応用力学論文集 Vol.7,pp.561-570　(2004年8月)　　土木学会

混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズムに関する研究

Study on an algorithm of hybrid type shakedown analysis

小林俊一* ・西川雅規** ・田村 武***
Shun-ichi KOBAYASHI, Masaki NISHIKAWA, Takeshi TAMURA

*正会員　博士（工学）　京都大学大学院助手　工学研究科社会基盤工学専攻（〒606-8501 京都市左京区吉田本町）
**学生会員 京都大学大学院生 工学研究科社会基盤工学専攻修士課程（〒606-8501 京都市左京区吉田本町）
***フェロー 工博 京都大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻（〒606-8501 京都市左京区吉田本町）

An algorithm of hybrid type shakedown analysis based on the interior point method is investigated from the theoretical point of view. Instead of time domain description of repeated external loads, an external load domain which is a convex polygon in the load space including its origin is installed. In addition, any external loads are expressed as a linear combination of basis vectors which correspond to the corners of the external load domain. This expression is called a descretisation of repeated external loads, because these basis vectors are independent of time. By using this descretisation of repeated external loads, a mathematical structure of shakedown analysis is very similar to that of limit analysis. Therefore, hybrid type algorithm of rigid plastic finite element method can be extended to shakedown analysis. Some fundamental numerical results are also reported.

Key Words : *shakedown analysis, hybrid type formulation, finite element method, interior point method*

1. はじめに

シェイクダウン解析法は、繰返し荷重が作用する弾塑性体の安定性を照査する解析法の一つである。その特徴は、繰返し荷重に対する系の応答を時間域で逐次的に解く増分形の弾塑性解析法とは異なり、荷重空間内に繰返し荷重がとり得る荷重領域を設定し、その荷重領域に対して系が安定かどうかを照査することにある。したがって、シェイクダウン解析は以下の点で増分形の解析よりも有利であると考えられる。

- 繰返し荷重の詳細な時刻歴は必要なく、荷重がとり得る領域だけが分かれば解析が可能である。これは、自然外力など事前に詳細な時刻歴を知ることが難しい場合に有利であると考えられる。
- 時間域での解析を回避できることによって、計算コストと時間の短縮が期待できる。このため3次元解析のように規模の大きな初期値・境界値問題で、特に有利であると考えられる。
- 得られる解には、安全率や荷重係数などが含まれる。これらは設計実務に直接対応した物理量であり、設計法への応用にも有利であると考えられる。

シェイクダウン解析法の指導原理は、静力学定理(Melanの定理)[1]と運動学定理（Koiterの定理）[2]からなるシェイクダウン定理である。このシェイクダウン定理の詳しい説明については、例えば文献[3),4),5),6),7),8),9)]を参照されたい。また、既往のシェイクダウン解析に関する研究については例えばMaierら[10),11)]に詳しい。

シェイクダウン解析法と極限解析法の類似性を凸解析の立場から指摘した研究としてはKamenjarzh[8)]が挙げられる。一方、著者の一人は、凸解析の立場から極限定理の双対性に着目し、剛塑性境界値問題を数値的に解くアルゴリズムとして主双対内点法に基づく混合型の剛塑性有限要素法 (PDRPFEM) を提案している[12)]。数理的な構造の類似性から判断すると、シェイクダウン解析法についても主双対内点法に基づく混合型の解法アルゴリズムを定式化することは容易であると思われる。

そこで、本論文では文献[12)]で提案されたPDRPFEMの方法論をシェイクダウン解析法に拡張し、主双対内点法に基づく混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズム開発とその特徴について論じる。

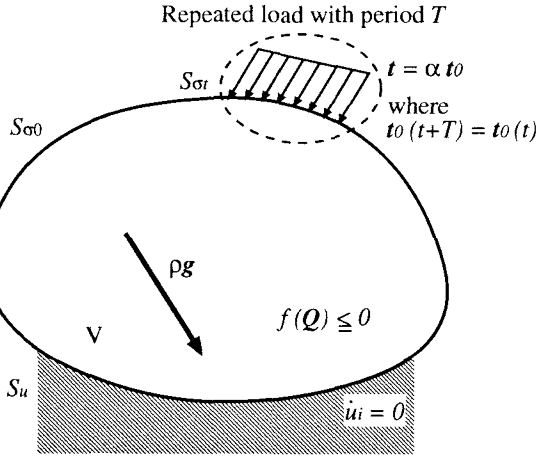
2. シェイクダウン解析法の双対性

ここではLagrange双対理論によってシェイクダウン解析法の数理構造を検討し、その双対性を端的に示す。

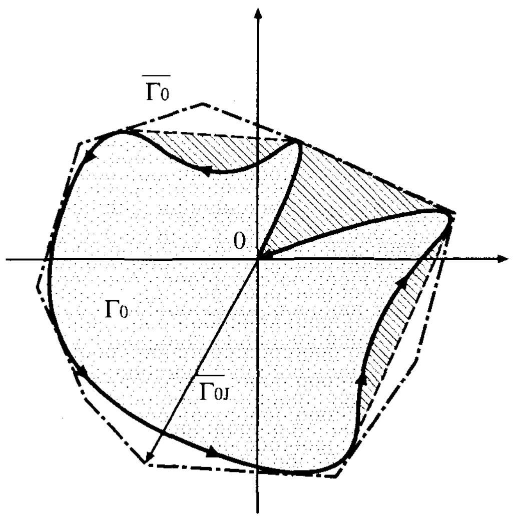
2.1 対象とする弾塑性境界値問題

対象とする弾塑性境界値問題を**図-1**に示す。材料は降伏関数 $f(\boldsymbol{Q})$ に従う弾完全塑性材料とする。ここに $\boldsymbol{Q}$ は応力である。与えられる境界条件は以下の3つ、すなわち境界 S_u で固定境界（斉次Dirichlet）条件、境界 $S_{\sigma 0}$ で表面力がゼロの応力境界（斉次Neumann）条件、境界 $S_{\sigma t}$ で周期 T の繰返し表面力 $\boldsymbol{t} = \alpha \boldsymbol{t}_0$ の応力境界（非斉次Neumann）条件を考える。ここに $\boldsymbol{t}_0$ は基準となる繰返し表面力で、周期性の条件より全ての時刻 $t \geq 0$ において $\boldsymbol{t}_0(t) = \boldsymbol{t}_0(t+T)$ を満たす。また α は荷重係数である。全境界 S はこれらの境界条件 S_u, $S_{\sigma 0}$, $S_{\sigma t}$ のいずれかに属する。また外力として、荷重係数とは独立な死荷重も考慮できる。例えば、**図-1**に

¶ Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA



図–1 対象とする弾塑性境界値問題



図–2 荷重領域 Γ_0、その凸包および線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$

は物体力を示している。

このような弾塑性境界値問題に対して、系が支持できる最大の荷重係数 α を求める最適化問題を考える。

なお、以下の検討では記述を簡単にするため、荷重係数に依らない死荷重は全てゼロとした。死荷重が非ゼロの場合でも本質的には同様の議論が可能である[13)]。

2.2 外力の離散的表現

ここでは、荷重領域とその線形外接領域を導入することによって、繰返し外力を時間に依らない離散的な量として表現する方法について、**図-2**を用いて説明する。

まず、時刻 t を媒介変数として基準となる繰返し外力 $\boldsymbol{t}_0(t)$ を荷重空間内に表現する。荷重空間の原点と時刻 t の荷重状態 $\boldsymbol{t}_0(t)$ を結んだ動径が 1 周期 T で掃く空間を荷重領域 Γ_0 と呼ぶ。

