

直接法による永久変形量の評価法について

Study on an evaluation method of permanent deformation by the use of a direct method

小林俊一*

Shun-ichi KOBAYASHI

*正会員 博士(工学) 京都大学大学院助手 工学研究科社会基盤工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

Direct methods are to estimate a load factor and a displacement field at the ultimate limit state or shakedown limit state by the use of limit theorems, the shakedown theorems or other energy principles, instead of the evolutionary method which is a step by step elasto-plastic calculation in the time domain. A mathematical and mechanical structure of a direct method for the estimation of permanent deformation under the repeated loads based on the minimisation of the complementary elastic strain energy is investigated in this paper. A methodology is similar to the author's research works on the hybrid type limit / shakedown analysis algorithms. From the point of Lagrangian duality theory, both static and kinematic analyses are derived from the proposed Lagrangian. Characteristics of the proposed method are also discussed.

Key Words : direct method, limit analysis, shakedown analysis, permanent deformation

1. はじめに

直接法 (Direct method) とは、単調あるいは繰返し荷重を受ける剛塑性 / 弾塑性境界値問題に対して、弾塑性解析法のように時間領域で逐次的に増分解析を行うことで塑性安定性や変形量を評価するのではなく、系の限界状態を直接的に想定して、塑性安定性や変形量を評価する方法の総称である。例えば、極限解析法やシェイクダウン解析法のように直接的に終局限界あるいはシェイクダウン限界荷重を計算して塑性安定性を評価する方法は直接法に位置付けられる。

このなかで、シェイクダウン解析法は、繰返し荷重が作用する弾塑性体の安定性を照査する解析法の一つである。その特徴は、繰返し荷重に対する系の応答を時間域で逐次的に解く増分形の弾塑性解析法とは異なり、荷重空間内に繰返し荷重がとり得る荷重領域を設定し、その荷重領域に対して系が安定かどうかを照査することにある。したがって、シェイクダウン解析は以下の点で増分形の解析よりも有利であると考えられる。

- 繰返し荷重の詳細な時刻歴は必要なく、荷重がとり得る領域だけが分かれば解析が可能である。これは、自然外力など事前に詳細な時刻歴を知ることが難しい場合に有利であると考えられる。
- 時間域での解析を回避できることによって、計算コストと時間の短縮が期待できる。このため 3 次元解析のように規模の大きな初期値・境界値問題で、特に有利であると考えられる。
- 得られる解には、安全率や荷重係数などが含まれる。これらは設計実務に直接対応した物理量であり、設計法への応用にも有利であると考えられる。

また極限解析法はシェイクダウン解析法の非常に特殊な場合、すなわち荷重空間内の荷重経路を考えれば、原点から単調に 1 方向載荷する場合に当たると考えられる。したがって、本論文では専らシェイクダウン解

析法だけを取り上げて議論する。

一般に極限解析法やシェイクダウン解析法では、作用する基準外力あるいは基準荷重領域に対して、塑性限界状態あるいはシェイクダウン限界状態となる荷重係数を評価することが多い。しかしながら、実際に構造物などの限界状態設計を行うためには、荷重に関する限界状態だけでは不十分であり、変位あるいは変形によって規定される限界状態も考慮しなければならない。例えば、構造物の供用に支障を生じるような使用限界状態を考慮して設計する必要がある。

このような変位 / 変形を評価するためには、時間領域で逐次的に増分形の方程式を解く、弾塑性解析が用いられることが多い。一方、直接法の一つとして、繰返し荷重作用時の残留変形量の上限を評価する手法が Bounding Technique として知られており、1970 年代から多くの方法が提案されている^{1),2),3),4),5)}。これらは、単調載荷時の残留変形量について Hodge が提案した定理⁶⁾の拡張と見ることもできる。直接法による残留変形量の評価は、シェイクダウン解析法と理論的に深い結び付きがある。

さて、著者はこれまで凸解析の立場から極限定理の双対性に着目し、剛塑性境界値問題を数値的に解くアルゴリズムとして主双対内点法に基づく混合型の剛塑性有限要素法 (PDRPFEM) を提案している⁷⁾。また、そのアルゴリズムを繰返し荷重を受ける弾塑性境界値問題へ拡張した、混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズム⁸⁾についても検討を行った。その結果、極限解析法やシェイクダウン解析法に関する混合型のアルゴリズムを統一的に表現することに成功している。

本研究では、これらの成果を受けて、さらにアルゴリズムの統一的表現を念頭に、直接法による永久変形量評価法の検討を行った。具体的には、補ひずみエネルギーの最小化に着目した永久変形量の評価法について、凸解析の立場から双対性に着目した数理構造の検

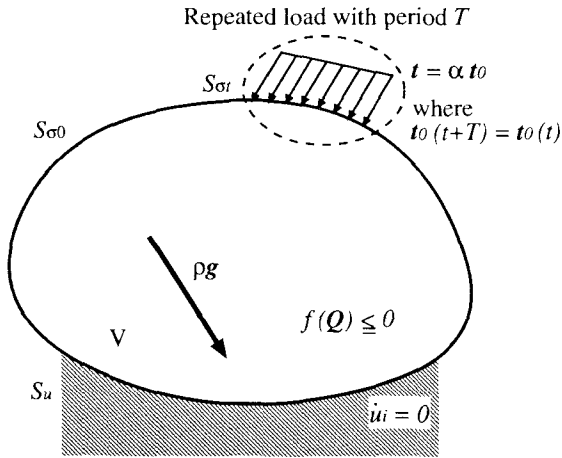


図-1 対象とする弾塑性境界値問題

討を行った。本論文では、その結果を報告する。

2. シェイクダウン解析法と永久変形量評価法の類似性

ここでは静力学的な観点から、応力場の議論を通してシェイクダウン解析法と永久変形量評価法の類似性について着目し、永久変形量評価法の基礎となる Lagrangian L_d を提案する。シェイクダウン解析法の数理構造については例えば文献⁸⁾を参照されたい。

