

下負荷面摩擦モデルを用いた地盤-杭間の相互作用の弾塑性有限要素解析

An Elastoplastic Finite Element Analysis of Soil-Pile Interaction by the Subloading-Friction Model

尾崎伸吾*, 橋口公一**, 岡安崇史***
Shingo Ozaki, Koichi Hashiguchi, and Takashi Okayasu

*農修 九州大学大学院博士課程, 生物資源環境科学府生産環境科学専攻 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6 丁目 10-1)

**工博, 農博 九州大学大学院教授, 農学研究院 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6 丁目 10-1)

***農博 九州大学大学院助教授, 農学研究院 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6 丁目 10-1)

The subloading-friction model is the unconventional elastoplastic friction model which allows the sliding displacement due to the traction rate below the sliding surface. It is capable of describing a gradual progress of relative tangential displacement with the increase of tractions. In this article, the soil-pile interaction problem for the monotonic and cyclic loading under the plane strain condition is analyzed by the finite element program incorporating the subloading-friction model. It is revealed that the sliding displacement due to the traction rate below the sliding surface gives the influence to soil-pile interaction behavior.

Key Words: Subloading surface, friction, finite element analysis, soil-pile interaction

キーワード: 下負荷面, 摩擦, 有限要素解析, 地盤-杭間の相互作用

1. はじめに

工学上の諸問題の解析に, 有限要素法に代表される数値解析が積極的に利用されている. これらの解析においては, 材料非線形性や幾何学的非線形性に加えて, すべり摩擦現象および移動境界等に代表される境界非線形性を十分に考慮する必要がある. しかしながら, 既往の研究では, すべりの発生, あるいは逆に摩擦を無視しているか, 古典摩擦モデルを用いている解析が大部分を占め, すべり摩擦現象を適切に評価しているものは少ない.

摩擦モデルに関する研究は, AmontonやCoulombの研究以来盛んに取り組まれているが, 四半世紀前に及んで, 接触応力増分と相対変位増分の関係を弾塑性構成式と同様の形式で記述する手法が見出された. すなわち, 接触応力と相対変位の関係を弾完全塑性現象とみなして, 接触応力増分と相対変位増分の関係を弾塑性体の構成式として数学的に表現する. これにより, 境界値問題を摩擦を伴う表面応力増分と相対変位を伴う表面変位増分の関係として解析し得るに至っている¹⁾⁻⁵⁾. しかし, これらの摩擦モデルは, 応力空間においてすべり変位 (塑性的相対変位) の発生する応力を表すすべり面の内部を純粋弾性域としており, 弾塑性構成モデルに関す

るDrucker⁶⁾の定義における“古典弾塑性モデル”に相当し, 接線応力の増大につれて相対変位が滑らかに進展する実際のすべり摩擦現象を適切に表現し得ない. そこで, 摩擦係数を法線応力および接線方向の相対変位の関数として表現する方法が提案されている⁷⁾⁻¹²⁾. しかしながら, このような方法では, 相対変位が単調に増大する場合を除いて滑らかな接触応力増分-相対変位増分関係は表現し得ない.

他方, 橋口他¹³⁾は, 降伏面の内部を純粋弾性域と仮定しない“非古典弾塑性モデル”に属する“下負荷面モデル”¹⁴⁾⁻¹⁶⁾の概念を導入して, 非古典摩擦モデルである“下負荷面摩擦モデル”を提案している. 本摩擦モデルは, 接触面の法線応力の増大に伴って接線応力が鈍る非線形性や滑らかな接触応力増分-相対変位増分関係を合理的に表現可能である. さらに, 繰返し摩擦現象の解析にも適用し得る等, 既往の摩擦モデルに比して, 多くの利点を有している.

そこで本研究では, 下負荷面摩擦モデルを導入した弾塑性有限要素解析プログラムを開発するとともに, 土木工学分野におけるすべり摩擦現象の具体例である地盤-杭間の相互作用について解析を行った. 具体的には, 地盤を下負荷面モデルに基づく弾塑性体, 杭を剛体と仮定し, 本摩擦モデルにおけ

る材料定数を数水準に変化させて計算を行うとともに、古典摩擦モデルによる解析結果との比較、照査によりすべり面内部（摩擦基準以下）のすべり変位の発生が地盤－杭間の相互作用に与える影響について検討した。

2. 接触・摩擦境界値問題

ここでは、接触物体間の運動学的関係を記述する際によく用いられている *master-slave concept*^{3)-5), 11)} に基づいて、接触・摩擦境界値問題における基礎関係式および有限要素離散化について述べる。

2.1 接触・摩擦境界値問題における基礎関係式

いま、図－1に示すような *master body*（剛体）と *slave body*（変形体）の接触を考える。以下では、空間固定のデカルト直交座標系 (x, y) において微小変形論に基づく定式化を行う。本図に示すように、*master* および *slave body* はそれぞれ Γ^m および Γ^s の境界を有し、これらは規定された表面力速度境界 Γ_t 、変位速度境界 Γ_v および接触境界 Γ_c から構成される。ここで、 Γ_c は変形過程で変化するので、計算においては常に接触境界の把握、すなわち、境界 Γ 上の任意の物質点における接触判定が必要となる。

接触時には、*slave body* に作用する接触応力 $\mathbf{f}$ の法線成分が正 ($f_n > 0$)、および2物体間の距離 g_n がゼロ ($g_n = 0$) でなければならない。また、非接触時には $g_n > 0$ および $f_n = 0$ が満たされる。これより、接触条件は次式で与えられる。