つぎに、荷重空間内で荷重領域 Γ_0 を含む最小の凸領域を考える。この凸領域は凸包 (Convex hull) と呼ばれる。さらにこの凸包を内部に含む凸多面体を考える。この凸多面体を荷重領域の線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$ と呼ぶ。領域 $\bar{\Gamma}_0$ の各頂点を $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{0J}$ とすれば、領域内部の任意の荷重 $\bar{\gamma}_0 \in \bar{\Gamma}_0$ は、以下の線形和で表せる。

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{J=1}^{J=J_{\max}} \beta_J \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{0J}$$

$$\text{where} \quad \sum_{J=1}^{J=J_{\max}} \beta_J = 1, \quad 0 \leq \beta_J \leq 1 \qquad (1)$$

ここに $J_{\max}$ は凸多面体の総頂点数、β_J は非負かつ、総和が 1 となるスカラーパラメータである。荷重領域 Γ_0, その凸包および線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$ の関係を**図-2**に示す。

式 (1) は荷重空間内の時間に依らない基底 $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{0J}$ の線形和によって、時間とともに変動する繰返し外力 $\boldsymbol{t}_0(t)$ を離散的に表現していると解釈できる。

2.3 静的許容な応力場

まず、釣合系の応力場の一般的表現法を考える。系が線形弾性挙動を示すと仮定し、外力 $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{0J}$ によって生じる仮想的な弾性応力を $\boldsymbol{Q}_{0J}^E$ とする。この仮想的な線形弾性応力 $\boldsymbol{Q}_{0J}^E$ は、言うまでもなく、一意に求められる応力で、しかも釣合系の応力場を構成する。

さて、物体力および表面力がゼロとなる「ゼロ外力」に対する釣合系の応力場を考えてみよう。このような応力場を残留応力場と言い $\boldsymbol{Q}^r$ で表す。ここで有限要素法による空間離散化を行い、残留応力場が満たすべき釣合式を弱形式で表現すると以下の式が得られる。

$$\int_V \boldsymbol{B}'^T \boldsymbol{Q}^r dV = \boldsymbol{0} \qquad (2)$$

ここにテンソル $\boldsymbol{B}'$ は有限要素法の B-マトリクスから斉次 Dirichlet 条件にあたる節点の成分を差し引いたテンソル、右辺の $\boldsymbol{0}$ ベクトルは Neumann 条件にあたる成分だけを集めたベクトルでゼロ外力を表している。本論文では、積分点を利用して応力やひずみの空間離散化を行うので、以後は式 (2) を単に

$$\boldsymbol{B}'^T \boldsymbol{Q}^r = \boldsymbol{0} \qquad (3)$$

と表記する。ここにベクトル $\boldsymbol{Q}^r$ は積分点で空間離散化された残留応力場、テンソル $\boldsymbol{B}'$ は数値積分によるヤコビアンと重みを考慮して代数的に表現した B-マトリクスである。

また式 (3) で表される残留応力場は、一般には一意には決定できず、不静定次数に応じた自由度を有する。

さて、釣合式の線形性と弾性応力場 $\boldsymbol{Q}_{0J}^E$ の線形性に着目すれば、外力 $\alpha\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{0J}$ が作用する場合の釣合系応力場は、一意に決定できる仮想線形弾性応力場 $\alpha\boldsymbol{Q}_{0J}^E$ とゼロ外力に釣合う残留応力場 $\boldsymbol{Q}^r$ の和で表現しても一般性を失わない。

$$\boldsymbol{Q}_J = \alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E + \boldsymbol{Q}^r \qquad (4)$$

次に降伏条件について考えてみる。対象とする材料の弾塑性挙動が、応力空間内の原点を含む凸な降伏曲面 f によって表せると仮定する。すなわち、応力状態 $\boldsymbol{Q}$ が降伏曲面内 $f(\boldsymbol{Q}) < 0$ にあれば材料は弾性挙動を

示し*、応力状態 $\boldsymbol{Q}$ が降伏曲面上 $f(\boldsymbol{Q})=0$ にあれば、材料は塑性挙動を示す。

ここで、荷重領域 $\bar{\Gamma}=\alpha\bar{\Gamma}_0$ に含まれる任意の荷重ベクトル $\bar{\gamma}=\alpha\bar{\gamma}_0$ が降伏条件を破らないための十分条件について考える。もし、荷重領域 $\bar{\Gamma}=\alpha\bar{\Gamma}_0$ の全ての頂点 $\alpha\bar{\Gamma}_{0J}$ に対して、時間に依らない残留応力場 $\boldsymbol{Q}^r$ が存在して、静的許容な応力場が構成できるとする。つまり

$$f_i(\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E+\boldsymbol{Q}^r)\leq 0,\quad \forall i\in V, \forall J\in\bar{\Gamma}_0 \tag{5}$$

となる残留応力場が存在すると仮定する。ここで、応力については積分点による空間離散化を行っていることを考慮して、全ての積分点 i で制約条件 (5) が満たされなければならない。

このとき降伏関数 f の凸性を考慮すれば、任意のパラメータ $0\leq\beta_J\leq 1$, $\sum_{J=1}^{J_{\max}}\beta_J=1$ に対して、以下の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}
& f_i\left(\alpha\left[\sum_{J=1}^{J=J_{\max}}\beta_J \boldsymbol{Q}_{0J}^E\right]+\boldsymbol{Q}^r\right)\\
&=f_i\left(\left[\sum_{J=1}^{J=J_{\max}}\beta_J\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E\right]+\boldsymbol{Q}^r\right)\\
&=f_i\left(\left[\sum_{J=1}^{J=J_{\max}}\beta_J\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E\right]+\left[\sum_{J=1}^{J=J_{\max}}\beta_J \boldsymbol{Q}^r\right]\right)\\
&=f_i\left(\sum_{J=1}^{J=J_{\max}}\beta_J\left[\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E+\boldsymbol{Q}^r\right]\right)\\
&\leq\sum_{J=1}^{J=J_{\max}}\beta_J f_i(\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E+\boldsymbol{Q}^r)
\end{aligned} \tag{6}$$

もし、式 (5) が成立すれば、不等式 (6) より、荷重領域 $\bar{\Gamma}$ に含まれるあらゆる荷重 $\alpha\bar{\gamma}_0\in\bar{\Gamma}$ に対して、時間に依らない残留応力場 $\boldsymbol{Q}^r$ が存在して、静的許容な応力場が構成できることが分かる。このような応力場を Melan の意味での静的許容な応力場と呼ぶ。

Melan の意味での静的許容な応力場が成立する十分条件は式 (5) である。本論文では、Melan の意味での静的許容な応力場を照査する時には、その十分条件である (5) を用いることにする。

静的許容な応力場が満たすべき条件式をまとめて再掲する。

$$f_i\left(\boldsymbol{Q}_J\right)+s_{iJ}=0,\ s_{iJ}\geq 0,\quad \forall i\in V, \forall J\in\bar{\Gamma}_0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Q}_J=\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E+\boldsymbol{Q}^r \tag{8}$$

$$\boldsymbol{B}'^T\boldsymbol{Q}^r=\boldsymbol{0} \tag{9}$$

ここに $s_{iJ}\geq 0$ は制約条件を等式に書き換えるために導入した非負のスラック変数である。

* シェイクダウン定理では弾性挙動は線形であることが本質的に要求されるので、厳密には線形弾性挙動。

2.4 提案する Lagrangian L_s

極限解析法のアナロジーから、シェイクダウン解析法について以下の Lagrangian L_s を提案する。

$$L_s=\begin{cases}
\alpha+\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{B}'^T\boldsymbol{Q}^r-\boldsymbol{0})\\
\quad -\sum_J\sum_i\lambda_{iJ}\left(f_i(\boldsymbol{Q}_J)+s_{iJ}\right)\\
\quad +\sum_J\boldsymbol{\mu}_J\cdot\left(\boldsymbol{Q}_J-\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E-\boldsymbol{Q}^r\right)\\
\quad +\sum_J\sum_i s_{iJ}t_{iJ} \qquad \text{for } t_{iJ}\geq 0\\
+\infty \qquad \text{otherwise}
\end{cases} \tag{10}$$