2.1 対象とする弾塑性境界値問題

対象とする弾塑性境界値問題を図-1 に示す。材料は降伏関数 $f(Q)$ に従う弾完全塑性材料とする。ここに Q は応力である。与えられる境界条件は以下の3つ、すなわち境界 S_u で固定境界（斉次 Dirichlet）条件、境界 S_{σ_0} で表面力がゼロの応力境界（斉次 Neumann）条件、境界 S_{σ_t} で周期 T の繰返し表面力 $t = \alpha t_0$ の応力境界（非斉次 Neumann）条件を考える。ここに t_0 は基準となる繰返し表面力で、周期性の条件より全ての時刻 $t \geq 0$ において $t_0(t) = t_0(t+T)$ を満たす。また α は荷重係数である。全境界 S はこれらの境界条件 S_u , S_{σ_0} , S_{σ_t} のいずれかに属する。また外力として、荷重係数とは独立な死荷重も考慮できる。例えば、図1には物体力を示している。

このような弾塑性境界値問題に対して、シェイクダウン解析ではシェイクダウン限界荷重に対応する荷重係数 α^* を求める最適化問題を考える。一方、永久変形量の評価法では、予め与えられた荷重係数 $\alpha_d \leq \alpha^*$ に対して、次の補助的な最適化問題を検討する。すなわち、Melan の意味で静力学的に許容な応力場⁹⁾を構成する時間によらない残留応力場 Q^r の中で、補ひずみエネルギーを最小にするものを求める。以下の節では、それを具体的に説明していこう。

そのための準備として、まず外力の離散的表現法と静的許容な応力場の表現法について説明する。これらの表現法は混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズム⁸⁾と全く同じである。

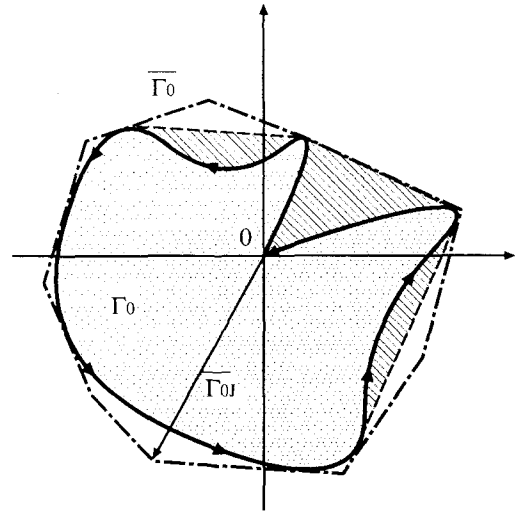


図-2 荷重領域 Γ_0 、その凸包および線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$

2.2 外力の離散的表現

ここでは、荷重領域とその線形外接領域を導入することによって、繰返し外力を時間に依らない離散的な量として表現する方法を図-2 を用いて説明する。

まず、時刻 t を媒介変数として基準となる繰返し外力 $t_0(t)$ を荷重空間内に表現する。荷重空間の原点と時刻 t の荷重状態 $t_0(t)$ を結んだ動径が1周期 T で掃く空間を荷重領域 Γ_0 と呼ぶ。

つぎに、荷重空間内で荷重領域 Γ_0 を含む最小の凸領域を考える。この凸領域は凸包 (Convex hull) と呼ばれる。さらにこの凸包を内部に含む凸多面体を考える。この凸多面体を荷重領域の線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$ と呼ぶ。領域 $\bar{\Gamma}_0$ の各頂点を $\bar{\Gamma}_{0J}$ とすれば、領域内部の任意の荷重 $\bar{\gamma}_0 \in \bar{\Gamma}_0$ は、以下の線形和で表せる。

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J \bar{\Gamma}_{0J} \quad \text{where} \quad \sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J = 1, \quad 0 \leq \beta_J \leq 1 \quad (1)$$

ここに $J_{\max}$ は凸多面体の総頂点数、 β_J は非負かつ、総和が1となるスカラーパラメータである。荷重領域 Γ_0 、その凸包および線形外接領域 $\bar{\Gamma}_0$ の関係を図2に示す。

式(1)は荷重空間内の時間に依らない基底 $\bar{\Gamma}_{0J}$ の線形和によって、時間とともに変動する繰返し外力 $t_0(t)$ を離散的に表現していると解釈できる。

2.3 静的許容な応力場

まず、釣合系の応力場の一般的表現法を考える。系が線形弾性挙動を示すと仮定し、外力 $\bar{\Gamma}_{0J}$ によって生じる仮想的な弾性応力を Q_{0J}^E とする。この仮想的な線形弾性応力 Q_{0J}^E は、言うまでもなく、一意に求められる応力で、しかも釣合系の応力場を構成する。

