau_{r\theta}$ であり、前節で述べた式 (7), (8) の和である各応力も併記した。図-9 (a), (b) はき裂面上の摩擦係数 μ が 0.0 の場合であり、(c), (d) は摩擦係数 μ が 0.3 の場合である。また、(a), (c) はき裂先端近傍の要素を特異要素とした場合で、(b), (d) は 2 次アイソパラメトリック要素である 6 節点三角形要素とした場合である。

き裂面上での摩擦のあるなしに関わらず、特異要素より 2 次アイソパラメトリック要素の方が精度の良いことが分かる。特異要素は、き裂先端にあたる節点で応力が特異となるよう、またき裂先端からの距離を r とした時、き裂長さ a に対して $r^{-1/2}$ の特異性のオーダーを持つ応力分布となるよう開発された要素であり、き裂を対象とした弾性解析の場合に多用されている。しかし、本来、8 節点四角形要素を変形した要素なので応力の精度が良いと言われるガウス点が要素内部にあり、今回のような節点で応力を評価する場合、若干精度面で不利となっていると考えられる。また、弾塑性解析になると、き裂先端で応力の特異性がなくなり応力は有限となる為、適さなくなる。一方、

2 次アイソパラメトリック要素であれば、き裂先端で応力が有限となり弾塑性解析にも適していること、ガウス点が節点と一致しており、今回の応力の評価法に適していること、弾性解析でも理論解と比較して比較的精度の良いことから以後の解析では、き裂先端近傍の要素として 2 次アイソパラメトリック要素を採用する。

次に弾塑性体内にあるき裂先端近傍の応力分布を求める。弾塑性解析には陰解法弾塑性計算アルゴリズムを導入した。この陰解法弾塑性計算アルゴリズムは Elastic-plastic operator split の概念に基づく General return mapping algorithms により、精度良く降伏曲面上にのる応力を求めること、全体の非線形連立方程式を Newton Raphson 法に整合するよう Consistent 弾塑性構成テンソルを用い、求解の過程において誤差が 2 次収束することが保証された弾塑性計算手法であり、Simo ら^{9), 10)} により提案された後、近年でも国内外を問わず研究・開発が進められている手法であり、特に地盤材料への適用も種々試みられている^{11), 12), 13), 14)}。

本研究では地盤材料を弾塑性体として扱う場合に最も単純なモデルである Drucker Prager モデルを対象として陰解法弾塑性計算を行った。

Drucker Prager モデルの降伏関数は次式で表される。

$$f = \|S\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + H\bar{e}^p) = 0, \quad (11)$$

ここで S は偏差応力であり, p は平均応力である。 β は平均応力にかかる係数であり, 内部摩擦角 ϕ と関係付けられ, σ_y は降伏応力であり圧縮を正とし, 粘着力 c と関係付けられる。 H は硬化・軟化係数であり, $\bar{e}^p$ は相当塑性偏差ひずみである。この降伏関数を用いて Consistent 弾塑性構成テンソルを求めると,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep(k)} = & \kappa \left(1 - \frac{\kappa\beta^2}{A} \right) (I \otimes I) + 2\mu\theta \left[I - \frac{1}{3}(I \otimes I) \right] \\ & - \frac{2\mu\kappa\beta}{A} [(I \otimes \hat{n}) + (\hat{n} \otimes I)] - 2\mu\theta (\hat{n}_{n+1} \otimes \hat{n}_{n+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