ここにベクトル $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\mu}_J$ はそれぞれ残留応力場の条件、応力の分解表現に対応した Lagrange 乗数、テンソル λ_{iJ}, t_{iJ} はそれぞれ降伏条件、スラック変数の非負性に対応した Lagrange 乗数である。

また総和 $\sum_i$ は全ての積分点 $i\in V$ に関する総和を、総和 $\sum_J$ は荷重領域の線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$ の全ての頂点 $J\in\bar{\Gamma}_0$ に関する総和を表す。

2.5 静力学的方法（Melan の定理）

Lagrangian L_s の変数 $\boldsymbol{\kappa}$, λ_{iJ}, $\boldsymbol{\mu}_J$, t_{iJ} 関する下限をとれば、以下の通りである。

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{L_s\,|\boldsymbol{\kappa},\lambda_{iJ},\boldsymbol{\mu}_J,t_{iJ}\right\}=\alpha\\
&\text{Sub.}\begin{cases}
f_i(\boldsymbol{Q}_J)+s_{iJ}=0,\ s_{iJ}\geq 0, \forall i\in V, \forall J\in\bar{\Gamma}_0\\
\boldsymbol{B}'^T\boldsymbol{Q}^r=\boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{Q}_J=\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E+\boldsymbol{Q}^r
\end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

式 (11) では、制約条件として Melan の意味での静的許容な応力場、目的関数として荷重係数が導出されていることが分かる。

次に、この式 (11) に対して、残りの変数 α, $\boldsymbol{Q}_J$, $\boldsymbol{Q}^r$, s_{iJ} に関する上限をとる。そうすると以下の最大化問題を得る。

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{\inf\left\{L_s\,|\boldsymbol{\kappa},\lambda_{iJ},\boldsymbol{\mu}_J,t_{iJ}\right\}|\,\alpha,\boldsymbol{Q}_J,\boldsymbol{Q}^r,s_{iJ}\right\}\\
&=\sup\left\{\alpha\,|\alpha,\boldsymbol{Q}_J,\boldsymbol{Q}^r,s_{iJ}\right\}\\
&\text{Sub.}\begin{cases}
f_i(\boldsymbol{Q}_J)+s_{iJ}=0,\ s_{iJ}\geq 0, \forall i\in V, \forall J\in\bar{\Gamma}_0\\
\boldsymbol{B}'^T\boldsymbol{Q}^r=\boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{Q}_J=\alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^E+\boldsymbol{Q}^r
\end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

式 (12) は Melan の意味での静的許容な応力場のもとで、荷重係数の最大化を図る最適化問題であり、Melan の定理に基づく静力学的なシェイクダウン解析法にほかならない。

2.6 運動学的方法（Koiter の定理）

次に Lagrangian L_s の上限と下限をとる操作の順序を入れ換えてみよう。すなわち、まず変数 α, $\boldsymbol{Q}_J$, $\boldsymbol{Q}^r$, s_{iJ} に関する上限をとり、その後、残りの変数について下限をとる。

最初に Lagrangian L_s の変数 α, $\boldsymbol{Q}_J$, $\boldsymbol{Q}^r$, s_{iJ} に関する上限をとる。このとき $\boldsymbol{Q}_J$ に関する上限は陽な形で表せないので、以下の関数 $D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$ を導入して、形式的に表現しておく。

$$\sup\{L_s\,|\alpha, \boldsymbol{Q}_J, \boldsymbol{Q}^r, s_{iJ}\} = D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$$
$$\text{Sub.}\begin{cases}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\kappa} - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J = \boldsymbol{0} \\ 1 - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot \boldsymbol{Q}^E_{0J} = 0 \\ \lambda_{iJ} = t_{iJ} \geq 0\end{cases} \tag{13}$$

ここに関数 $D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$ は

$$D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ}) = \sup\left\{\sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot \boldsymbol{Q}_J - \sum_J\sum_i \lambda_{iJ} f_i(\boldsymbol{Q}_J)\,\middle|\, \boldsymbol{Q}_J\right\} \tag{14}$$

と定義される。

式 (13) に現われる制約条件の物理的な意味を検討しておく。まず、

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\kappa} = \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \tag{15}$$

は Koiter が導入した「許容な塑性ひずみ速度サイクル」に相当する。この許容な塑性ひずみ速度サイクルとは、塑性ひずみ速度を 1 周期 T にわたって積分して得られる塑性ひずみ増分と 1 周期にわたる変位増分が適合条件を満たす塑性ひずみ速度のことである。具体的には、1 周期にわたる変位増分を $\boldsymbol{\kappa}$, 塑性ひずみ速度を $\dot{\boldsymbol{q}}^p(t)$ と表すと、

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{q}^p = \int_{t=0}^{t=T} \dot{\boldsymbol{q}}^p(t)\, dt \tag{16}$$

なる関係を満たす塑性ひずみ速度である。

式 (15) と式 (16) を見比べると、塑性ひずみ速度の時間域での積分が荷重領域の各頂点 J に対応する Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\mu}_J$ の総和に置き換わっていることが分かる。したがって、Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\mu}_J$ は、物理的には塑性ひずみを表していることがわかる。また、時間積分が総和に置き換わるのは、外力の離散的表現によって、時間域の荷重履歴が時間に依らない基底荷重 $\boldsymbol{\Gamma}_{0J}$ の線形和として表現されているためである。よって塑性ひずみ $\boldsymbol{\mu}_J$ には、すでに時間積分の効果が陰な形で入っているとも言える。さらに、テンソル $\boldsymbol{B}'^T$ が空間的な数値積分によるヤコビアンと重みの影響を考慮しているため、塑性ひずみ $\boldsymbol{\mu}_J$ には空間的な数値積分によるヤコビアンと重みの影響も含まれていることに注意する。

つぎに、制約条件式

$$\sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot \boldsymbol{Q}^E_{0J} = 1 \tag{17}$$

の物理的意味を考える。

1 周期あたりの外部塑性仕事は、基準荷重に対応した静的許容な線形弾性応力 $\boldsymbol{Q}^E_0(t)$ と任意の運動学的に許容なひずみ速度場 $\dot{\boldsymbol{q}}$ によって以下のように表せる。

$$W_{ext0} = \int_{t=0}^{t=T} dt \int_V \dot{\boldsymbol{q}}(t) \cdot \boldsymbol{Q}^E_0(t) dV \tag{18}$$

ただし、この表現では仮想仕事の原理を用いていることに注意する。さらに運動学的に許容なひずみ速度場は、系の線形弾性挙動を仮定した時の仮想的な線形弾性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{q}}^E$, 残留応力場による線形弾性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{q}}^r$ および塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{q}}^p$ に分解可能である。

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \dot{\boldsymbol{q}}^E(t) + \dot{\boldsymbol{q}}^r(t) + \dot{\boldsymbol{q}}^p(t) \tag{19}$$