さて、物体力および表面力がゼロとなる「ゼロ外力」に対する釣合系の応力場を考えてみよう。このような応力場を残留応力場と言い Q^r で表す。ここで有限要

素法による空間離散化を行い、残留応力場が満たすべき釣合式を弱形式で表現すると以下の式が得られる。

$$\int_V \mathbf{B}'^T \mathbf{Q}^r dV = 0 \quad (2)$$

ここにテンソル $\mathbf{B}'$ は有限要素法の B -マトリクスから斉次 Dirichlet 条件にあたる節点の成分を差し引いたテンソル、右辺の $\mathbf{0}$ ベクトルは Neumann 条件にあたる成分だけを集めたベクトルでゼロ外力を表している。本論文では、積分点を利用して応力やひずみの空間離散化を行うので、以後は式 (2) を単に

$$\mathbf{B}'^T \mathbf{Q}^r = 0 \quad (3)$$

と表記する。ここにベクトル $\mathbf{Q}^r$ は積分点で空間離散化された残留応力場、テンソル $\mathbf{B}'$ は数値積分によるヤコビアンと重みを考慮して代数的に表現した B -マトリクスである。

また式 (3) で表される残留応力場は、一般には一意には決定できず、不静定次数に応じた自由度を有する。なお、後ほど説明するように、残留変形量の評価法とは、目的関数として残留応力場の関数である線形弾性補ひずみエネルギーを導入して、この残留応力場を一意に決めることにほかならない。

さて、釣合式の線形性と弾性応力場 $\mathbf{Q}_{0J}^E$ の線形性に着目すれば、外力 $\alpha \bar{\Gamma}_{0J}$ が作用する場合の釣合系応力場は、一意に決定できる仮想線形弾性応力場 $\alpha \mathbf{Q}_{0J}^E$ とゼロ外力に釣合う残留応力場 $\mathbf{Q}^r$ の和で表現しても一般性を失わない。

$$\mathbf{Q}_J = \alpha \mathbf{Q}_{0J}^E + \mathbf{Q}^r \quad (4)$$

次に降伏条件について考えてみる。対象とする材料の弾塑性挙動が、応力空間内の原点を含む凸な降伏曲面 f によって表せると仮定する。すなわち、応力状態 $\mathbf{Q}$ が降伏曲面内 $f(\mathbf{Q}) < 0$ にあれば材料は弾性挙動を示し^{*}、応力状態 $\mathbf{Q}$ が降伏曲面上 $f(\mathbf{Q}) = 0$ にあれば、材料は塑性挙動を示す。

ここで、荷重領域 $\bar{\Gamma} = \alpha \bar{\Gamma}_0$ に含まれる任意の荷重ベクトル $\bar{\gamma} = \alpha \bar{\gamma}_0$ が降伏条件を破らないための十分条件について考える。もし、荷重領域 $\bar{\Gamma} = \alpha \bar{\Gamma}_0$ の全ての頂点 $\alpha \bar{\Gamma}_{0J}$ に対して、時間に依らない残留応力場 $\mathbf{Q}^r$ が存在して、静的許容な応力場が構成できるとする。つまり

$$f_i(\alpha \mathbf{Q}_{0J}^E + \mathbf{Q}^r) \leq 0, \quad \forall i \in V, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (5)$$

となる残留応力場が存在すると仮定する。ここで、応力については積分点による空間離散化を行っていることを考慮して、全ての積分点 i で制約条件 (5) が満たされなければならない。

このとき降伏関数 f の凸性を考慮すれば、任意のパラメータ $0 \leq \beta_J \leq 1$, $\sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J = 1$ に対して、以下の不

等式が成立する。

$$\begin{aligned} & f_i \left(\alpha \left[\sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J \mathbf{Q}_{0J}^E \right] + \mathbf{Q}^r \right) \\ &= f_i \left(\left[\sum_{J=1}^{J_{\max}} \alpha \beta_J \mathbf{Q}_{0J}^E \right] + \mathbf{Q}^r \right) \\ &= f_i \left(\left[\sum_{J=1}^{J_{\max}} \alpha \beta_J \mathbf{Q}_{0J}^E \right] + \left[\sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J \mathbf{Q}^r \right] \right) \\ &= f_i \left(\sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J [\alpha \mathbf{Q}_{0J}^E + \mathbf{Q}^r] \right) \\ &\leq \sum_{J=1}^{J_{\max}} \beta_J f_i(\alpha \mathbf{Q}_{0J}^E + \mathbf{Q}^r) \end{aligned} \quad (6)$$

もし、式 (5) が成立すれば、不等式 (6) より、荷重領域 $\bar{\Gamma}$ に含まれるあらゆる荷重 $\alpha \bar{\gamma}_0 \in \bar{\Gamma}$ に対して、時間に依らない残留応力場 $\mathbf{Q}^r$ が存在して、静的許容な応力場が構成できることが分かる。このような応力場を Melan の意味での静的許容な応力場と呼ぶ。

Melan の意味での静的許容な応力場が成立する十分条件は式 (5) である。本論文では、Melan の意味での静的許容な応力場を照査する時には、その十分条件である (5) を用いることにする。

