

複合材料の平均的初期降伏関数の陽な近似表現

An explicit but approximate expression of an averaged yield function of composite materials

湯本健寛*・岩熊哲夫**

Takahiro YUMOTO and Tetsuo IWAKUMA

*正会員 修(工) 株式会社 間組 大阪支店 (〒541-0048 大阪府大阪市中央区瓦町 4-4-8)

**正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

For the purpose of establishing a form of average yield functions of multi-phase composites, an analytical solution for heterogeneous bodies with ellipsoidal inhomogeneities is utilized within a framework of small deformation. The results confirm that an axis of no yielding exists in stress space for a composite with aligned inclusions under a special loading condition. However, under arbitrary loadings, the same material have a closed yield surface, and an explicit yield function is derived. When many different inclusions are embedded, the yield function has several corners and is closed even in the hydrostatic pressure direction.

Key Words : composites, average behavior, yield function, analytical estimate, three dimensional estimate

1. はじめに

橋構造の設計自由度を増やすことや超長大橋の建設等のために、繊維補強等を用いた複合材料の利用が期待されている。特に近年の著名な構造には、鋼繊維を超高強度高流動コンクリートに混入した上で無筋で使用した歩道橋¹⁾等がある。またそのような動きに則して最近、土木学会でも FRP 橋梁の技術と展望に関する出版物²⁾も刊行された。もちろん、適材適所の観点からその利用の可能性は非常に高いが、限界状態設計法を念頭に置いた場合に必要とされる降伏条件等の評価については、この展望²⁾においても、例えば Hill の異方的降伏モデル程度しか紹介されておらず、多くの実測・実験が現状では必要とされている。もしそのような材料開発において、繊維の混入率や向きが降伏応力に及ぼす影響を簡便に予測する手法があれば、実験量が減り、より適した材料を効率的に開発できるようになる。実際に電子部品等の設計ではある種の解析的手法が用いられ、効率化を図った実例もある。

複合材料が持っている内部の微視的な構造を反映した上で巨視的挙動を解析する有力な方法は均質化法であろう。この方法は有限要素法と組み合わせ用いられることが多く、実際の微視構造を忠実に反映したモデル解析が可能になっている。著者らもこの手法を用い、例えば巨視的な初期降伏曲面を求めた例³⁾もあるが、巨視的な複合材料としての降伏を、例えば材料中の一箇所が降伏した時点で定義するのか、それとも巨視的挙動において 0.2% オフセット強度のようなもので定義するのか、といった降伏の定義そのものに困難がある。そこで得られた³⁾降伏曲面も、離散的に得られたものを二次曲面近

似したもので、例えば角点の発生等については考察できなかった。また、実際の材料設計過程では、微視構造を変更するには有限要素メッシュの変更が必要であり、また、そのメッシュパターンの選択が巨視的挙動に及ぼす影響も少なくないと予想される。すなわち、あくまでも数値解析的手法であることから、具体的な材料開発そのものには不向きであろう。もちろん、ある程度の材料設計ができた段階で、その終局強度を模擬する場合には非常に有力なツールになる。

このように考えてくると、材料設計・開発においては何らかの解析的な手法が便利だろう。最終的に均質化法や実験で材料特性を確認するのであれば、ある程度の近似度で容易にパラメータの影響を考慮できればよいからである。解析的手法は、古典的には混合体理論から始まっていると思われるが、近年は、Hashin-Shtrikman の上下解⁴⁾挙動の予測や、Hill 等の各種 self-consistent 法⁵⁾等がある。また、より簡便な方法として森・田中理論⁶⁾を用いた平均化手法もあり、これは、介在物が球形の場合には Hashin-Shtrikman の上下界と同じ解を与える。いずれも初期の混合体理論とは異なり、微視的構造の形状や向きを考慮できる。さらに近年には、森・田中理論を用いた手法を改善した高次近似理論⁷⁾も提案されてきている。