ここで κ , μ はラメの定数であり,

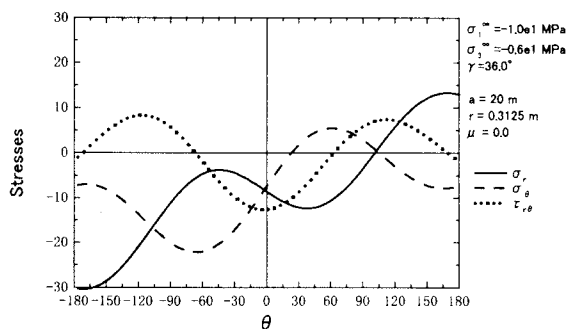
$$A = 2\mu + \kappa\beta^2 + \frac{2}{3}H, \quad (13)$$

$$\theta = 1 - \frac{2\mu\Delta\gamma}{\|S_{n+1}^{trial}\|}, \quad (14)$$

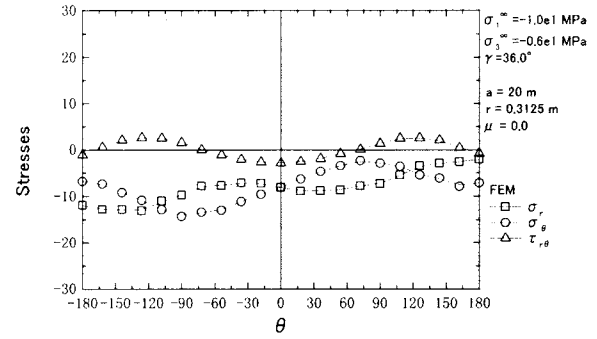
$$\bar{\theta} = \frac{2\mu}{A} - (1 - \theta), \quad (15)$$

である。式(12)で $\theta = 1$ とすると, 通常理論的に求まる弾塑性構成テンソルに一致する。

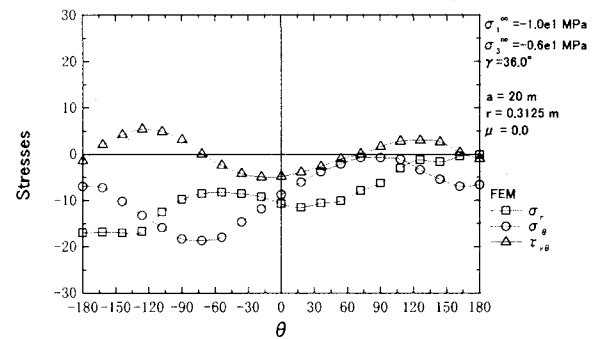
図-10 は最大主応力 σ_1 が -10.0MPa であり, 主応力比 0.6 の 2 軸荷重が荷重角度 $\gamma = 36$ 度の方
向から载荷された場合のき裂先端近傍での応力分布である。き裂面上の摩擦係数は 0.0 であり,
Drucker Prager モデルの塑性特性は降伏応力 σ_y



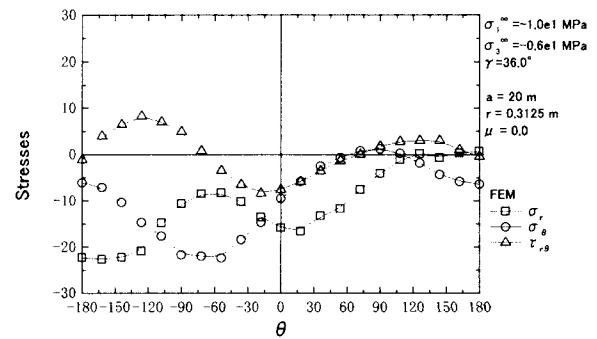
(a)弾性体



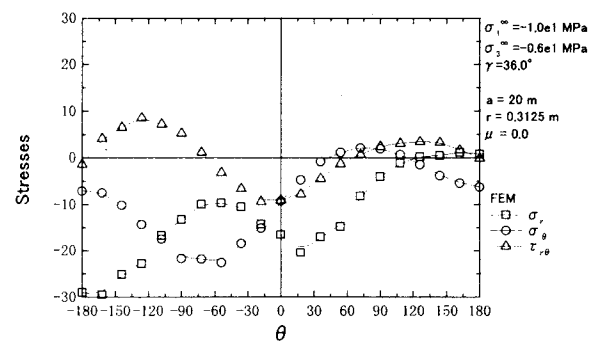
(b)弾塑性体 : $\sigma_y = 5.0\text{MPa}$, $\phi = 0^\circ$, $H=0.0$