静的許容な応力場が満たすべき条件式をまとめて再掲する。

$$f_i(\mathbf{Q}_J) + s_{iJ} = 0, \quad s_{iJ} \geq 0, \quad \forall i \in V, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}_J = \alpha \mathbf{Q}_{0J}^E + \mathbf{Q}^r \quad (8)$$

$$\mathbf{B}'^T \mathbf{Q}^r = 0 \quad (9)$$

ここに $s_{iJ} \geq 0$ は制約条件を等式に書き換えるために導入した非負のスラック変数である。

2.4 提案する Lagrangian L_d

文献⁸⁾ではシェイクダウン解析法について以下の Lagrangian L_s を提案している。

$$L_s = \begin{cases} \alpha + \kappa \cdot (\mathbf{B}'^T \mathbf{Q}^r - 0) \\ \quad - \sum_J \sum_i \lambda_{iJ} (f_i(\mathbf{Q}_J) + s_{iJ}) \\ \quad + \sum_J \mu_J \cdot (\mathbf{Q}_J - \alpha \mathbf{Q}_{0J}^E - \mathbf{Q}^r) \\ \quad + \sum_J \sum_i s_{iJ} t_{iJ} \quad \text{for } t_{iJ} \geq 0 \\ \quad + \infty \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

ここにベクトル κ , μ_J はそれぞれ残留応力場の条件、応力の分解表現に対応した Lagrange 乗数、テンソル λ_{iJ} , t_{iJ} はそれぞれ降伏条件、スラック変数の非負性に対応した Lagrange 乗数である。

これに対して永久変形量の評価法では以下の La-

* シェイクダウン定理では弾性挙動は線形であることが本質的に要求されるので、厳密には線形弾性挙動。

grangian L_d を提案する。

$$L_d = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{Q}^r \cdot \mathbf{G} \mathbf{Q}^r + \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{B}'^T \mathbf{Q}^r - \mathbf{0}) \\ \quad - \sum_J \sum_i \lambda_{iJ} (f_i(\mathbf{Q}_J) + s_{iJ}) \\ \quad + \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot (\mathbf{Q}_J - \alpha_d \mathbf{Q}_{0J}^E - \mathbf{Q}^r) \\ \quad + \sum_J \sum_i s_{iJ} t_{iJ} \quad \text{for } t_{iJ} \geq 0 \\ + \infty \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

ここにテンソル $\mathbf{G}$ は線形弾性コンプライアンス、スカラー α_d は与えられた荷重係数である。テンソル $\mathbf{G}$ は領域積分 $\int_V dV$ を考慮したテンソルであり、その成分には、数値積分の意味でヤコビアンと重みの効果が含まれていることに注意する。

3. 永久変形量評価法の導出

ここでは Lagrange 双対理論を用いて、提案した Lagrangian L_d より永久変形量評価法の静力学的な解析法と運動学的な解析法を導出する。さらに、これら2つの方法には双対性があることを示す。

3.1 静力学的な解析法

Lagrangian L_d の変数 $\boldsymbol{\kappa}$, λ_{iJ} , $\boldsymbol{\mu}_J$, t_{iJ} に関する下限をとれば、以下の通りである。

$$\inf \{L_d | \boldsymbol{\kappa}, \lambda_{iJ}, \boldsymbol{\mu}_J, t_{iJ}\} = -\frac{1}{2} \mathbf{Q}^r \cdot \mathbf{G} \mathbf{Q}^r$$

$$\text{Sub. } \begin{cases} f_i(\mathbf{Q}_J) + s_{iJ} = 0, s_{iJ} \geq 0, \forall i \in V, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \\ \mathbf{B}'^T \mathbf{Q}^r = \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_J = \alpha_d \mathbf{Q}_{0J}^E + \mathbf{Q}^r \end{cases} \quad (12)$$

式(12)では、制約条件として Melan の意味での静的許容な応力場、目的関数として残留応力場による線形弾性補ひずみエネルギーに (-1) を乗じた物理量が導出されていることが分かる。この (-1) は形式的に最小化と最大化を入れ換えるために導入したことに注意する。

次に、この式(12)に対して、残りの変数 $\mathbf{Q}^r$, $\mathbf{Q}_J$, s_{iJ} に関する上限をとる。そうすると以下の最大化問題を得る。

$$\sup \{ \inf \{L_d | \boldsymbol{\kappa}, \lambda_{iJ}, \boldsymbol{\mu}_J, t_{iJ}\} | \mathbf{Q}_J, \mathbf{Q}^r, s_{iJ} \}$$

$$= \sup \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{Q}^r \cdot \mathbf{G} \mathbf{Q}^r | \mathbf{Q}_J, \mathbf{Q}^r, s_{iJ} \right\}$$

$$\text{Sub. } \begin{cases} f_i(\mathbf{Q}_J) + s_{iJ} = 0, s_{iJ} \geq 0, \forall i \in V, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \\ \mathbf{B}'^T \mathbf{Q}^r = \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_J = \alpha_d \mathbf{Q}_{0J}^E + \mathbf{Q}^r \end{cases} \quad (13)$$

ここで、先ほど議論した (-1) を考慮すると、式(13)の最適化問題の物理的意味は、Melan の意味での静的許容な応力場のもとで、時間によらない残留応力場 $\mathbf{Q}^r$ による線形弾性補ひずみエネルギーの最小化であることが分かる。

3.2 運動学的な解析法

次に Lagrangian L_d の上限と下限をとる操作の順序を入れ換えてみよう。すなわち、まず変数 $\mathbf{Q}^r$, $\mathbf{Q}_J$, s_{iJ} に関する上限をとり、その後、残りの変数について下限をとる。