こういった手法を弾塑性体に適用した研究も少ないが、ほとんどは 2 相複合材料を対象としており、複数種類の材料が含まれる多相複合材料を対象としたもの⁸⁾は少ない。また降伏曲面そのものの関数形に着目した研究(例えば文献⁹⁾等)も少ないのが現状である。また弾塑性の場合の塑性ひずみの扱いに対して近似的な手法を用いることが多い。例えば文献¹⁰⁾では Hill

の接線係数的な考え¹¹⁾に基づいているが、Tandon と Weng¹²⁾は全応力・全ひずみ関係の割線係数を用いて塑性の非適合成分の近似算定をしている。そのため、実測値に近い解を得ることもあるが、理論的根拠は若干乏しい。基本に立ち戻って、厳密な増分理論の枠組みの中での定式化がなされた場合には、得られる剛性が高く¹²⁾なっている。

ここでは、複合材料をひとつの異方的な連続体として取り扱って数値シミュレーションする際に使える降伏関数の陽な表現を、解析的な複合材料平均化手法を用いて求める。したがって、より基礎的な研究であることから、平均化以外の近似を導入しないために、オリジナルの森・田中理論を用いて平均化された増分理論をそのまま定式化に用いる。これは、多相複合材料について解析できるように拡張した同様のモデル¹³⁾をさらに3次元に拡張し、複合材料の巨視的降伏曲面の表現を検討するものである。

2. 巨視的弾塑性係数と応力集中係数

2.1 平均量同士の関係

定式化は文献¹²⁾にあるもので Tandon と Weng が用いなかった方の基本的な定式化と同じで、以前に著者ら^{13),14)}が2次元問題を例として示した定式化の詳細とも重複するので、ここでは用いる結果だけを列挙する。複合材料に作用している巨視的応力増分を $\dot{\sigma}$ と記した場合、母材中に生じる平均応力増分 $\dot{\sigma}_M$ と介在物内に生じる平均応力増分 $\dot{\sigma}_i$ および巨視的ひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ は

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\sigma} + \sum_i (D_i \dot{\epsilon}_M^p) - \sum_i (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i = B_i \dot{\sigma} + \left\{ L_i \sum_i (D_i) - M_i \right\} \dot{\epsilon}_M^p \\ + M_i \dot{\epsilon}_i^p - L_i \sum_i (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} = \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} + \left\{ I + N \sum_i (D_i) - \sum_i (P_i) \right\} \dot{\epsilon}_M^p \\ + \sum_i \{ (P_i - N D_i) \dot{\epsilon}_i^p \} \end{aligned} \quad (1c)$$

のように、巨視的応力増分 $\dot{\sigma}$ との関係で表すことができる。ここに、 $\dot{\epsilon}_M^p$ 、 $\dot{\epsilon}_i^p$ は各相の塑性ひずみ増分である。ここでは初期降伏のみに注目するので、塑性ひずみや増分定式化は不要であるが、そうになると基礎式が弾性と同じになってしまい、論文の主題との違和感を残してしまう恐れがある。また、ここでの定式化は Weng らの近似モデルとは異なり、また Hill の接線理論とも異なることから、その位置付けを式で表現するためにも、このような増分形式の塑性ひずみを含んだ基礎式を列挙した。A

や B_i , C_i , D_i , L_i , N , M_i , P_i は4階のテンソルで

$$\begin{aligned} \bar{C}^{-1} &= \left(I + \sum_i \left[f_i S_i \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (C_M - C_i) \right] \right) \left(C_M + \sum_i \left[f_i C_M (S_i - I) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} (C_M - C_i) \right] \right)^{-1} \\ A &= \left(I + \sum_i \left[f_i C_M (S_i - I) \{ C_M - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (C_M - C_i) S_i \}^{-1} (C_M - C_i) C_M^{-1} \right] \right)^{-1} \\ B_i &= \left[I + C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_i) C_M^{-1} \right] A \\ D_i &= A \left[f_i C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \right] \\ L_i &= \left[I + C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_i) C_M^{-1} \right] \\ M_i &= C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \\ N &= \left(I + \sum_i \left[f_i S_i \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (C_M - C_i) \right] \right) C_M^{-1} \\ P_i &= f_i S_i \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \end{aligned}$$