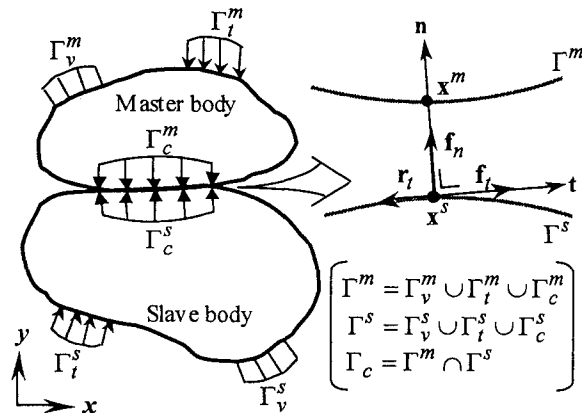
$$g_n \geq 0, f_n \geq 0, f_n g_n = 0 \quad (1)$$

ここに、

$$f_n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

$$g_n \equiv (\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^s) \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

$\mathbf{n}$ は *slave body* 面上の外向き単位法線ベクトルで



図－1 2物体間の接触および境界条件

あり、 $(\cdot)$ はスカラー積を表している。また、 $\mathbf{x}^m$ は、*slave body* 表面上の物質点 $\mathbf{x}^s$ における $\mathbf{n}$ の方向に存在する *master body* 表面上の物質点である。なお、強い凝着が存在する場合の接触条件は Raous, et al.¹⁷⁾ を参照されたい。

Slave body の接触境界 Γ_c^s における境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{if } g_n > 0, \text{ on } \Gamma_c^s \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = -\dot{\mathbf{f}} & \text{if } g_n = 0, \text{ on } \Gamma_c^s \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソルであり、 $(\cdot)$ は物質時間微分を表している。

2物体が相対変位を生じつつ変形する場合の $\mathbf{x}^m$ の変位速度 $\mathbf{v}^m$ 、 $\mathbf{x}^s$ の変位速度 $\mathbf{v}^s$ および相対速度 $\mathbf{r}$ の関係は次式で与えられる（図－2参照）。

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}^m - \mathbf{v}^s \quad (5)$$

接触応力速度－相対速度関係式は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{C}^f \mathbf{r} \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{C}^f$ は後述する下負荷面摩擦モデルに基づく弾塑性構成テンソルである。

2.2 有限要素離散化

接触・摩擦問題における速度形の仮想仕事の原理式は次式で与えられる。

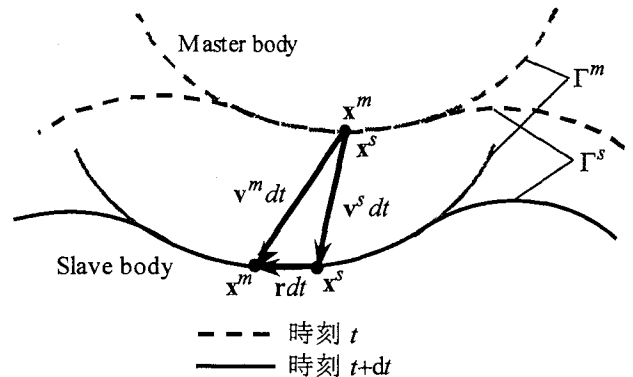
$$\int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \mathbf{D} dV = \int_{\Gamma_t} \dot{\mathbf{i}} \cdot \delta \mathbf{v} dS - \int_{\Gamma_c} \dot{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{r} dS \quad (7)$$

ここに、 $\mathbf{D}$ および $\dot{\mathbf{i}}$ はひずみ速度および表面応力速度を表している。また、 $\delta(\cdot)$ および $(\cdot)$ は仮想的な増分および2階のスカラー積を示す。

式(7)を有限要素離散化することにより、接触問題における全体剛性方程式は次式で与えられる。

$$[K]\{du\} = \{df\} - \{df^c\} \quad (8)$$

ここに、 $[K]$ は *slave body* の剛性マトリクスである。



図－2 変位速度 $\mathbf{v}^m$ 、 $\mathbf{v}^s$ および相対速度 $\mathbf{r}$ の関係

また, $\{du\}$, $\{df\}$ および $\{df^c\}$ はそれぞれ節点変位, 節点力および節点接触力増分ベクトルである。式(8)におけるこれら各項は次のように与えられる。

$$[K] = \sum_e V_e \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e^m \mathbf{B}_e \quad (9)$$

$$\{du\} = \sum_n \mathbf{v}_n^s dt \quad (10)$$

$$\{df\} = \sum_e S_e^f \mathbf{N}_e^T \dot{\mathbf{t}}_e dt \quad (11)$$

ここに, $\mathbf{C}^m$, $\mathbf{B}_e$ および $\mathbf{N}_e$ はslave bodyの剛性マトリクス, ひずみ増分-節点変位増分マトリクスおよび形状関数である。また, $(\cdot)^T$ は転置を示し, $\sum_e$ および $\sum_n$ はそれぞれ要素および節点の重ね合わせを表している。

式(5)および(6)を式(7)の右辺第2項に代入することにより, 次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \{df^c\} &= \sum_e S_e^c \mathbf{T}_e^T \mathbf{N}_e^T \dot{\mathbf{f}}_e dt \\ &= \sum_e S_e^c \mathbf{N}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{C}_e^f \mathbf{T}_e \mathbf{N}_e (\mathbf{v}_n^m - \mathbf{v}_n^s) dt \\ &= [K^f] \{du^m\} - [K^f] \{du\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに, $[K^f]$ は摩擦に関する剛性マトリクス, $\mathbf{T}_e$ は局所座標系 (t, n) とデカルト直交座標系 (x, y) 間の座標変換マトリクスである。また, V_e は要素の体積, S_e^f および S_e^c は規定された表面力速度境界および接触境界の要素表面の面積を表している。