(1) 静力学的変数による上限操作

最初に、Lagrangian L_d の変数 $\mathbf{Q}^r$, s_{iJ} に関する上限を考える。そうすると制約条件として次の関係式を得る。

$$\mathbf{B}' \boldsymbol{\kappa} = \sum_J \boldsymbol{\mu}_J + \mathbf{G} \mathbf{Q}^r \quad (14)$$

$$\lambda_{iJ} = t_{iJ} \geq 0 \quad (15)$$

これから変数 $\mathbf{Q}^r$ は陽な形で

$$\mathbf{Q}^r = \mathbf{G}^{-1} \left(\mathbf{B}' \boldsymbol{\kappa} - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \right) \quad (16)$$

と解ける。これをもとの L_d に代入すると、Lagrangian L_d の変数 $\mathbf{Q}^r$, s_{iJ} の上限は

$$\sup \{L_d | \mathbf{Q}^r, s_{iJ}\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}' \boldsymbol{\kappa} - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \right) \cdot \mathbf{G}^{-1} \left(\mathbf{B}' \boldsymbol{\kappa} - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \right)$$

$$- \sum_J \sum_i \lambda_{iJ} f_i(\mathbf{Q}_J) + \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot (\mathbf{Q}_J - \alpha_d \mathbf{Q}_{0J}^E)$$

$$\text{Sub. } \lambda_{iJ} = t_{iJ} \geq 0 \quad (17)$$

と表せる。

一方、変数 $\mathbf{Q}_J$ に関する上限は陽な形では表せないので、以下の関数 $D_s(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$ を導入しておく。

$$D_d(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ}) =$$

$$\sup \left\{ \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot \mathbf{Q}_J - \sum_J \sum_i \lambda_{iJ} f_i(\mathbf{Q}_J) \mid \mathbf{Q}_J \right\} \quad (18)$$

そうすると、Lagrangian L_d の変数 $\mathbf{Q}^r$, $\mathbf{Q}_J$, s_{iJ} に関する上限は以下のように表せる。

$$\sup \{L_d | \mathbf{Q}^r, s_{iJ}, \mathbf{Q}_J\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}' \boldsymbol{\kappa} - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \right) \cdot \mathbf{G}^{-1} \left(\mathbf{B}' \boldsymbol{\kappa} - \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \right)$$

$$+ D_d(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ}) - \alpha_d \sum_J \boldsymbol{\mu}_J \cdot \mathbf{Q}_{0J}^E$$

$$\text{Sub. } \lambda_{iJ} = t_{iJ} \geq 0 \quad (19)$$

(2) 流れ則

さて、関数 $D_d(\boldsymbol{\mu}_J, \lambda_{iJ})$ における上限操作と等価な制約条件について考えよう。降伏関数 $f_i(\mathbf{Q})$ の微分可能性を仮定すれば、上限操作は以下の停留条件と等価である。

$$\boldsymbol{\mu}_J = \sum_i \lambda_{iJ} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{Q}} \bigg|_{\mathbf{Q}_J} \quad (20)$$

式 (20) と式 (19) の制約条件に含まれる Lagrange 乗数 λ_{iJ} の非負性を考慮すれば、これは関連流れ則に他ならない。また、変数 μ_J は塑性ひずみを意味することも分かる。なお、ここでは降伏関数の微分可能性を仮定したが、降伏関数が微分不可能でも区分的連続であれば、劣微分によって同様に関連流れ則が導けることを指摘しておく。これらの結果から、関数 D_d が陰な形で関連流れ則という制約条件を含んでいることに注意する。

(3) 変形の適合条件

さらに、ここで式 (14) の意味についても考えておこう。この制約条件は、運動学的に許容なひずみ場を表している。つまり Lagrange 乗数 κ は 1 周期あたりの節点変位増分を表しており、左辺の $B'\kappa$ は 1 周期あたりのひずみ増分に他ならない。右辺第 1 項の μ_J は荷重領域 $\alpha_d \bar{\Gamma}$ の各頂点 J に対応した塑性ひずみ増分であり、総和 $\sum_J$ によって 1 周期あたりの塑性ひずみ増分を表している。また、右辺第 2 項の GQ^r は残留応力場による線形弾性ひずみを表している**。

ここで 1 周期あたりの時間積分が総和に置き換わるのは、外力の離散的表現によって、時間域の荷重履歴が時間に依らない基底荷重 Γ_{0J} の線形和として表現されているためである。よって塑性ひずみ μ_J には、すでに時間積分の効果が陰な形で入っているとも言える。さらに、テンソル B'^T が空間的な数値積分によるヤコビアンと重みの影響を考慮しているため、塑性ひずみ μ_J には空間的な数値積分によるヤコビアンと重みの影響も含まれていることに注意する。

また Koiter が導入した「許容な塑性ひずみ速度サイクル」¹⁰⁾ と、この運動学的に許容なひずみ場の相違点は、残留応力場による線形弾性ひずみの有無にある。Koiter の塑性ひずみ速度サイクルは、シェイクダウン限界時、まさに塑性安定が保てなくなるような状態の塑性ひずみ速度を念頭に置いており、もはや系の不静定性による有効な応力場の自由度を使い果たして、これ以上大きな荷重係数に対応した時間によらない残留応力場の更新が不可能となる特殊な状態、に対応している。これに対して、式 (14) は繰返し荷重により発生した塑性ひずみ $\sum_J \mu_J$ と、弾性応答に落ち着いたときに現われた残留応力場 Q^r による線形弾性ひずみとの和が、変形の適合条件（変位～ひずみ関係）を満たすことを表している。