式 (18) に (19) を代入し、周期性 $\boldsymbol{Q}^E_0(t) = \boldsymbol{Q}^E_0(t+T)$ と Betti の相反定理を利用すると、1 周期あたりの外部塑性仕事は以下のように整理できる。

$$\begin{aligned}W_{ext0} &= \int_{t=0}^{t=T} dt \int_V \boldsymbol{Q}^E_0(t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}(t) dV \\ &= \int_{t=0}^{t=T} dt \int_V \boldsymbol{Q}^E_0(t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^E(t) dV \\ &\quad + \int_{t=0}^{t=T} dt \int_V \boldsymbol{Q}^E_0(t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^r(t) dV \\ &\quad + \int_{t=0}^{t=T} dt \int_V \boldsymbol{Q}^E_0(t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^p(t) dV \\ &= \int_{t=0}^{t=T} dt \int_V \boldsymbol{Q}^E_0(t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^p(t) dV\end{aligned} \tag{20}$$

さて、式 (17) の左辺と式 (20) を比較すると、1 周期にわたる時間積分と領域積分が荷重領域の各頂点 J で評価される物理量の総和に置き換えられていることが分かる。前述のように、各頂点 J で評価される塑性ひずみ $\boldsymbol{\mu}_J$ の中に、空間域の数値積分の影響と時間域の積分の影響の両方が含まれていることを考慮すれば、これら 2 つが等価であることが理解できる。従って、式 (17) は基準荷重 $\boldsymbol{t}_0(t)$ による 1 周期あたりの外部塑性仕事 W_{ext0} が 1 であることを表す正規化条件に相当する。

最後に、制約条件式 $\lambda_{iJ} = t_{iJ} \geq 0$ は Lagrange 乗数 λ_{iJ} の非負性を意味している。なお、λ_{iJ} の物理的な意味については、後ほど詳しく説明する。

一方、式 (13) の上限操作に引き続いて、変数 $\lambda_{iJ}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}_J, t_{iJ}$ に関する下限操作を考える。まず、変数 λ_{iJ}, t_{iJ} に関する下限をとる。ここで λ_{iJ}, t_{iJ} の非負性が課せられることに注意すると、以下の関係を得る。

$$\inf\{D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})|\, \lambda_{iJ} \geq 0, t_{iJ} \geq 0\}$$
$$= \begin{cases}\bar{D}_s(\boldsymbol{\mu}_J) = \sup\left\{\sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot \boldsymbol{Q}_J \,\middle|\, \boldsymbol{Q}_J\right\} & \text{if } f_i(\boldsymbol{Q}_J) \leq 0 \\ -\infty \quad \text{otherwise}\end{cases} \tag{21}$$

ここで J に関する総和が 1 周期にわたる時間積分を意味することと、Hill の最大塑性仕事の原理を考慮すれば、関数 $\bar{D}_s(\boldsymbol{\mu}_J)$ は 1 周期あたりの内部消散率を意味する。

さらに、関数 $D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$ あるいは関数 $\bar{D}_s$ の応力 $\boldsymbol{Q}_J$ に関する上限操作について検討しておく。降伏関数 f_i の微分可能性を仮定し、しかも与えられた $\boldsymbol{\mu}_J$, λ_{iJ} について $\bar{D}_s$ が有界であれば、以下の停留条件が成り立つ。

$$\boldsymbol{\mu}_J = \sum_i \lambda_{iJ} \left.\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{Q}}\right|_{\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_J}, \ \lambda_{iJ} \geq 0 \qquad (22)$$

これは関連流れ則に他ならない。また Lagrange 乗数 λ_{iJ} は非負の塑性乗数に相当する量である。ただし、塑性ひずみ $\boldsymbol{\mu}_J$ と同様に、空間域での数値積分に伴うヤコビアンと重みの影響および時間域での積分の影響を含んだ量であることに注意する。さらに、降伏関数 f_i の微分不可能な場合でも、連続関数であれば劣微分を用いて同様の議論が可能であり、最終的には関連流れ則が導出されることを指摘しておく。

さて、さらに変数 $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}_J$ に関する下限をとると、最終的には以下の最適化問題を得る。

$$\begin{aligned}
&\inf\{\sup\{L_s \mid \alpha, \boldsymbol{Q}_J, \boldsymbol{Q}^r, s_{iJ}\} \mid \boldsymbol{\kappa}, \lambda_{iJ}, \boldsymbol{\mu}_J, t_{iJ}\} \\
&= \inf\{\bar{D}_s(\boldsymbol{\mu}_J) \mid \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\kappa}\} \\
&\text{Sub.} \begin{cases} \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\kappa} - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J = \boldsymbol{0} \\ 1 - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot \boldsymbol{Q}^E_{0J} = 0 \\ \lambda_{iJ} = t_{iJ} \geq 0 \end{cases}
\end{aligned} \qquad (23)$$

式 (23) は、1 周期あたりの外部塑性仕事が 1 で正規化された許容な塑性ひずみ速度サイクルの中で、1 周期あたりの内部消散 W_{int} の最小化を図る最適化問題であり、Koiter の定理に基づく運動学的なシェイクダウン解析法にほかならない。なお、式 (23) の制約条件には陽な形で塑性変形の流れ則が含まれていないが、関数 $D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$ の定義 (14) における上限操作と、式 (22) の停留条件が実質的に等価であることに注意すると、陰な形で関連流れ則も制約条件として含まれていることに注意しておく。このような制約条件全てを満足する速度場を Koiter の意味で運動学的に許容な速度場と呼ぶことにする。

2.7 シェイクダウン解析法の双対性

提案した Lagrangian L_s の上限・下限操作の順序を入れ換えることで、静力学的なシェイクダウン解析法と運動学的なシェイクダウン解析法が導出できた。したがって、これらの解析法は互いに双対の関係にあることが示された。

なお、極限解析法における双対性の導出ととシェイクダウン解析法における双対性の導出は形式的には同様に見えるが、本質的には以下のような大きな違いがあることを指摘しておく。

極限解析法の場合、線形弾性応力 $\boldsymbol{Q}^E$ には本質的な意味はなく、外力によって一意に決まる応力を利用すれば同様の議論が可能である。一方、シェイクダウン解析法の場合は、弾性挙動の線形性が本質的に要求される。例えば、証明の過程で Betti の相反定理を用いていることからも、この要求は明らかである。

2.8 双対ギャップと相補性条件

運動学的なシェイクダウン解析法と静力学的なシェイクダウン解析法は互いに双対の関係にあるので、これらの目的関数の差は双対ギャップである。まず、Koiter の意味で運動学的に許容な速度場に属する物理量を記号~で、Melan の意味で静力学的に許容な応力場に属する物理量を上添字 0 で表すことにする。

関数 $D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$ の定義より以下の不等式が常に成立する。

$$D_s(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_J, \tilde{\lambda}_{iJ}) \geq \sum_J \tilde{\boldsymbol{\mu}}_J \cdot \boldsymbol{Q}^0_J - \sum_J \sum_i \tilde{\lambda}_{iJ} f_i(\boldsymbol{Q}^0_J) \qquad (24)$$

この関係を用いて、双対ギャップを具体的に表現すると

$$\begin{aligned}
\text{Duality gap} &= \tilde{W}_{int} - \alpha^0 \\
&\geq \sum_J \tilde{\boldsymbol{\mu}}_J \cdot \boldsymbol{Q}^0_J - \sum_J \sum_i \tilde{\lambda}_{iJ} f_i(\boldsymbol{Q}^0_J) - \alpha^0 \\
&= \sum_J \tilde{\boldsymbol{\mu}}_J \cdot (\alpha^0 \boldsymbol{Q}^E_{0J} + \boldsymbol{Q}^{r0}) \\
&\qquad + \sum_J \sum_i \tilde{\lambda}_{iJ} s^0_{iJ} - \alpha^0 \\
&= \alpha^0 \left(\sum_J \tilde{\boldsymbol{\mu}}_J \cdot \boldsymbol{Q}^E_{0J} - 1 \right) + (\boldsymbol{B}'\tilde{\boldsymbol{\kappa}}) \cdot \boldsymbol{Q}^{r0} \\
&\qquad + \sum_J \sum_i \tilde{\lambda}_{iJ} s^0_{iJ} \\
&= \sum_J \sum_i \tilde{\lambda}_{iJ} s^0_{iJ} \geq 0
\end{aligned} \qquad (25)$$