式(12)を式(8)に代入することにより, 全体剛性方程式は次式のように表現される。

$$[K] - [K^f] \{du\} = \{df\} - [K^f] \{du^m\} \quad (13)$$

式(13)より摩擦挙動が一種の擬弾塑性体として有限要素法に導入されていることがわかる。

3. 下負荷面摩擦モデル

橋口他¹³⁾により提案された, 下負荷面摩擦モデルの定式化および具体的な関数形について以下に略説する。

3.1 下負荷面摩擦モデルの定式化

接触物体間の相対速度 $\mathbf{r}$ は, 法線成分 $\mathbf{r}_n$ と接線成分 $\mathbf{r}_t$ に加算分解されるとする。すなわち,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_t \quad (14)$$

さらに, $\mathbf{r}_n$ および $\mathbf{r}_t$ は次のように, 弾性成分 $\mathbf{r}^e$ と塑性成分 $\mathbf{r}^p$ (すべり速度) に加算分解されるとする。

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^e + \mathbf{r}_n^p, \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_t^e + \mathbf{r}_t^p \quad (15)$$

弾性成分は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{f}}_n = -\alpha_n \mathbf{r}_n^e, \quad \dot{\mathbf{f}}_t = -\alpha_t \mathbf{r}_t^e \quad (16)$$

ここに, $\mathbf{f}_n$ および $\mathbf{f}_t$ は, 接触応力ベクトル $\mathbf{f}$ の法線および接線成分である。さらに, α_n および α_t は物体接触に関する法線および接線方向の弾性(ペナルティ)係数である。また, 式(16)は次式のようにまとめられる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}_n + \dot{\mathbf{f}}_t = \mathbf{C}^e \mathbf{r}^e \quad (17)$$

ここに, $\mathbf{C}^e (= \mathbf{C}_n^e + \mathbf{C}_t^e)$ は物体接触に関する弾性係数テンソルであり, 次式で与えられる。

$$\mathbf{C}_n^e = -\alpha_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{C}_t^e = -\alpha_t (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (18)$$

ここに, $\mathbf{n}$ は接触面の単位法線ベクトル, $\mathbf{I}$ は恒等テンソル, $\otimes$ はテンソル積を表す。

本モデルにおいては, 古典摩擦論におけるすべり面は“正規すべり面”と称され, 次式で与えられる。

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = \bar{F}(H) \quad (19)$$

ここに, H はすべりに伴う正規すべり面の等方硬・軟化を表すためのスカラー変数である。また, $\|\cdot\|$ は大きさを表す。本モデルでは, この正規すべり面の内部は弾性域ではなく, その内部の接触応力の変化によっても塑性的相対変位(すべり変位)が生じると仮定する。そこで, 常に負荷面の役割を果たし, 正規すべり面に相似で, かつ, 原点に関して, この面に相似の配置にある“すべり下負荷面”を導入する。これは次式で表される。

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = R\bar{F}(H) \quad (20)$$

ここに, $R(0 \leq R \leq 1)$ は“正規すべり比”と称され, 正規すべり面の大きさに対するすべり下負荷面の大きさの比を表し, 接触応力の正規すべり面への接近の測度とみなし得る。

さて, すべり変位の進行に伴い, 接触応力は正規すべり面に近づくと考えられる。これより, 正規すべり比の発展則を次式で与える。

$$\dot{R} = U(R) \|\mathbf{r}^p\| \quad \text{for } \mathbf{r}^p \neq 0 \quad (21)$$

ここに, U は, 次の条件を満たす R の単調減少関数である。

$$\left. \begin{aligned} U &= +\infty & \text{for } R &= 0 \\ U &= 0 & \text{for } R &= 1 \\ (U < 0 & \text{ for } R > 1) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

本条件は, すべり進行状態において, 接触応力を自動的に正規すべり面上に漸近させる制御機能を与える。なお, 接触応力が正規すべり面上に存在する状態($R=1$)を“正規すべり状態”と称する。また, 関数 U として次式を採用する。

$$U = -\bar{u} \ln R \quad (23)$$

ここに, $\bar{u}$ はすべり下負荷面の膨張速度を規定する材料定数である.

次のすべり流動則を仮定する.

$$\mathbf{r}^P = -\lambda \mathbf{t} \quad (\lambda > 0, \|\mathbf{t}\| = 1) \quad (24)$$

ここに, λ は正值の比例係数, $\mathbf{t}$ は接線応力方向の単位ベクトルである. 法線および接線応力方向の単位ベクトルは, 次式で与えられる.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|}, \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (25)$$

式(20)の物質時間微分式に式(21)および(24)を代入することにより, λ は次式で与えられる.

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_n\|} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{f}}_n + \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{f}}_t}{R\bar{F}'h + U\bar{F}} \quad (26)$$

ここに, h は H および $\mathbf{t}$ の関数であり, $\dot{H}$ に対して次式で関係付けられる.

$$h = \dot{H} / \lambda \quad (27)$$

また, λ を相対速度で表したものを Λ と記せば, これは次式で与えられる.

$$\Lambda = \frac{-\left(\alpha_n \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_n\|} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|} \mathbf{t}\right) \cdot \mathbf{r}}{R\bar{F}'h + U\bar{F} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|}} \quad (28)$$

以下, 正規すべり面は変化しないとすれば ($\bar{F} = \text{const.}$), 式(14)・(16), (24)および(28)より, 接触応力速度-相対速度関係式(6)は次式で与えられる.

$$\dot{\mathbf{f}} = - \left\{ \alpha_t \mathbf{I} + (\alpha_n - \alpha_t)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{\alpha_t \mathbf{t} \otimes \left(\alpha_n \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_n\|} \mathbf{n} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|} \mathbf{t} \right)}{U\bar{F} + \alpha_t \frac{\partial f}{\partial \|\mathbf{f}_t\|}} \right\} \mathbf{r} \quad (29)$$