(c)弾塑性体 : $\sigma_y = 5.0\text{MPa}$, $\phi = 10^\circ$, $H=0.0$



(d)弾塑性体 : $\sigma_y = 5.0\text{MPa}$, $\phi = 20^\circ$, $H=0.0$



(e)弾塑性体 : $\sigma_y = 5.0\text{MPa}$, $\phi = 30^\circ$, $H=0.0$

図-10 き裂先端近傍の応力分布:弾性と弾塑性解の比較

図-10 (a)は比較の為の同主応力状態下にあるが 5.0MPa, 内部摩擦角 ϕ が 0 度から 30 度まで 10 度ごと, 硬化・軟化係数 H が 0.0, すなわち完全塑性の場合である. 弾性体内の応力分布 (式 (7),(8)の和) であり, (b)は内部摩擦角 ϕ が 0 度, (c)は内部摩擦角 ϕ が 10 度, (d)は内部摩擦角 ϕ が 20 度, (e)は内部摩擦角 ϕ が 30 度の場合の弾塑性体内における応力分布である.

これらの図より分かるように ϕ が小さいほど, き裂先端近傍が塑性化による応力の再配分により, どの応力成分も小さくなり, き裂先端からの角度による変化も小さくなっていることが分かる.

弾性体の場合, き裂先端からの角度 θ が約 70 度方向で周応力 σ_θ が引張りで最大となっており, 破壊力学の分野で汎用されている最大周応力破壊基準によると, この方向にき裂は進展していくことが考えられる. しかし, 弾塑性体内の応力分布では, その方向の周応力 σ_θ が小さくなっており, ϕ が小さいほど, すなわち粘性土のような c 材料

では顕著であることがわかる. また, この主応力状態では ϕ が 10 度より小さいと, 周応力 σ_θ はき裂先端近傍の全方向で圧縮状態となっていることがわかる.

また, 弾性体の応力分布の中で σ_r を見てみると, き裂面上での値, すなわちき裂先端からの角度 θ が 180 度方向での値が引張りで大きくなっていることがわかる. これは実験でもしばしば見られる, き裂先端以外のき裂面上からき裂が進展する理由を表しているのではないかと考えられる. この σ_r も弾塑性体であると小さくなり, また ϕ が小さい c 材料では顕著である.

これらの σ_θ , σ_r の結果から, この主応力状態で ϕ が小さい c 材料ではき裂先端近傍が全方向で圧縮状態になっており, 引張り応力による破壊は生じにくくなっているということが言える.