となる。つまり、双対ギャップは非負変数 λ_{iJ} と s_{iJ} の i, J に関する総和を上回り、常に非負であることが分かる。これは、運動学的なシェイクダウン解析法が常に静力学的なシェイクダウン解析法よりも大きめの荷重係数を評価することを意味している。

さらに、双対定理によれば、主問題と双対問題の目的関数値が一致するのは、正解の時に限ることが知られている。したがって、正解の物理量（上添字 $*$ で表す）のときに限って、以下の等式制約条件が成立する。

$$\sum_J \sum_i \lambda^*_{iJ} s^*_{iJ} = 0 \qquad (26)$$

この制約条件 (26) を相補性条件という。さらに塑性乗数 λ_{iJ} とスラック変数 s_{iJ} の非負性から、相補性条件は

$$\lambda^*_{ij} s^*_{iJ} = 0, \forall i \in V, \forall J \in \bar{\Gamma} \qquad (27)$$

と書き換えられる。相補性条件の物理的な意味は、領域 V 内の積分点 i が外荷重 $\alpha^* \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{0J}$ を受けたときの材料の状態を表しており、塑性乗数がゼロの場合は弾性挙動、スラック変数がゼロの場合は塑性挙動、いずれもがゼロの場合は中立挙動であると判定できる。

3. 主双対内点法による混合型シェイクダウン解析法の定式化

全節の議論を踏まえて、主双対内点法を用いて主問題 (12) と双対問題 (23) ならびに相補性条件 (27) を同

時に考慮し、繰返し計算により最適解に収束させるアルゴリズムについて議論する。

具体的な定式化は文献[12]を基にして、混合型剛塑性有限要素法をシェイクダウン解析に拡張したものである。その概要は以下の通りである。

- 初期解の仮定
  1. 線形弾性解 $\boldsymbol{Q}_{0J}^{E}$ の計算
  2. 弾性限界荷重係数 α_E の計算
  3. 初期解の設定（非負変数の非負性のみ確保）
- 繰返し求解過程
  1. バリヤパラメータ ε の計算
  2. 収束性の判定 $\lambda_{iJ}s_{iJ} \leq \mathrm{eps};\ \forall i,\ J$、収束していれば計算終了
  3. 全制約条件と相補性条件を近似解まわりでTaylor展開し、解の更新方向を計算
  4. 近似解と更新方向を用いて、非負変数の非負性を満足する最大のステップ幅を計算し、更新ステップ幅を評価
  5. 近似解の更新、1. に戻る

初期解としては、非負変数である塑性乗数 λ_{iJ} とスラック変数 s_{iJ} の非負性だけを確保しておけば、非実行可能解を用いることが可能である。初期解が非実行可能であっても、繰返し求解過程で、全ての制約条件を増分形で満足させていく計算を行うため、適当な回数の繰返し計算過程を経ると、解の実行可能性が自動的に満足されるようになることに注意しておく。一般に実行可能解を発見的に見出すことは容易ではない。この点、初期の非実行可能解から求解計算が開始できることは大きな利点である。もちろん、初期解として実行可能解が使えるのであれば、計算量の観点からはさらに有利となろう。

繰返し求解過程そのものについては以下に詳しく説明する。

3.1 バリヤパラメータ

主双対内点法では、双対ギャップを単調に減少させるために、単調減少列であるバリヤパラメータ ε を導入する。本研究では、バリヤパラメータとして、

$$\varepsilon = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{i=i_{\max}} \sum_{J=1}^{J=J_{\max}} \lambda_{iJ} s_{iJ} \right) / (i_{\max} J_{\max}) \right\}^{\omega} \tag{28}$$

を用いた。ここに ω は収束性を制御するパラメータである。このバリヤパラメータは、収束計算での近似解による双対ギャップを全積分点数 $i_{\max}$ および全頂点数 $J_{\max}$ で割った、平均的な双対ギャップに由来しており、計算の全体的な収束状況を推定するインデックスである。このバリヤパラメータを用いて、近似的な相補性条件を以下のように書く。

$$\boldsymbol{\Lambda}_J \boldsymbol{s}_J = \varepsilon \boldsymbol{e},\ \forall J \in \bar{\Gamma} \tag{29}$$

ここにテンソル $\boldsymbol{\Lambda}_J$ およびベクトル $\boldsymbol{e}$ はそれぞれ、$\boldsymbol{\Lambda}_J = \mathrm{diag}(\lambda_{iJ})$、$\boldsymbol{e} = (1, 1 \cdots 1)$ である。

3.2 解の更新方向の計算

まず、主問題と双対問題の制約条件を列挙しておく。

$$\boldsymbol{B}'^{T} \boldsymbol{Q}^{r} = 0 \tag{30}$$

$$\boldsymbol{Q}_J = \alpha \boldsymbol{Q}_{0J}^{E} + \boldsymbol{Q}^{r} \tag{31}$$

$$f_i(\boldsymbol{Q}_J) + s_{iJ} = 0,\ s_{iJ} \geq 0,\ \forall i \in V,\ \forall J \in \bar{\Gamma} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{B}' \boldsymbol{\kappa} = \sum_{J} \boldsymbol{\mu}_J \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\mu}_J = \sum_{i} \lambda_{iJ} \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{Q}},\ \lambda_{iJ} \geq 0,\ \forall J \in \bar{\Gamma} \tag{34}$$

$$\sum_{J} \boldsymbol{\mu}_J \cdot \boldsymbol{Q}_{0J}^{E} = 1 \tag{35}$$

式 (30)～(32) は Melan の意味での静的許容な応力場、式 (33)～(35) Koiter の意味での運動学的に許容な速度場である。さらに式 (33) と (34) は以下のようにまとめられる。

$$\boldsymbol{B}' \boldsymbol{\kappa} = \sum_{J} \sum_{i} \lambda_{iJ} \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{Q}},\ \lambda_{iJ} \geq 0 \tag{36}$$

また式 (35) と (34) も以下のようにまとめられる。

$$\sum_{J} \sum_{i} \lambda_{iJ} \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}_{0J}^{E} = 1 \tag{37}$$

一方、目的関数については、主・双対問題の目的関数を直接用いる代わりに、これらの双対ギャップを利用する。つまり、各繰返し計算では近似解によって評価したバリヤパラメータを用いた近似的な相補性条件 (29) を解く。

つぎに制約条件式 (30), (32), (36), (37) と近似的な相補性条件 (29) について、現在の近似解の回りで Taylor 展開をとる。最初に表記を簡単にするために予め以下のテンソル $\boldsymbol{E}_J$, $\boldsymbol{C}_J$ を導入しておく。これらは、降伏関数の勾配や Hessian 行列に対応している。

$$\boldsymbol{E}_J = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{Q}}\right|_{\boldsymbol{Q}_J} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \left.\frac{\partial f_{i_{\max}}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right|_{\boldsymbol{Q}_J} \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{C}_J = \begin{bmatrix} \lambda_{1J} \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial \boldsymbol{Q} \partial \boldsymbol{Q}}\right|_{\boldsymbol{Q}_J} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \lambda_{i_{\max}J} \left.\frac{\partial^2 f_{i_{\max}}}{\partial \boldsymbol{Q} \partial \boldsymbol{Q}}\right|_{\boldsymbol{Q}_J} \end{bmatrix} \tag{39}$$