すべり速度に関する負荷基準は, Λ の正值性により次式で与えられる^{18), 19)}.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}^P \neq \mathbf{0}: \Lambda > 0 \\ \mathbf{r}^P = \mathbf{0}: \Lambda \leq 0 \end{array} \right\} \quad (30)$$

2.2 すべり条件式的具体的な関数形

一般に, 摩擦係数は高い法線応力下では減少し, 接触面上の法線応力の増大とともに接線応力の増大が鈍ることが知られている²⁰⁾. したがって, 正規すべり面は, 一般にCoulombの摩擦則のような錘面のすべり面ではなく, 曲面を呈すると考えられる. そこで, 摩擦係数を法線応力および相対変位の関数とした放物型のすべり面が提案されている^{1), 3), 4), 10)-12)}. しかし, これらのすべり面を用いたモデルで

は材料定数の増加を招くだけでなく, 繰返し摩擦挙動に適応できない. さらに, 土や金属等の材料は法線応力の単軸負荷によっても塑性変形を生じることが知られている. そこで, 橋口他¹³⁾は, すべり条件式的具体的な関数形として, 図-3に示される接触応力平面において涙形の関数を提案している. 涙形の正規すべり面式は, 次式で与えられる.

$$f(\|\mathbf{f}_n\|, \|\mathbf{f}_t\|) = \|\mathbf{f}_n\| \exp\left(\frac{\chi^2}{2}\right) \quad (31)$$

ここに,

$$\chi \equiv \eta / M, \quad \eta \equiv \|\mathbf{f}_t\| / \|\mathbf{f}_n\| \quad (32)$$

M は摩擦特性に基づく材料定数である.

図-4に接触応力空間における正規すべり面(31)とHaraldsson and Wriggers¹²⁾による数値実験結果の比較を示す. 数値実験結果は, 砂-コンクリート間の接触面における微小な凹凸を細かな有限要素メッシュで再現し, 各微小接触部における接触応力を見かけの接触面全体で平均化したものである. Coulombの摩擦則においては, 摩擦係数 μ と粘着応力 c により, 接触面上の法線応力と接線応力を線形に關係付けるが, 本提案モデルにおいては, 既往のモデル^{1), 3), 4), 10)-12)}のように材料定数を特に増やすことなく (M と $\bar{F}$ の2個), 接触面上の法線応力の増大とともに接線応力の増大が鈍る非線形性を表現できている. なお, 非線形式で表される曲線関係も対象範囲を極一部に限定してゆけば, Coulombの摩擦則に見られる直線関係に近づき, 本モデルは,

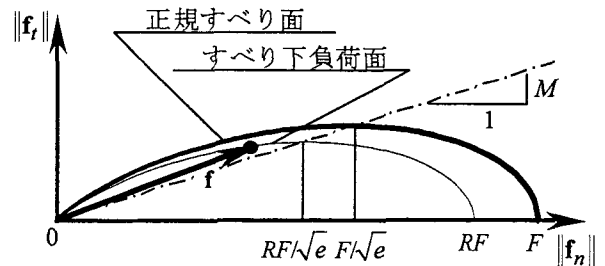


図-3 正規すべり面およびすべり下負荷面

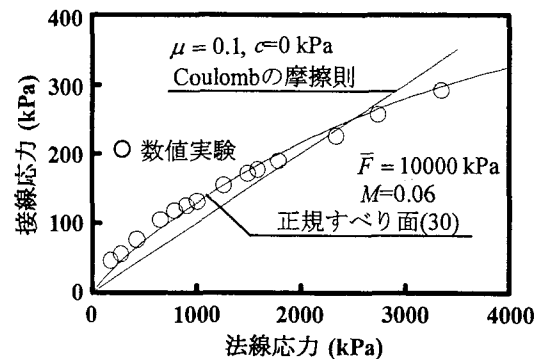


図-4 正規すべり面と数値実験結果¹²⁾との比較

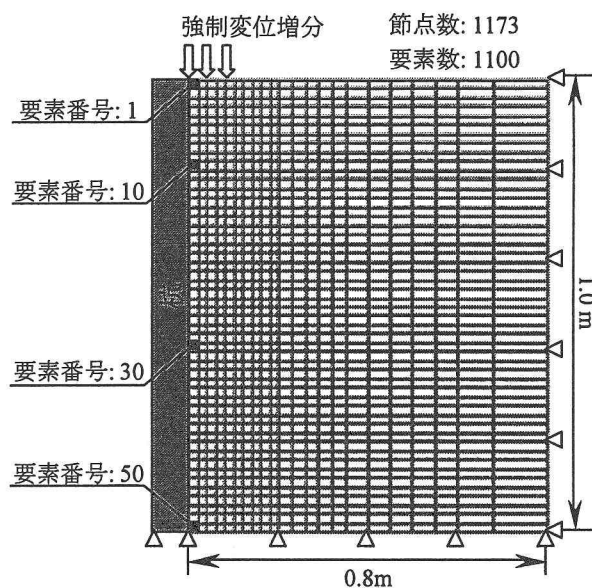
広範囲の面圧に適用可能であると考えられる。さらに、面圧が小さい場合には正規すべり比 R が小さい状態から接線応力が増大し始めるので、Coulombの摩擦則に近い剛い応答特性が表現される。以上より、本モデルは、Bay and Wanheim²⁰⁾により指摘されている実験事実を論理的に予測し得ることがわかる。

4. 有限要素解析

本章では、杭周辺の地盤に強制変位を単調に与えた場合と負荷／除荷を繰り返し与えた場合の有限要素解析結果について述べる。地盤－杭間の相互作用の解析においては、地盤の弾塑性変形と杭に作用する力を同時に解く重要性が指摘されており^{21), 22)}、地盤－杭間にジョイント要素を用いた解析法が盛んに利用されている。しかし、ジョイント要素内の摩擦モデルの大部分は、古典弾塑性型やバイリニア型、あるいは摩擦係数を何らかの関数（例えば、相対変位）としたモデルであるため、接触応力の増大とともに、徐々にすべり変位が発生する現象や繰返し摩擦現象に適用できない。