(4) 運動学的な解析法

これまでの議論から、運動学的な解析法は、式 (19) で表された上限を変数 $\kappa, \lambda_{iJ} \geq 0, \mu_J$ について下限を

とすることで表現されることが分かる。

$$\begin{aligned} & \inf \{ \sup \{ L_d | Q^r, s_{iJ}, Q_J \} | \kappa, \lambda_{iJ}, \mu \} \\ & = \frac{1}{2} \left(B'\kappa - \sum_J \mu_J \right) \cdot G^{-1} \left(B'\kappa - \sum_J \mu_J \right) \\ & \quad + D_d(\mu_J, \lambda_{iJ}) - \alpha_d \sum_J \mu_J \cdot Q_{0J}^E \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{Sub. } \lambda_{iJ} = t_{iJ} \geq 0$$

つまり、目的関数として第 1 項のひずみ場 $B'\kappa - \sum_J \mu_J$ による線形弾性ひずみエネルギーと第 2 項の 1 周期あたりの内部消散との和から、第 3 項の 1 周期あたりの外部塑性仕事 $W_{ext} = \alpha_d W_{ext0}$ を引いたものを用い、運動学的かつ許容な速度場に対して最小化を図る最適化問題である。

この最小化問題 (21) によって、どのような停留条件が導出されるのかを具体的に見てみよう。つまり、変数 $\kappa, \lambda_{iJ}, \mu_J$ に関する下限をとり、要請される制約条件を調べる。

まず、関数 $D_d(\mu_J, \lambda_{iJ})$ について、非負変数 λ_{iJ} に関する下限操作を考えると、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & \inf \{ D_d(\mu_J, \lambda_{iJ}) | \lambda_{iJ} \geq 0 \} \\ & = \begin{cases} \bar{D}_d(\mu_J) & \text{if } f_i(Q_J) \leq 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

ここに関数 $\bar{D}_d(\mu_J)$ は

$$\begin{aligned} \bar{D}_d(\mu_J) & = \sup \left\{ \sum_J \mu_J \cdot Q_J \mid \forall Q_J \right\} \\ & \text{where } Q_J \text{ such that } f_i(Q_J) \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

である。したがって、下限が有界であるためには、応力 Q_J が降伏関数を破らないことが要請される。また、式 (23) の物理的な意味は、1 周期あたりの内部消散 W_{int} を表す。

ついで、変数 κ についても式 (19) の下限をとると以下の制約条件を得る。

$$B'^T G^{-1} \left(B'\kappa - \sum_J \mu_J \right) = 0 \quad (24)$$

ここで式 (14) の制約条件を利用すれば、式 (24) は残留応力場の釣合式

$$B'^T Q^r = 0 \quad (25)$$

に他ならないことが分かる。さらに式 (24) より、変数 κ は陽に解けて、以下のように表せる。

$$\kappa = H^{-1} B'^T G^{-1} \sum_J \mu_J \quad (26)$$

ここにテンソル H は正定値対称行列で

$$H = H^T = B'^T G^{-1} B' \quad (27)$$

である。

** ただし厳密に言えば、この段階では Q^r がゼロ外力に釣合う保証はないので、残留応力場という表現は正しくない。 Q^r がゼロ外力に釣合うことは、残りの変数に関する下限をとる過程で満足されることに注意する。

これらの結果を考慮すると、最終的に Lagrangian L_d の inf-sup 操作は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} & \inf \{ \sup \{ L_d | Q^r, s_{iJ}, Q_J \} | \kappa, \lambda_{iJ}, \mu_J \} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{2} \left(K \sum_J \mu_J \right) \cdot G^{-1} \left(K \sum_J \mu_J \right) \right. \\ & \quad \left. + \bar{D}_d(\mu_J) - \alpha_d \sum_J \mu_J \cdot Q_{0J}^E \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

ここにテンソル K は

$$K = (B' H^{-1} B'^T) G^{-1} - 1 \quad (29)$$

である。また 1 は単位テンソルである。

式 (28) の最適化問題は非制約に見えるが、関数 D_d , $\bar{D}_d$ の定義から分かるように、関連流れ則に従う塑性ひずみ場であることが陰な形で要請されていることに注意する。さらに、下限操作と等価な停留条件は

$$\begin{aligned} 0 &= Q_J - \alpha_d Q_{0J}^E + K^T G^{-1} K \sum_J \mu_J \\ &= Q_J - \alpha_d Q_{0J}^E - Q^r \end{aligned} \quad (30)$$

となる。これは応力 Q_J が釣合系の応力であることを意味する。

したがって、具体的に最小化問題 (21) を解けば、最適解では Melan の意味で静的許容な応力場が得られることが分かる。

3.3 双対ギャップと相補性条件

さて、これまで議論してきた永久変形量評価法は制約条件に凸な非線形関数を含む 2 次計画問題であるので、凸計画問題の一種である。

また提案した Lagrangian L_d の上限・下限操作の順序を入れ換えることで、静力学的な解析法と運動学的な解析法が導出できたので、これらの方法は互いに双対性を有する。