4. 塑性特性の違いによる き裂先端近傍のひずみ場

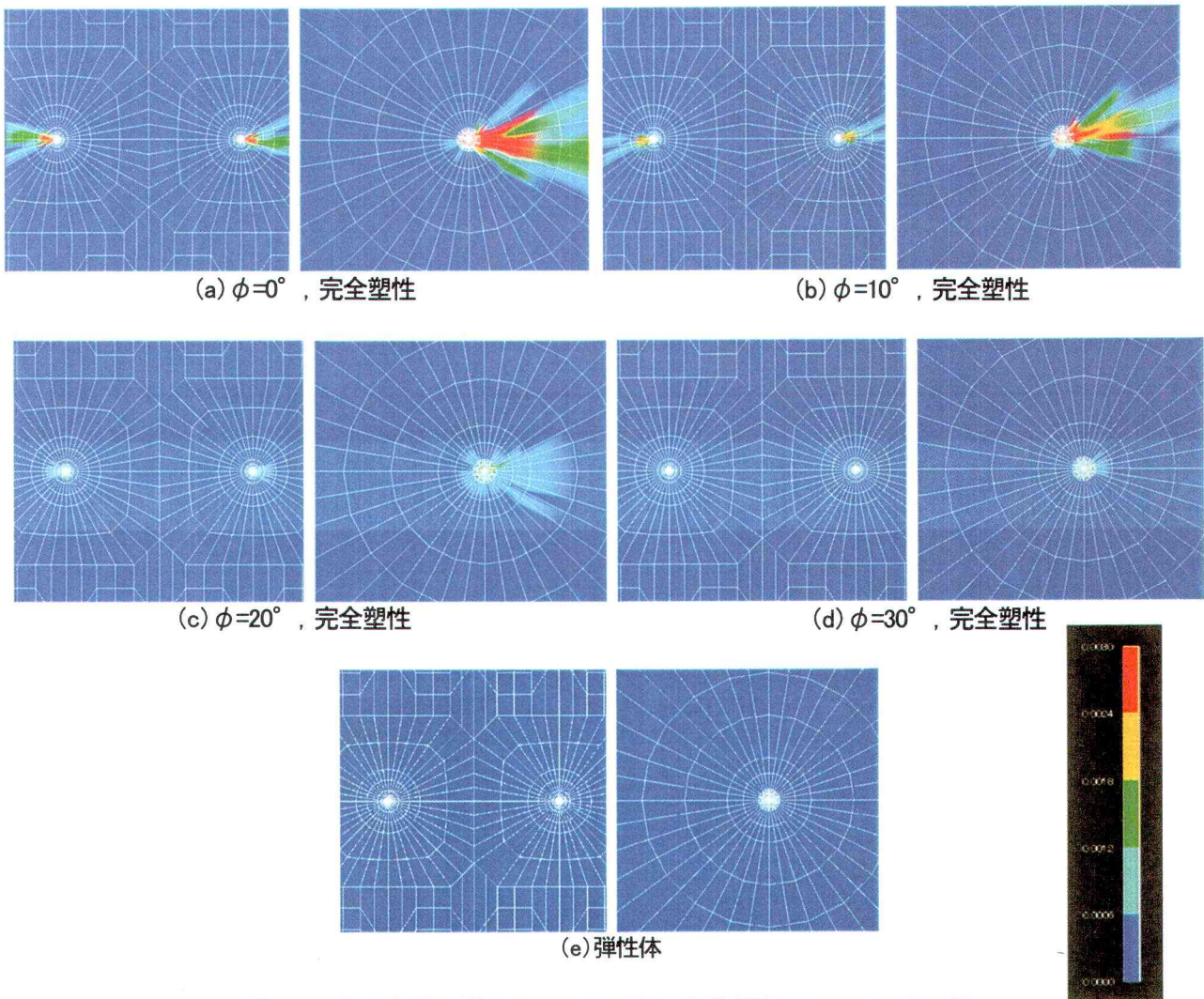


図-11 相当偏差ひずみのコンター図:内部摩擦角の違いによる比較

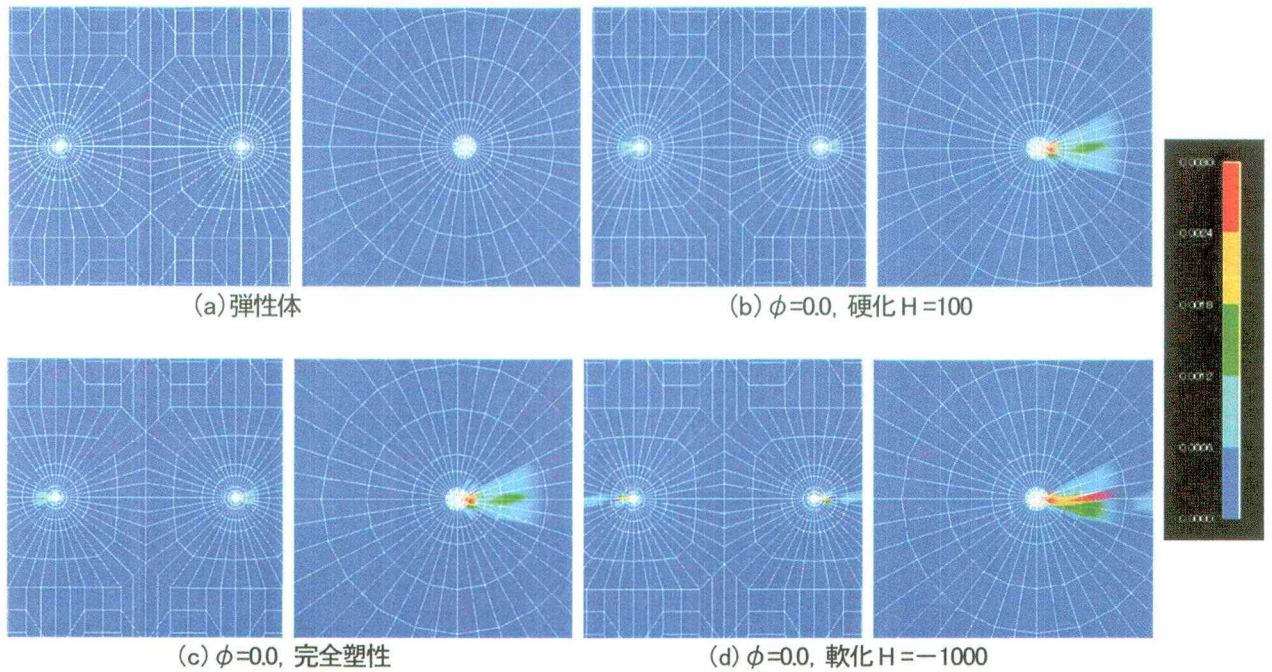


図-12 相当偏差ひずみのコンター図：硬化・軟化係数の違いによる比較

本章では圧縮多軸荷重下にある弾塑性体内のき裂先端近傍の相当偏差ひずみについて考察を行う。

図-11 は最大主応力 σ_1 が -10.0MPa であり、主応力比 0.0, すなわち 1 軸荷重が荷重角度 $\gamma=36$ 度の方向から载荷された応力状態での、内部摩擦角 ϕ を 0 度から 30 度まで変化させた場合のき裂先端近傍の相当偏差ひずみ分布図である。き裂面上の摩擦係数は 0.3 であり、Drucker Prager モデルの塑性特性は降伏応力 σ_y が 10.0MPa , 内部摩擦角 ϕ が 0 度から 30 度まで 10 度ごと、硬化・軟化係数 H が 0.0, すなわち完全塑性の場合である。また(e)は比較の為、同様の主応力下における弾性体内の相当偏差ひずみ分布図である。なお、ここで相当偏差ひずみとは偏差ひずみのノルムであり、次式で表される。

$$e_s := \sqrt{e \cdot e} \quad (16)$$

$$e := \varepsilon - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon) I \quad (17)$$

これらの図より内部摩擦角 ϕ が小さい方が相当偏差ひずみの領域が大きいことが分かる。また、その拡大方向は内部摩擦角 ϕ が小さい粘性土などの c 材料は元のき裂と同方向に卓越した相当偏差ひずみ領域が形成されるのに対して、砂などの ϕ 材料は最大主応力方向、もしくは拡散的な相当偏差ひずみ領域となる。また、同じ主応力状態下における弾性体内の相当偏差ひずみ領域と比較する