図－5に解析に用いた有限要素メッシュおよび境界条件を示す。地盤（下負荷面モデル）は、底部を鉛直方向固定、側面を水平変位固定境界とし、平面ひずみ条件を仮定している。地盤－杭間の問題では、初期状態の設定が重要となるが、本研究では、一様な初期状態の等方地盤を想定し、初期法線接触応力は地盤内水平方向垂直応力と等しく、初期接線接触応力はゼロとしている。また、通常地盤－杭系の解析では、杭頭や基礎に強制変位を作用させるが、今回の解析では、杭自体を有限要素離散化していないため、杭周辺の地盤に強制変位を与えている。このように、本研究では、正規すべり面以下でのすべり変位の発生の影響を検討することを目的としているため、境界条件は実際現象と必ずしも一致していない。

表－1に地盤および下負荷面摩擦モデルの材料定数を示す。ここで、本摩擦モデルの材料定数の工学的意味について簡単に説明する。 $\bar{F}$ および M は正規すべり面の大きさを規定する材料定数、および限界状態($\chi=1$)での法線応力と接線応力の関係を規定する材料定数である。また、 α_n および α_t は、界面の圧縮試験(interface compression experiment)²³⁾より材料の弾性特性として容易に決定されるが、本研究ではmaster-slave concept (Penalty法)に基づく解析アルゴリズム採用しているため、十分に大きな値を用いている^{24), 25)}。さらに、 $\bar{u}$ は接触面の粗さや凹凸の



図－5 有限要素メッシュおよび境界条件

表－1 地盤および下負荷面摩擦モデルの材料定数

(a) 下負荷面モデル (地盤)			
F_0	20 kPa	$\sigma_0 I$	−2 kPa
ν	0.3	ϕ	30°
ρ	0.03	γ	0.005
u	20		

(b) 下負荷面摩擦モデル			
$\bar{F}$	10000 kPa	M	0.05, 0.15, 0.25
α_n, α_t	100000 MPa/m	$\bar{u}$	1, 2, 5, 20, 50, 100, 10000(=∞)

形状・分布、潤滑の程度、さらには接触物体の弾塑性特性等に依存する現象論的な材料定数である。計算においては、ケーススタディとして、本摩擦モデルの材料定数を $M=0.05, 0.15, 0.25$ の3水準、 $\bar{u}=1, 2, 5, 10, 20, 100, 10000(=\infty)$ の7水準に変化させて検討を行った。なお、本研究では砂質地盤を想定しており、表－1における下負荷面モデルの材料定数は、岡安他²⁴⁾と同程度の値を採用している。

4.1 単調負荷挙動

図－6に $M=0.15$ の場合の接触要素番号1（図－5参照）における正規すべり比および接線応力と接線相対変位の関係を示す。正規すべり比の発展則における材料定数 $\bar{u}$ により、正規すべり状態への漸近の度合いが制御されている様子がわかる。また、本モデルでは、 $\bar{u} \rightarrow \infty$ とすれば古典摩擦論に帰着するが、本場合、接触応力がすべり条件を満たすと、急に相対変位が生じるのに対して、本モデル($\bar{u}$ が小さい場合)では、各種試験^{25)–27)}で報告されているように、

接触応力の増加とともに徐々に相対変位を生じている様子がわかる。

図-7に材料定数 M が異なる場合の接触要素番号1における接線応力と接線相対変位の関係を示す。なお、 $\bar{u}$ の値は10および10000の2通りである。 M は限界状態を規定する材料定数であるが、同程度の接線応力に対して、 M が大なほど相対変位を生じ難く、沈下し難い様子が予測されている。また、 M が大なほど $\bar{u}$ の影響、すなわち、正規すべり面以下でのすべり変位の発生の影響が大きくなることがわかる。

地盤の弾塑性変形およびすべり摩擦現象を考慮しつつ、杭に作用する摩擦力分布を詳細に予測することが、工学設計上求められている。図-8(a), (b)および(c)に、 $M=0.15$ の場合の杭長の0.1%沈下時に