また2次元問題の場合、テンソル $\boldsymbol{E}_J$ は $(3\, i_{\max}) \times i_{\max}$、テンソル $\boldsymbol{C}_J$ は $(3\, i_{\max}) \times (3\, i_{\max})$ の配列を持つ。ここに $i_{\max}$ は総積分点数である。

さて、具体的な増分形の方程式を以下に示す。まず、残留応力の釣合条件式は

$$-\boldsymbol{B}'^{T} \triangle \boldsymbol{Q}^{r} = \boldsymbol{B}'^{T} \boldsymbol{Q}^{r} = \boldsymbol{v} \tag{40}$$

となる。ここにベクトル $\boldsymbol{v}$ は近似解による残差ベクトルである。つぎに、降伏基準を破らない条件は

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{E}_J^{T} \boldsymbol{Q}_{0J}^{E}) \triangle \alpha + \boldsymbol{E}_J^{T} \triangle \boldsymbol{Q}^{r} + \triangle \boldsymbol{s}_J \\ = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Q}_J) - \boldsymbol{s}_J = \boldsymbol{r}_J, \quad \forall J \end{aligned} \tag{41}$$

となる。ここにベクトル $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_J$ はそれぞれ、各積分点 i での降伏関数値 $f_i(\boldsymbol{Q})$ やスラック変数値 s_{iJ} をまとめて表現したもの、またベクトル $\boldsymbol{r}_J$ は近似解による残差ベクトルである。つぎに、Koiter の意味での許容な塑性ひずみ速度サイクルは

$$
\begin{aligned}
&-\boldsymbol{B}'\triangle\boldsymbol{\kappa}+\sum_J \boldsymbol{E}_J\triangle\boldsymbol{\lambda}_J+\sum_J \boldsymbol{C}_J\triangle\boldsymbol{Q}_J\\
&\quad=-\boldsymbol{B}'\triangle\boldsymbol{\kappa}+\sum_J \boldsymbol{E}_J\triangle\boldsymbol{\lambda}_J\\
&\qquad+\left(\sum_J \boldsymbol{C}_J\boldsymbol{Q}^E_{0J}\right)\triangle\alpha+\left(\sum_J \boldsymbol{C}_J\right)\triangle\boldsymbol{Q}^r\\
&\quad=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\kappa}-\sum_J \boldsymbol{E}_J\boldsymbol{\lambda}_J=\boldsymbol{p}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

となる。ここにベクトル $\boldsymbol{\lambda}_J$ は各積分点 i での塑性乗数値 λ_{ij} をまとめて表示したもの、またベクトル $\boldsymbol{p}$ は近似解による残差ベクトルである。つぎに、1 周期あたり外部塑性仕事の正規化は

$$
\sum_J \boldsymbol{Q}^E_{0J}\cdot\boldsymbol{E}_J\triangle\boldsymbol{\lambda}_J=1-\sum_J \boldsymbol{Q}^E_{0J}\cdot\boldsymbol{E}_J\boldsymbol{\lambda}_J=q \tag{43}
$$

となる。ここにスカラー q は近似解による残差ベクトルである。最後に、近似的な相補性条件は

$$
\boldsymbol{S}_J\triangle\boldsymbol{\lambda}_J+\boldsymbol{\Lambda}_J\triangle\boldsymbol{s}_J=\varepsilon\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\Lambda}_J\boldsymbol{s}_J=\boldsymbol{w}_J,\quad \forall J \tag{44}
$$

となる。ここにテンソル $\boldsymbol{\Lambda}_J$, $\boldsymbol{S}_J$ はそれぞれ、$\boldsymbol{\Lambda}_J=\mathrm{diag}(\lambda_{iJ})$, $\boldsymbol{S}_J=\mathrm{diag}(s_{iJ})$、またベクトル $\boldsymbol{w}_J$ は近似解による残差ベクトルである。

さらに、式 (41) および (44) を用いれば、変数 $\triangle\boldsymbol{s}_J$, $\triangle\boldsymbol{\lambda}_J$ は変数 $\triangle\alpha$, $\triangle\boldsymbol{Q}^r$ の線形関数として以下のように表せる。

$$
\triangle\boldsymbol{\lambda}_J=\boldsymbol{S}_J^{-1}\left(\boldsymbol{w}_J-\boldsymbol{\Lambda}_J\triangle\boldsymbol{s}_J\right),\forall J \tag{45}
$$

$$
\triangle\boldsymbol{s}_J=\boldsymbol{r}_J-\left(\boldsymbol{E}_J^T\boldsymbol{Q}^E_{0J}\right)\triangle\alpha-\boldsymbol{E}_J^T\triangle\boldsymbol{Q}^r,\forall J \tag{46}
$$

ここに逆行列 $\boldsymbol{S}_J^{-1}$ はスラック変数 s_{iJ} の非負性から容易に $\boldsymbol{S}_J^{-1}=\mathrm{diag}\,(1/s_{iJ})$ と計算できることに注意しておく。

関係式 (45), (46) を式 (42), (43) に代入して $\triangle\boldsymbol{\lambda}_J$, $\triangle\boldsymbol{s}_J$ を消去すると、最終的に解くべき増分形の方程式が以下のように得られる。

$$
\begin{bmatrix}
\sum_J \boldsymbol{D}_J & \sum_J \boldsymbol{D}_J\boldsymbol{Q}^E_{0J} & -\boldsymbol{B}'\\
\sum_J\left(\boldsymbol{D}_J\boldsymbol{Q}^E_{0J}\right)^T & \sum_J \boldsymbol{Q}^E_{0J}\cdot\boldsymbol{D}_J\boldsymbol{Q}^E_{0J} & 0\\
-\boldsymbol{B}'^T & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}\triangle\boldsymbol{Q}^r\\ \triangle\alpha\\ \triangle\boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix}
=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}'\\ q'\\ \boldsymbol{v}\end{Bmatrix}
=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}-\sum_J \boldsymbol{E}_J\boldsymbol{S}_J^{-1}(\boldsymbol{w}_J-\boldsymbol{\Lambda}_J\boldsymbol{r}_J)\\ q-\sum_J \boldsymbol{Q}^E_{0J}\cdot\boldsymbol{E}_J\boldsymbol{S}_J^{-1}(\boldsymbol{w}_J-\boldsymbol{\Lambda}_J\boldsymbol{r}_J)\\ v\end{Bmatrix}
\tag{47}
$$

ここにテンソル $\boldsymbol{D}_J$ は

$$
\boldsymbol{D}_J=\boldsymbol{C}_J+\boldsymbol{E}_J\boldsymbol{S}_J^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_J\boldsymbol{E}_J^T \tag{48}
$$

と定義される。また式 (47) に現われる行列は対称行列となっていることにも注意しておく。

結局、解を更新するニュートン方向は、式 (47) によって、残留応力場の増分 $\triangle\boldsymbol{Q}^r$, 荷重係数の増分 $\triangle\alpha$ および 1 周期あたりの節点変位増分 $\triangle\boldsymbol{\kappa}$ を独立な未知量として解くことに帰着する。残りの変数 $\triangle\boldsymbol{\lambda}_{iJ}$, $\triangle\boldsymbol{s}_{iJ}$ については、式 (45), (46) によって計算できる。