ここで、運動学的な解析法の目的関数値と静力学的な解析法の目的関数値の差、すなわち双対ギャップを考えよう。関数 D_d の定義に注意して具体的に求めると以下の不等式を得る。変数 λ_{iJ} , s_{iJ} の非負性と、弾性コンプライアンステンソル G の正定値対称性を考慮

すると、双対ギャップは常に非負であることが分かる。

Duality gap

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (B' \tilde{\kappa} - \sum_J \mu_J) \cdot G^{-1} (B' \tilde{\kappa} - \sum_J \mu_J) \\ & \quad + D_d(\tilde{\mu}_J, \tilde{\lambda}_{iJ}) - \alpha_d \sum_J \tilde{\mu}_J \cdot Q_{0J}^E \\ & \quad + \frac{1}{2} Q^{r0} \cdot G Q^{r0} \\ &\geq \sum_J \sum_i \tilde{\lambda}_{iJ} s_{iJ}^0 \\ & \quad + \frac{1}{2} \tilde{Q}^r \cdot G \tilde{Q}^r + \frac{1}{2} Q^{r0} \cdot G Q^{r0} - \tilde{Q}^r \cdot G Q^{r0} \\ &= \sum_J \sum_i \tilde{\lambda}_{iJ} s_{iJ}^0 \\ & \quad + \frac{1}{2} (\tilde{Q}^r - Q^{r0}) \cdot G (\tilde{Q}^r - Q^{r0}) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

ここに、記号 $\tilde{\cdot}$ は運動学的解析法の制約条件を満足する物理量、上添字 0 は静力学的解析法の制約条件を満足する物理量である。

さらに双対定理によると、双対ギャップがゼロとなるのは解が正解のときに限る。したがって、正解（上添字 $*$ で表す）のときには、以下の相補性条件が成立する。

$$\lambda_{iJ}^* s_{iJ}^* = 0, \quad \forall i \in V, J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (32)$$

また、運動学的方法で間接的に用いている式 (16) の応力場 $\tilde{Q}^r$ も、釣合系の残留応力場となることが分かる。

相補性条件 (32) の物理的な意味は、領域内の積分点 $i \in V$ が荷重 $\alpha_d \Gamma_0$ を受けたときの材料の状態を表しており、塑性乗数 λ_{iJ} がゼロの場合は弾性挙動、スラック変数 s_{iJ} がゼロの場合には塑性挙動、双方がゼロの場合には中立挙動であると判定できる。

4. ディスカッション

4.1 主双対内点法の応用

前節の議論より、最適化問題 (13) あるいは (28) を解くことにより、得られる最適解は以下の性質を満たすことが示された。

$$f_i(Q_J) + s_{iJ} = 0, \quad s_{iJ} \geq 0, \quad \forall i, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (33)$$

$$B'^T Q^r = 0 \quad (34)$$

$$Q_J = \alpha_d Q_{0J}^E + Q^r, \quad \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (35)$$

$$B' \kappa = \sum_J \mu_J + G Q^r \quad (36)$$

$$\mu_J = \sum_i \lambda_{iJ} \frac{\partial f_i}{\partial Q} \bigg|_{Q_J}, \quad \lambda_{iJ} \geq 0, \quad \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (37)$$

$$\lambda_{iJ} s_{iJ} = 0, \quad \forall i \in V, \forall J \in \bar{\Gamma}_0 \quad (38)$$

具体的にこれらの方程式を解く方法として、主双対内点法を用いたアルゴリズムが考えられる。このアルゴリズムを大まかに言えば、混合型シェイクダウン解

析法⁸⁾と同様に、バリアパラメータとして正の単調減少列 ε を導入し、繰返し計算により制約条件を満たしながら双対ギャップをゼロに収束させる方法である。ここでは、具体的な定式化は行わないが、混合型シェイクダウン解析法の定式化との類似性から推測すると、主問題あるいは双対問題のみを解くよりも、主双対両方を同時に解く主双対内点法のアルゴリズムの方が、解くべき方程式をうまく集約でき、結果として計算の高速化に寄与すると思われる。

4.2 提案手法の工学的な意味

著者が提案した混合型の剛塑性解析法⁷⁾やシェイクダウン解析法⁸⁾では、荷重係数 α や速度場 $\mathbf{v}$ の一意性は確保できるが、残留応力場 $\mathbf{Q}^*$ については十分条件を求めているに過ぎない。つまり、塑性変形域での応力場についてはともかく、それ以外の場所の応力場は静的許容な応力場の一つを求めているだけである。したがって、その応力場が真の解である保証はない。しかし今回提案した手法は、領域すべてで変形の適合条件式を満足しており、求められた残留応力場 $\mathbf{Q}^*$ は真の残留応力場である。

また Lagrange 双対理論を利用した双対性の検討を行い、主問題・双対問題の両方を定式化している。この定式化を利用して、主双対内点法による混合型のアルゴリズムを考えれば、混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズム同様に、簡潔でしかも未知量を大幅に減らせるアルゴリズムの開発が可能になるとと思われる。これは、繰返し荷重による永久変形量予測を行う計算量が、単調荷重による永久変形量予測と同じオーダーに抑えられることを示唆しており、提案手法の最も大きな利点ではないかと思われる。なお、具体的な定式化については今後の課題である。