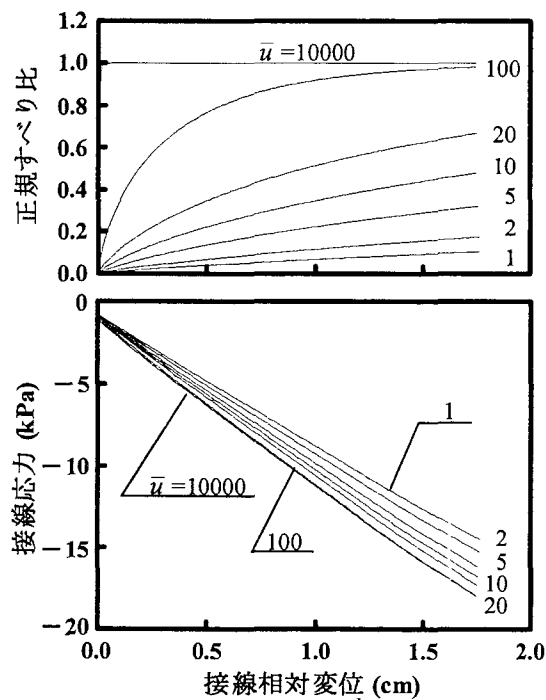


図-6 正規すべり比および接線応力と接線相対変位の関係

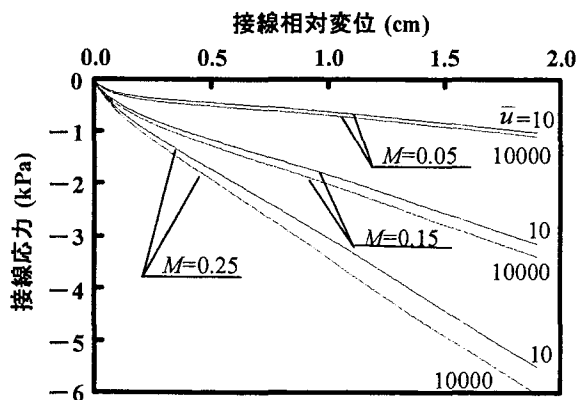


図-7 M の違いによる接線応力と接線相対変位の関係

おける法線応力、接線応力および接線相対変位分布を示す。いずれのグラフにおいても縦軸は接触要素番号を示している。法線応力の分布特性には $\bar{u}$ の違いによる特徴は特に見られないが、接線応力の分布特性は $\bar{u}$ の値に大きな影響を受けている。接線応力分布特性について考察すると、いずれの $\bar{u}$ の値においても地盤表層から杭下端にかけて、ネガティブフリクション（以下、NF）が作用している。また、その大きさは、地盤表層でもっとも大きく、深度が増すほど減少している様子がわかる。これは、杭下端付近では、地盤の沈下（変形）が少なく、杭にNFがフルモビライズ($R=1$)されていないからである。次に、 $\bar{u}$ による差異について見てみると、 $\bar{u}$ が大なほど杭表面全体で高いNFが分布しているのに対して、 $\bar{u}$ が小さいほど、低いNFがなだらかに分