と、弾塑性体では、特に内部摩擦角 ϕ が小さい c 材料では偏差ひずみ領域が大きくなるので、き裂に対する評価は塑性を考慮することが重要であることがわかる。

図-12 は硬化・軟化係数を変化させた場合のき裂先端近傍での相当偏差ひずみ分布である。主応力状態は最大主応力 σ_1 は -10.0MPa であり、主応力比 0.6 の 2 軸荷重が荷重角度 $\gamma=36$ 度の方向から载荷された場合である。き裂面上の摩擦係数は 0.0 であり、Drucker Prager モデルの塑性特性は降伏応力 σ_y が 5.0MPa , 内部摩擦角 ϕ が 0 度、硬化・軟化係数 H が 100, 0, -1000 の場合である。これらの結果より軟化すると、き裂先端から元のき裂と同方向に相当偏差ひずみ領域が直線的に局所化することがわかる。また、他の解析結果は省略したが、この軟化に伴うひずみの局所化は、内部摩擦角 ϕ が小さく主応力比が大きいほど顕著に表れた。

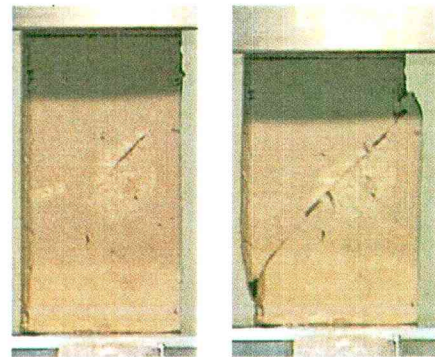


図-13 モード II 型き裂進展

なお、図-13はベントナイトを材料として作成した角柱供試体一軸試験結果の写真である。W3.0cm×D3.0cm×H7.0cmの供試体に長さ2.0cm、角度45度の初期貫通き裂を作成し、一軸圧縮試験を行った。図-13右図に示されるように元のき裂と同方向に準静的にゆっくりと進展し、供試体端まで到達した後、すべり面上で摩擦力を受けながらゆっくりと滑っていった。この粘性土の破壊メカニズムを、今後、本論文の手法、および進展解析を開発して更に検討を進め、明らかにして行きたいと考える。

5. 結論

本研究ではき裂面上の接触・摩擦条件を考慮した有限要素法解析手法に陰解法弾塑性計算アルゴリズムを導入し、圧縮荷重下でのき裂先端近傍での応力分布、相当偏差ひずみ分布を求めた。き裂面上の接触・摩擦条件を考慮した有限要素法解析に陰解法弾塑性計算アルゴリズムを導入した本手法は筆者の知る限り発表されていない。本論文では応力状態を初期き裂面から36度傾いた方向から最大主応力 σ_1 が載荷された場合に限定したが、主応力比、き裂面上の摩擦係数、塑性パラメータ（降伏応力 σ_y 、内部摩擦角 ϕ 、硬化・軟化係数 H ）などを変化させる事によって、定性的ではあるが以下に列挙するような知見を得た。

- (1) 弾性体ではき裂先端での角度 θ が約70度方向で周応力 σ_θ が引張りで最大となるが、弾塑性体であると周応力がき裂先端全方向で圧縮状態に入ることが多い。
- (2) 弾性体であると、き裂面上で σ_r が引張りでかなり大きくなり、き裂先端より少し離れたき裂面上で引張り破壊を起こす事も予想されるが、弾塑性体であると、その引張り力が小さく、もしくは圧縮状態となる為、そのようなき裂面上での引張り破壊が起きにくいと考えることができる。
- (3) 粘性土などの c 材料では元のき裂と同方向に卓越した相当偏差ひずみ領域が生成される。砂などの ϕ 材料では、き裂先端より最大主応力方向、もしくは拡散的な相当偏差ひずみ領域が卓越する。
- (4) 同じ荷重下（同じ主応力状態下）でのき裂先端近傍の相当偏差ひずみの卓越した領域を比較すると、弾性体と比べて弾塑性体、特に c 材料では相当偏差ひずみが大きくなるので、き裂に対する評価は塑性を考慮することが重要

である。

- (5) 弾塑性体において軟化を考慮すると、き裂先端から伸びる相当偏差ひずみ領域が局所化する。 c 材料で特に主応力比が大きい場合、それは顕著である。
- (6) c 材料では元のき裂と同方向に相当偏差ひずみの局所化した領域が直線的に伸びる。