特殊な例として一方向荷重 $J_{\max} = 1$ を考えると、本論文の永久変形量評価法は弾塑性解析法の時間積分アルゴリズムと見ることもできる。通常は増分形の弾塑性解析法を利用するため、時間域に細かいステップに分け、それぞれのステップで逐次非線形増分計算を行い、それらを時間域に和をとって（積分して）解を求める。これに対して、本方法では、一度に大きな時間ステップを解ける利点がある。さらに、凸計画問題であるため、数値計算が安定していることも特徴である。提案した方法が、弾塑性計算の時間積分アルゴリズムとして使用に耐え得るかどうかはともかく、数値解析法の別解として、計算法の理論的なチェックなどへの応用が可能であろう。

また、実際の限界状態設計法を念頭におけば、少なくとも以下の2つの限界状態に対する検討が必要となる。すなわち

終局 / シェイクダウン 限界状態： 想定した荷重 / 荷重領域に対して系の塑性安定性が損なわれるような限界状態

使用限界状態： 構造物がその機能を保持し、供用可能であるような限界状態。変形量で規定されることが多い。

前者については、極限解析法やシェイクダウン解析法によって評価が可能である。一方、後者については、本

論文で提案した手法の応用が期待できる。

さらに、本論文で提案した手法は直接法の特徴、すなわち

- 事前に繰返し荷重の時刻歴の詳細を知ることは難しいが、荷重領域に関する情報があれば、解析が可能である。
- 時間域での解析を回避することによって、計算コストと計算時間の短縮が図れること。

を有した方法である。また、本質的に凸計画問題であるために、数値計算の安定性についても有利であると思われる。

5. おわりに

本論文では、直接法による永久変形量の評価法について、主に数理的な視点から検討を加えた。まず、永久変形量を評価する静力学的な方法として、Melanの意味で静的許容な応力場を構成する残留応力場のうち、補ひずみエネルギーを最小化する方法を提案した。また、この静力学的な方法に基づいて Lagrangian L_s を提案した。

提案した Lagrangian L_d を基に、Lagrange 双対理論により、双対性を有する運動学的な解析法や導出した。また双対ギャップから相補性条件を導き、その物理的な意味づけについてもコメントを加えた。

導出した永久変形量評価法の静力学的解析法と運動学的解析法を同時に解く方法としては、主双対内点法に基づくアルゴリズムが有望である。具体的なアルゴリズムの定式化は将来の課題であるが、その理論的構造は著者による混合型のシェイクダウン解析法のアルゴリズムと類似しており、計算量を極限解析法と同様のオーダーに縮小できる可能性がある。これは数値計算を行う上で大きなメリットになると考えられる。

単調荷重を対象として提案方法を適用した場合、本論文で提案した手法は弾完全塑性材料に対する弾塑性解析の時間積分アルゴリズムとして捉えることも可能である。この方法は凸計画問題であるので、数値計算としては安定で、しかも通常的时间域での増分形の弾塑性計算よりも大きな時間ステップを一度に解ける利点がある。実際の弾塑性解析法に本手法を適用するかどうかは別として、計算法の理論的なチェックなどにも応用できるとと思われる。

直接法は限界状態設計法の概念にうまく応用できる解析法である。極限解析法やシェイクダウン解析法による荷重係数の評価は、とりも直さず終局限界状態を評価する方法である。同じように、変位・変形で規定される使用限界状態についても、提案手法のような永久変形量を評価する方法を用いることによって、時間域での増分形の弾塑性計算法によらず変形量を評価できる。設計においては、設計対象とする繰返し荷重の時間域履歴を事前に決めることは必ずしも容易なことではない。この点で、シェイクダウン解析のように、ある荷重領域に対して系の塑性安定性や永久変形量の評価を行う方法は優れており、その応用が期待できる。

謝辞

本研究の一部は平成 15 年度 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 15760360 (研究代表者: 小林俊一) の補助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Ponter, A.R.S.: General displacement and work bounds for dynamically loaded bodies, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 151–163, 1975.
- 2) Corradi, L.: Mathematical programming methods for displacement bounds in elasto-plastic dynamics, *Nuclear Engineering and Design*, Vol 37, pp. 161–177, 1976.
- 3) Capurso, M.: Some upper bound principles for plastic strains in dynamic shakedown of elastoplastic structures, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 7, pp. 1–20, 1979.
- 4) König, J.: *Shakedown of elastic-plastic structures*, Elsevier, 1987.
- 5) Weichert, D. and Maier, G. (eds.): *Inelastic behaviour of structures under variable repeated loads*, Springer-Verlag, 2002.
- 6) Hodge, P.G.: A deformation bounding theorem for flow-law plasticity, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 24, pp. 171–174, 1966.
- 7) 小林俊一: 主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発, 応用力学論文集, 土木学会 Vol. 6, pp. 95–106, 2003.
- 8) 小林俊一・西川雅規・田村 武: 混合型シェイクダウン解析法のアルゴリズムに関する研究, 応用力学論文集, 土木学会 Vol. 7, 2004.
- 9) Melan, E.: Theorie statisch unbestimmter systeme aus ideal-plastischem baustoff, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss., Wien, Abt. 2A* 145, 195–218, 1936.
- 10) Koiter, W.T.: General theorems for elastic-plastic solids, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 1, Eds Snedden, J.N. and Hill, R., North-Holland, 165–221, 1960.

(2004 年 4 月 16 日 受付)