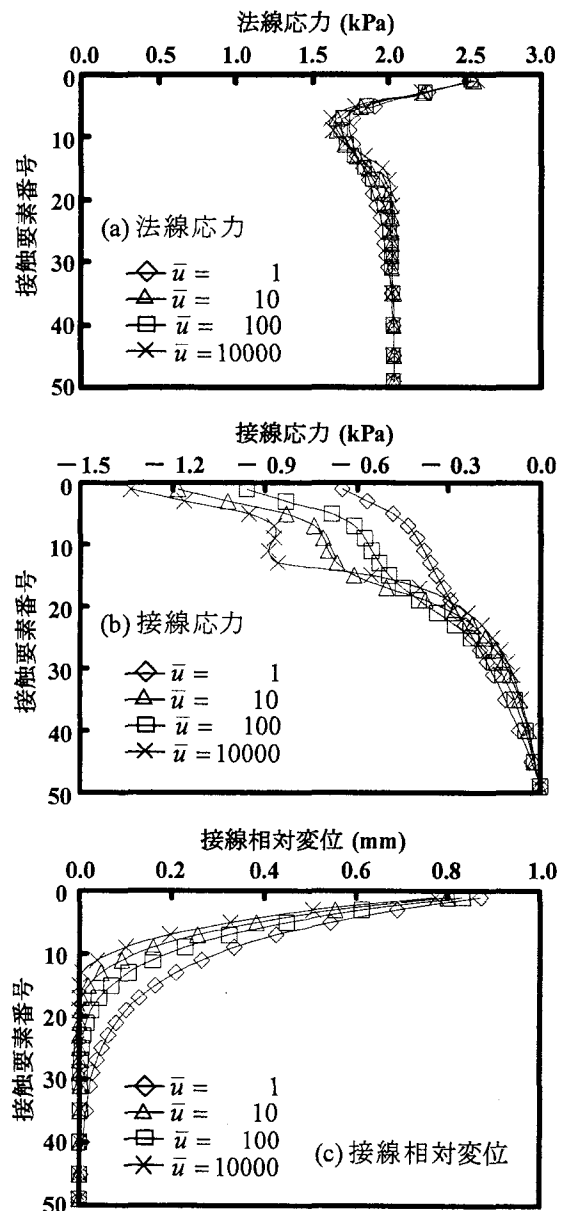


図-8 法線応力、接線応力および接線相対変位分布

布している様子がわかる。また、接線相対変位量は、 $\bar{u}$ が小さいほど大となり、下方の地盤一杭接触面でもすべり変位を生じている様子が表現されている。

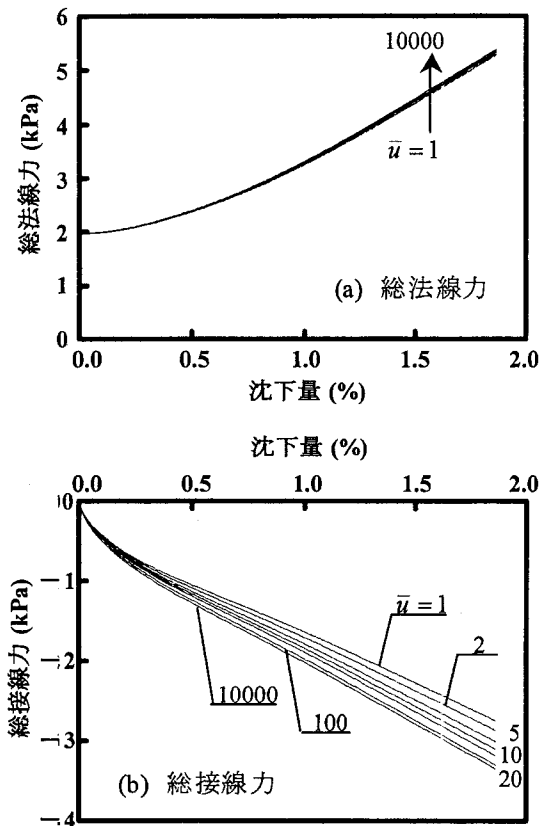


図-9 総接触力と沈下量の関係

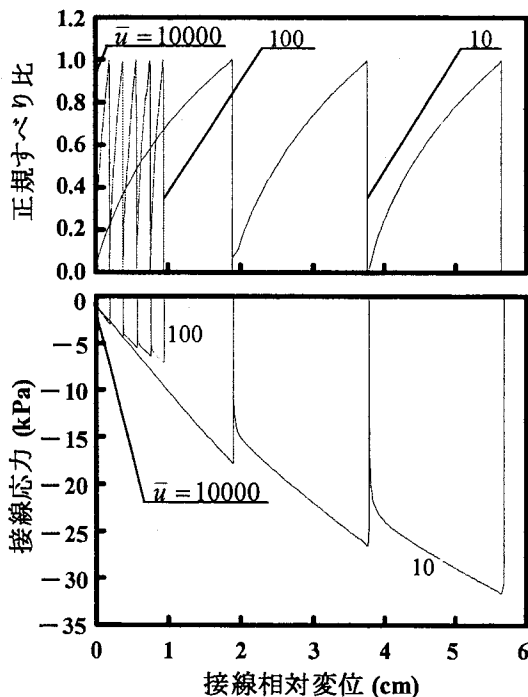


図-10 繰返し負荷時の正規すべり比および接線応力と接線相対変位の関係($R=0.5$)

図-9(a)および(b)に全接触面(接触要素番号1~50)の総法線力および総接線力と沈下量の関係を示す。図中の沈下量は杭長を用いて無次元化したものである。図-8の接触応力分布特性からも推察されるように、総法線力には $\bar{u}$ による差異は見られないが、総接線力は $\bar{u}$ の値に大きな影響を受けている。これより、正規すべり面以下でのすべり変位の発生を考慮することは、杭の支持力特性を評価する上で重要であると推察される。

4.2 繰返し負荷挙動

次に、繰返し負荷挙動の解析結果について述べる。地震、交通荷重や波浪等起因する繰返し負荷挙動の予測は、安全設計上極めて重要である。計算に当たっては、番号1の接触要素の正規すべり比があらかじめ設定した値に達するまで強制変位を与え、その後除荷し、再負荷を繰り返した。正規すべり比の設定値には、 $R=0.1, 0.5$ および 0.9 の3水準を採用し、 $M=0.15$ の場合について検討した。

図-10に正規すべり比の設定値 $R=0.5$ の場合の接触要素番号1における正規すべり比および接線応力と接線相対変位の関係を示す。古典摩擦モデルを用いた場合には、正規すべり状態以下($R<1$)での繰返し負荷に対して弾性的な相対変位が予測されるのみで、相対変位の集積は全く予測されていない。一方、本提案モデルでは、正規すべり面内部の接線応力の変化に対してすべり変位が表現されるので、正規すべり比一定の繰返し負荷における相対変位の集積が現実的に予測されている。また、その集積量は $\bar{u}$ が小さくなるほど増加する様子がわかる。

図-11に正規すべり比の設定値 $R=0.5$ の場合の繰返し負荷回数と沈下量の関係を示す。本摩擦モデルを用いて、正規すべり面以下での接触応力の変化でもすべり変位の発生を許容することにより、同じ材料や初期地盤条件でも、繰返し負荷による沈下量に差異が生じることがわかる。

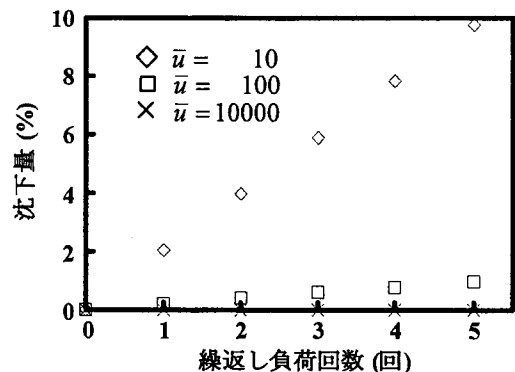


図-11 繰返し負荷回数と沈下量の関係($R=0.5$)

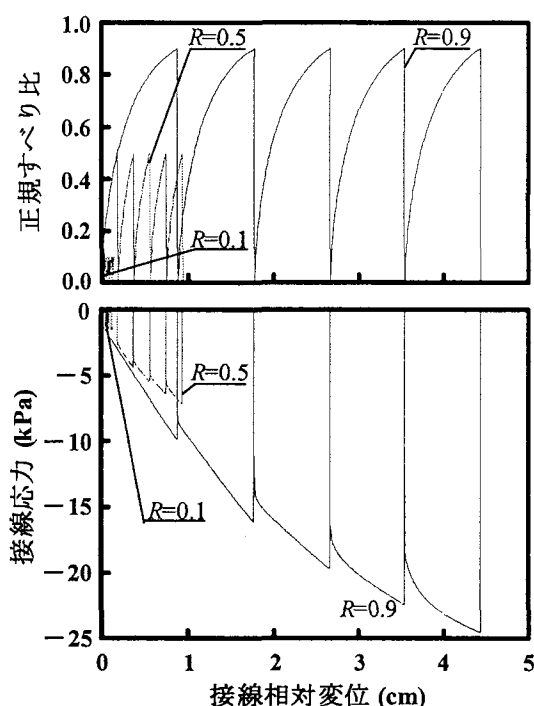


図-12 繰返し負荷時の正規すべり比および接線応力と接線相対変位の関係($\bar{\mu}=100$)

図-12に接触要素番号1における正規すべり比の各設定値に対する正規すべり比および接線応力と相対変位の関係を示す。解析結果は $\bar{\mu}=100$ の場合のものである。本摩擦モデルによれば、いずれの応力振幅に対しても接線相対変位、すなわち、沈下量の集積が表現されており、その集積量は接触応力の大きさに依存する様子が表現可能である。

5. おわりに

本研究では、非古典摩擦モデルである下負荷面摩擦モデルを導入した有限要素解析プログラムを用いて、すべり面内部（摩擦基準以下）のすべり変位の発生が地盤－杭間の相互作用に与える影響について解析を行った。その結果、以下の知見が得られた。