以上のように、土木工学・地盤工学分野で重要な圧縮荷重下での延性的なモードII型のき裂進展性状の説明には弾塑性体の考慮が重要であることが分かった。本研究では、き裂面上の摩擦力という非線形性のみならず、物体もDrucker Pragerモデルというシンプルなモデルではあるが弾塑性体を考慮しての議論であるので、本研究の方法によれば脆性的な不安定破壊現象の予測への応用だけでなく、延性的な破壊まで統一的に解明できる可能性を示唆している。今後、土の構成モデルとして汎用されているCam-Clayモデル、異方性・粘塑性を考慮した関口・太田モデル、下負荷面モデル、上負荷面モデルなどの構成式を用いた場合の影響や、土/水連成効果、有限変形効果などの検証を進めるつもりである。さらにエネルギー解放率などを用いた圧縮荷重下での弾塑性応力場での破壊規準や3次元応力場での破壊規準の確立、X-FEMなどのき裂進展解析などの研究を進めて、併せて実験などより材料定数である破壊靱性値等を精度良く測定する方法を確立し、“いつ”または“どの方向に”き裂が進展開始するかを手始めに、総合的に地盤材料内における圧縮荷重下での破壊現象を解明することが課題である。またそれが、地震の予知や地すべり現象の予測・克服へ応用されること¹⁵⁾が望まれる。

参考文献

- 1) Solveig Melin : When does a crack grow under mode II conditions?, *Int. J. Fract.*, 30, pp. 103-114, 1986.
- 2) S. J. D. Cox and C. H. Scholz : On the formation and growth of faults : an experimental study, *J. Struct. Geology*, 10, No.4, pp.413-430, 1988.
- 3) Isaksson, P. Stahle, P. : Prediction of shear crack growth direction under compressive loading and plane strain conditions, *International journal of fracture*, 113(2), 175-194, 2002.
- 4) 矢富盟祥, 鱈 洋一 : 圧縮荷重下にある進展き裂のE積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, 土木学会論文集, No.612, I-46, pp.251-263, 1999.
- 5) 鱈 洋一, 矢富盟祥 : 圧縮荷重下におけるモードII型き裂進展に関する破壊力学的考察, 応用力学論文集, Vol.3,

- pp.25-35, 2000.
- 6) 岡村弘之：線形破壊力学，培風館，1976.
 - 7) Barsoum, R. S. : On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10, pp. 25–37, 1976.
 - 8) Barsoum, R. S. : Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11, pp. 85–98, 1977.
 - 9) J. C. Simo, J. G. Kennedy and S. Govindjee : Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms, *Internat. J. Numer. Methods Engrg* 26, pp.2161-2185, 1988.
 - 10)例えばJ. C. Simo, T.J.R.Hughes : *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag New York,1998.
 - 11)R. I. Borja and S. R. Lee : Cam-Clay plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.* 78(1), pp.49-72, 1990.
 - 12)矢富盟祥，鱸洋一：陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土／水連成有限要素法解析，応用力学論文集，Vol.4, pp.345-356, 2001.
 - 13)Pipatpongsa,T., Iizuka,A., Kobayashi,I., Ohta,H. and Suzuki,Y. : Nonlinear analysis for stress-strain-strength of clays using return-mapping algorithms, *Journal of Applied Mechanics, JSCE*, Vol.4, pp.295-306, 2001.
 - 14)山川優樹，寺田賢二郎，池田清宏，鳥井邦夫：圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動，土木学会論文集，No.701, III–58, pp.73–86, 2002.
 - 15)例えば，Nobuki KAME and Teruo YAMASHITA : Simulation of the spontaneous growth of a dynamic crack without constraints on the crack tip path, *Geophysical Journal International*, 139, pp.345-358, 1999.

(2004 年 4 月 16 日 受付)