式 (47) によれば、解くべき方程式の数は荷重領域 $\bar{\Gamma}$ の総頂点数 $J_{\max}$ によらず一定であることが分かる。総頂点数が $J_{\max}=1$ のときは、ここに示した定式化は極限解析の場合と全く一致する。この事実は、収束計算で最も計算量の多い計算過程である「解を更新するためのニュートン方向の計算過程」で剛塑性有限要素法と同程度の計算量に収まることを意味する。したがって、少なくとも理論的には、混合型シェイクダウン解析法も混合型剛塑性有限要素法と同程度の解析コスト・時間で数値解析が実施できることを示唆する。これは数値計算上、たいへん大きな利点であると考えられる。

3.3 解の更新と収束判定

つぎに、近似解を更新するためのステップ幅 β について議論する。実際問題として、ステップ幅 β の選択は、数値解析を効率的に行うためには重要である。一般に、ステップ幅と数値計算の間には、小さなステップ幅であれば計算は安定するが繰返し回数が多くなり、逆にステップ幅を大きい場合にはしばしば計算が不安定にある、というトレードオフの関係が成り立つ。

主双対内点法では、非負変数の非負性を満足する範囲でステップ幅を選択しておけば、繰返し求解過程で双対ギャップを単調に減少できる性質がある。したがって、一般には非負性を満足する中で最大のステップ幅を選択する。

非負変数は以下のように更新される。ここに記号˜は更新された量を表す。

$$
\tilde{\lambda}_{iJ}=\lambda_{iJ}+\beta\triangle\lambda_{iJ}\geq 0 \tag{49}
$$

$$
\tilde{s}_{iJ}\approx -f_i(\boldsymbol{Q}_J)-\beta\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{Q}}\cdot\left(\triangle\alpha\boldsymbol{Q}^E_{0J}+\triangle\boldsymbol{Q}^r\right)\geq 0 \tag{50}
$$

ここにスラック変数 s_{iJ} は非線形制約条件を制約条件に書き直すために便宜上導入した変数であって、その更新は本質的には応力状態 $\boldsymbol{Q}_J$ と降伏関数 f_i から決められるべきものであることに留意した。さて全ての $i\in V$, $J\in\bar{\Gamma}$ について、式 (49), (50) を満足するステップ幅 β のうち、最も大きなものを用いて解更新のためのステップ幅 β^* を以下のように決める。

$$
\beta^*=\gamma\max\beta,\ \text{Sub. eqns. (49), (50)} \tag{51}
$$

また、スカラー γ は普通 1 よりも僅かに小さな数を用いる。このステップ幅 β^* により解を更新する。

繰返し計算の収束判定基準としては、各積分点 $i\in V$、各頂点 $J\in\bar{\Gamma}$ における相補性条件 $\lambda_{iJ}\cdot s_{iJ}$ を計算し、全ての積分点、頂点において、所定の判定値、たとえば 1.0×10^{-8}、よりも小さければ収束と判定される。収束が確認されれば繰返し計算は終了する。一方、収束が満足されていなければ、バリヤパラメータ以降の一連の計算を再度行う。

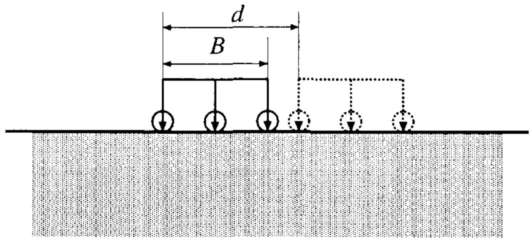


図-3 移動荷重の支持力解析（イメージ）

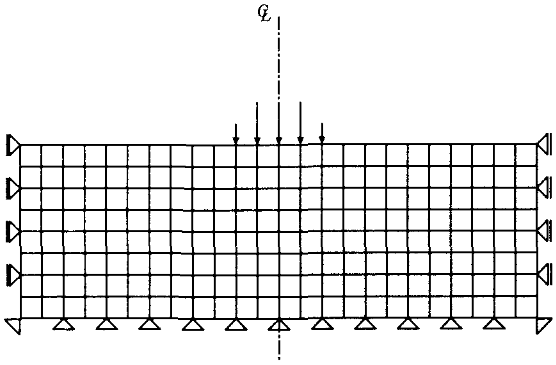


図-4 解析に使用したメッシュ

3.4 得られる解の性質

最終的に収束して得られる解は、Koiter の意味での運動学的な制約条件、静力学的な制約条件および相補性条件を全て満足している。したがって、得られた荷重係数はシェイクダウン限界の荷重係数の正解値である。

一方、得られる変位解は Koiter の意味で適合条件を満たしているが、これは系に残留する変形量を表しているのではない。一般に、ゼロ外力状態で系に残留する変位は、蓄積された塑性変形（塑性ひずみ $\boldsymbol{q}^p$）とゼロ外力に釣合う残留応力 $\boldsymbol{Q}^r$ による弾性ひずみ $\boldsymbol{q}^r$ との和に対して適合条件を満足する必要がある。

また、得られる残留応力場 $\boldsymbol{Q}^r$ についても、釣合式と降伏条件から、これを一意に決定することは一般的には不可能である。したがって、静的許容な応力場を構成する応力解の 1 つを示しているに過ぎない。

このように、本解析によって得られる変位解や残留応力場はあくまでも十分条件に過ぎず、これらを議論するときには注意を要する。また本論文の数値解析例では、荷重係数のみに着目した議論を行うことにする。

一方、実際に系に残留する変位場を評価するためには、さらに別の手法が必要である。文献[14]では、シェイクダウン限界荷重よりも小さな荷重係数による繰返し外力が作用し最終的に塑性安定を示す場合には、残留応力場による補ひずみエネルギーを最小にする問題を解くことによって、正解の残留応力場や変位場が求まることを指摘している。詳しくは文献を参照されたい。

4. 数値解析例

全節までの理論的検討に基づいて混合型シェイクダウン解析法の数値解析コードを試験的に開発した。ここではその解析例について紹介する。

シェイクダウン解析の例として、図-3 に示すような移動荷重が作用した場合の支持力問題を取り上げる。問題は 2 次元平面応力問題とし、計算は全て無次元化して行った。地盤材料は自重のない $c, \phi = 0$ の Tresca 地盤とする。載荷重は一様鉛直荷重とし、載荷幅は B, 移動荷重の移動範囲は d とする。

実際に解析に使用したメッシュを図-4 に示す。変位境界条件は側面はスライダー支持、底面は固定支持とした。解析領域の大きさは幅 12、深さ 4 である。要素は 4 節点 1 次のアイソパラメトリック要素で、載荷端部での特異点処理などは特に行っていない。

具体的な解析結果を表 1 に示す。移動量 $d = 0$ の場合は、均等鉛直荷重の支持力問題であるので、支持力係数 N_c の正解値 $\pi + 2$ が知られている。メッシュおよび載荷領域の空間離散化が粗いため、支持力係数 N_c の値から判断すると載荷幅 $B = 2.0$ の場合でもおおよそ 10% 程度の誤差は含まれているようである。載荷幅が小さいケースではその誤差はさらに大きくなる。また、移動量 d が長くなるほど、シェイクダウン限界の荷重係数は小さくなる結果が得られている。

表-1 解析結果

載荷幅 B	移動範囲 d	荷重係数 α	支持力係数 N_c
1.0	0.0	3.06	(6.12)
	0.5	2.98	
	1.0	2.83	
	1.5	2.68	
	2.0	2.67	
1.5	0.0	2.91	(5.82)
	0.5	2.73	
	1.0	2.60	
	1.5	2.21	
	2.0	2.02	
2.0	0.0	2.77	(5.54)
	0.5	2.69	
	1.0	2.38	
	1.5	2.00	