- 1) 摩擦基準以下での接線応力の変化によるすべり変位の発生を表現することにより、古典摩擦モデルを用いた解析に比して、低い接線応力分布が予測される。
- 2) 本摩擦モデルを用いることにより、正規すべり面以下の接触応力の繰返し負荷による沈下量の集積が予測される。
- 3) 材料定数 $\bar{\mu}$ および M の変化のみで、様々な状態の杭－地盤間の摩擦特性を表現可能であり、これらは、1)および2)の特性に大きく影響を及ぼす。なお、正規すべり面に関する発展則を導入

することにより、材料定数 $\bar{F}$ および M は、より明確に決定できると考えられる。

今後は、実測値との比較を重ねつつ、地盤と杭の両物体とも有限要素離散化を行うことにより（例えば、弾塑性体と弾性体）、杭頭や基礎に鉛直、水平両方向に強制変位与える等、実問題により近い境界条件のもとでの解析を行う予定である。

最後に、本研究では、master-slave conceptに基づき、有限要素法に下負荷面摩擦モデルを導入している。しかし、ジョイント要素を用いた解析でも、本モデルのように非古典摩擦論に属し、且つ、すべり摩擦挙動を履歴依存性挙動として定式化しているものを用いることにより、本研究と同様の解析結果が得られると考えられる。

参考文献

- 1) Seguchi, Y., Shindo, A., Tomita, Y. and Sunohara, M.: Sliding rule of friction in plastic forming of metal, Computational Methods in Nonlinear Mechanics, University of Texas at Austin, pp. 683-692, 1976.
- 2) Michalowski, R. and Mroz, Z.: Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems, Archives of Mechanics, Vol.30, pp.259-276, 1978.
- 3) Cumier, A.: A theory of friction, International Journal of Solids and Structures, Vol.20, pp.637-647, 1984.
- 4) Wriggers, P., Vu Van T. and Stein, E.: Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. Computers and Structures, Vol. 37, pp.319-331, 1990.
- 5) Peric, D. and Owen, R.J.: Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.35, pp.1289-1309, 1992.
- 6) Drucker, D.C.: Conventional and unconventional plastic response and representation, Journal of Applied Mechanics Reviews (ASME), Vol.41, pp.151-167, 1988.
- 7) Cheng, J.-H. and Kikuchi, N.: An incremental constitutive relation of uniaxial contact friction for large deformation analysis, Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol. 52, pp.639-648, 1985.
- 8) Oden, J.T and Pires, E.B.: Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity, Journal of Applied Mechanics (ASME), Vol. 50, pp.67-76, 1983.
- 9) Oden, J.T and Pires, E.B.: Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws., Computer and Structures, Vol. 19, pp.137-147, 1984.
- 10) Anand, L.: A constitutive model for interface friction, Computational Mechanics, Vol.12, pp.197-213, 1993.
- 11) Sellgren, U. and Olofsson, U.: Application of a constitutive model for micro-slip in finite element analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.170, pp.65-77, 1999.
- 12) Haraldsson, A. and Wriggers, P.: A strategy for numerical testing of

- frictional laws with application to contact between soil and concrete, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.963-977, 2000.
- 13) 橋口公一, 岡安崇史, 尾崎伸吾: 下負荷面の概念に基づく摩擦理論, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.69, pp.295-301, 2003.
 - 14) Hashiguchi, K.: Plastic constitutive equations of granular materials. *Proc. US-Japan Seminar Continuum Mech. Stat. Appr. Mech. Granular Materials*, Sendai, pp. 321-329, 1978.
 - 15) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, Vol.47, pp.266-272, 1980.
 - 16) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.25, pp.917-945, 1989.
 - 17) Raous, M., Cangemi, L., and Cocu, M.: A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.189, pp.383-399, 2000.
 - 18) Hashiguchi, K.: On the loading criterion. *International Journal of Plasticity*, Vol.10, pp.871-878, 1994.
 - 19) Hashiguchi, K.: Fundamentals in constitutive equation -Continuity and smoothness conditions and loading criterion-. *Soils and Foundations*, Vol.40(3), pp.155-161, 2000.
 - 20) Bay, N. and Wanheim, T.: Real area of contact and friction stresses at high pressure sliding contact, *Wear*, Vol.38, pp.201-209, 1976.
 - 21) 山田英司, 高稲敏浩, 水野和憲, 大野雅幸, 野田利弘: パイルド・ラフト基礎が設置された地盤の水～土連成弾塑性変形解析, Vol.52(III), No.659, pp.113-128, 2000.
 - 22) 土屋勉, 大築和夫, 小幡守: 軟弱地盤における建築構造物の即時沈下および圧密沈下の三次元有限要素解析, *日本建築学会構造系論文報告集*, No.361, pp.295-301, 1986.
 - 23) Oden, J. T. and Martin, J. A. C.: Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.52, pp.527-634, 1985.
 - 24) 岡安崇史, 橋口公一, 尾崎利行, 竹添亮: アンカー引抜き時の地盤の変形挙動に関する弾塑性有限要素解析, *応用力学論文集*, Vol.6, pp.541-550, 2003.
 - 25) Courtney-Prat, J.S. and Eisner, E.: The effect of a tangential force on the contact metallic bodies. *Proc. Royal Soci. London, Ser. A*, Vol.238, pp.529-550, 1957.
 - 26) Rabinowicz, E., *Friction and Wear of Materials*, John Wiley & Sons, New York, 1965.
 - 27) Uesugi, M., Kishida, H.: Influential factors of friction between steel and dry sands, *Soils and Foundations*, Vol.26(2), pp.33-46, 1986.

(2004 年 4 月 16 日 受付)