表 1 のデータに基づいて、シェイクダウン限界の荷重係数 α と移動距離を載荷幅で除した無次元移動距離 d/B の関係を示したものが図-5 である。この結果だけでは不十分で、定量的な議論を行うことは難しい。定性的には、移動距離が長くなると荷重係数は低下し、ある程度移動距離が長くなると荷重係数は一定値に収束するようである。これは、十分遠方で荷重が作用する場合の影響は無視できることを示唆している。

5. おわりに

本研究で得られた知見を簡単にまとめておく。

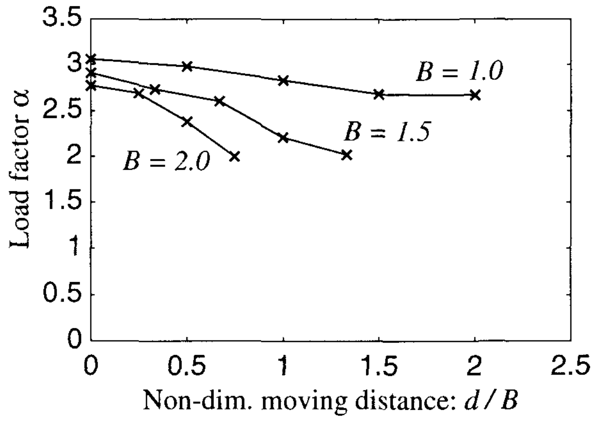


図-5 荷重係数と無次元移動距離の関係

本研究では、まず、Lagrange 双対理論にしたがって、シェイクダウン解析法の数理構造を整理した。

- 繰返し荷重を表現する方法として、荷重空間内の凸な荷重領域を用いた。具体的な荷重領域としては、荷重の経時的な経路を荷重空間で内包する凸包に外接する凸多面体を用いた。
- さらに、静力学的な観点から降伏関数の凸性を考慮すれば、凸多面体に沿った仮想的な繰返し荷重経路に対する系の塑性安定性を評価するためには、凸多面体の全ての頂点に対応する荷重に対して系の塑性安定性を評価するだけで十分である。このように、時間域で連続的に表現される繰返し荷重を荷重空間内の凸多面体の頂点に対応した荷重に置き換えて表現する方法を、本論文では繰返し荷重の離散化と呼ぶ。
- 繰返し荷重の離散化により、静力学的なシェイクダウン解析法は極限解析法の下界法と同様の定式化が可能となる。そこで、シェイクダウン解析法に対する LagrangianL_s を提案した。
- Lagrange 双対理論を用いて、シェイクダウンの静力学定理（Melan の定理）と運動学定理（Koiter の定理）の双対性を端的に示した。このように、シェイクダウン解析法は、数理的には凸な非線形最適化問題と位置付けられる。
- なお、繰返し荷重の離散化に伴って、運動学定理（Koiter の定理）では、時間域での積分は、凸多面体の各頂点に対応する変数の総和で表現されることに注意する。
- シェイクダウン解析の運動学的方法と静力学的方法の双対ギャップから、最適解が満足すべき相補性条件を導出した。また、この相補性条件の力学的な意味は、対応する荷重に対して、物質点が塑性 / 弾性 / 中立のいずれの状態にあるかを判別する条件である。

上述のシェイクダウン解析法の数理構造に関する知見から、主双対内点法に基づく混合型のシェイクダウン解析法のアルゴリズムを開発した。

- 開発した混合型シェイクダウン解析法アルゴリズムは、筆者の一人が提案した主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法を繰返し荷重に拡張したものと位置付けられる。
- 開発した混合型シェイクダウン解析法アルゴリズムは、前処理として容易に解析的に解ける方程式を陽に解いて変数の配列を出来るだけ小さくした。その結果、収束計算において最も計算量の多い計算過程である「解を更新するためのニュートン方向の計算過程」で、剛塑性有限要素法と同程度の計算量に収まるように定式化しているのが特徴である。
- これは、少なくとも理論的には、シェイクダウン解析法も剛塑性有限要素法と同程度の解析コスト・時間で実施できることを示唆するものである。
- 上記の特徴に加えて、主双対内点法自身も高速な解法アルゴリズムでかつ問題の大規模化にも対応し得るという特徴を有する。従って、本論文で提案した混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズムは数値計算の観点からも有望であると思われる。
- 試験的に開発した数値解析コードにより、移動鉛直荷重の支持力問題を解いた。解析ケースが必ずしも十分でないために定量的な検討はできないが、すくなくとも定性的には矛盾のない結果が得られている。

最後に、今後の課題について述べる。

本論文ではシェイクダウン解析法の理論的な検討を行い、混合型の数値解析アルゴリズムを提案した。しかしながら、実際に初期値境界値問題に適用し、効率の良い数値解析を実施するためには、数値計算上のノウハウの蓄積も重要である。また、今回提案したアルゴリズムは非常に基本的な解法の構造を検討したに過ぎない。このアルゴリズムを基にして、さらに計算の高速化を図る検討が必要である。

また、解析で求められる変位解や応力解については、あくまでも十分条件に過ぎない。このような解の中で、実際に起こり得る残留変位場や残留応力場を評価するためには、文献[14]に示すように別途検討が必要となることに注意しておく。

さらに、例題としてとりあげた移動鉛直荷重の問題について、数値解析解の定量的な検証を行い、その信頼性を確認する必要があることは言うまでもない。

謝辞

本研究の一部は平成 15 年度 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 15760360（研究代表者：小林俊一）の補助を受けた。また、2000 年 10 月に開催された CISM の集中講義 *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads* [9]からは本研究の着想に至るインスピレーションを得た。ここに記して謝意を表する。

参考文献

1) Melan, E.: Theorie statisch unbestimmter systeme aus ideal-plastischem baustoff, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss., Wien, Abt. 2A 145, 195–218, 1936.
2) Koiter, W.T.: General theorems for elastic-plastic

solids, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 1, Eds Sneddon, J.N. and Hill, R., North-Holland, 165–221, 1960.

3) Martin, J.: *Plasticity*, MIT Press, 1975.
4) König, J.: *Shakedown of elastic-plastic structures*, Elsevier, 1987.
5) Lloyd Smith, D. (ed.): *Mathematical programming methods in structural plasticity*, Springer-Verlag, 1990.
6) Stein, E. (ed.): *Progress in computational analysis of inelastic structures*, Springer-Verlag, 1993.
7) Mróz, Z., Weichert, D. and Dorosz, B. (eds.): *Inelastic behaviour of structures under variable loads*, Kluwer, 1995.
8) Kamenjarzh, J.A.: *Limit analysis of solids and structures*, CRC Press, 1996.
9) Weichert, D. and Maier, G. (eds.): *Inelastic behaviour of structures under variable repeated loads*, Springer-Verlag, 2002.
10) Maier, G., Carvelli, V. and Cocchetti, G.: On direct methods for shakedown and limit analysis, European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 19, Special Issue, s79–s100, 2000.
11) Maier, G.: On some issues in shakedown analysis, Journal of Applied Mechanics, Vol. 68, 799–808, 2001.
12) 小林俊一：主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 6, pp. 95–106, 2003.
13) 小林俊一、酒井拓磨、田村 武：混合型剛塑性有限要素法による摩擦性材料の支持力解析、応用力学論文集, 土木学会, Vol. 7, 2004.
14) 小林俊一：直接法による永久変形量の評価法について、応用力学論文集, 土木学会, Vol. 7, 2004.

(2004 年 4 月 16 日 受付)