と定義した。ここに C_M と C_i はそれぞれ、母材と介在物の弾性係数テンソルを表し、 I は4階の単位テンソルを表している。また f_i は介在物の体積比率で、 S_i は Eshelby のテンソル^{15),16)}と呼ばれ、母材のポアソン比と介在物の半径比や方向で決まる量である。 A と B_i はそれぞれ、巨視的な応力に対する各相の応力の比であり、応力集中係数と考えればよい。また $\bar{C}$ は複合材料の巨視的（平均）弾性係数テンソルであり、 $\bar{C}^{-1}$ は巨視的弾性コンプライアンスである。また巨視的塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^p$ は、その定義通りに式 (1c) から弾性部分を除いた

$$\dot{\epsilon}^p \equiv \dot{\epsilon} - \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} \quad (2)$$

で定義されるべきもので、各相の塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_M^p$, $\dot{\epsilon}_i^p$ の平均ではないことに注意する。

2.2 例としての降伏条件

ここでは、各相の降伏曲面を滑らかな凸曲面とした場合であっても、複合材料全体としての降伏曲面に角が生じるか否かについても考察したいので、例として選択する各相の降伏条件は、いずれも通常の von Mises の降伏条件に従うものとする。したがって降伏関数は

$$f_M = \sqrt{(J_2)_M} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_M^y \quad (3a)$$

$$f_i = \sqrt{(J_2)_i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i^y \quad (3b)$$

で与えられるものとする．ここに σ_M^y と σ_i^y はそれぞれ、母材と各介在物の単軸引張り初期降伏応力である．また相当応力は

$$\sqrt{(J_2)_M} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\sigma_M' : \sigma_M'}, \quad \sqrt{(J_2)_i} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\sigma_i' : \sigma_i'} \quad (4)$$

と定義した．ここに σ_M' と σ_i' はそれぞれ、母材と介在物中の応力の偏差成分である．なお、微小変形理論の初期降伏のみをここでは論じているので、式(1a) (1b)で算定される各相の平均応力増分の累積は、上付きドットをはずした量に等しい．したがって、複合材料の巨視的降伏は、その累積量のいずれかが、上式(3a) (3b)のいずれかで与えられる降伏条件を満足した状態として定義する．

3. 2相複合材料の巨視的初期降伏曲面

多相複合材料の巨視的初期降伏曲面を考えるにあたって、介在物の形状等が降伏曲面に及ぼす影響の基本的な特性をまず明らかにしておく必要がある．そのため、介在物の形状が楕円体である場合について、2相複合材料の巨視的初期降伏曲面の特性を最初に考察する．

対象とする複合材料の具体例としては、文献⁷⁾で取り扱われている SiC で補強した 2124Al を想定している．材料定数は、母材のヤング率を $E_M = 60$ GPa, ポアソン比を $\nu_M = 0.3$, 単軸引張初期降伏応力を $\sigma_M^y = 290$ MPa とする．また介在物の材料定数は、ヤング率を $E_i = 450$ GPa, ポアソン比を $\nu_i = 0.2$, 単軸引張初期降伏応力を $\sigma_i^y = 700$ MPa とした．ここでは介在物の体積比率 f を同文献で用いられている 13.2% に固定し、その形状の変化が複合材料の巨視的初期降伏曲面に及ぼす影響を考察する．介在物が 1 種類しかないので体積比率 f の添え字は省略した．特に断らない限り、本論文では上記の材料を対象とする．

3.1 実験との比較

この森・田中理論に基づき、母材の弾性係数を比較体の基準係数にした場合の初期降伏の予測精度を明らかにするために、まず実験との比較をする．例えば文献¹⁷⁾の材料を取り挙げ、Al 母材を球形シリコン介在物で補強したものを想定する．母材のヤング率とポアソン比はそれぞれ $E_M = 70$ GPa, $\nu_M = 0.2$ で、初期引張降伏応力 σ_M^y は 68.5 MPa である．また、介在物のヤング率とポアソン比はそれぞれ $E_i = 107$ GPa, $\nu_M = 0.3$ で、介在物は降伏しないものとし、体積比率 f は 9.7% と 19.5% の 2 種類である．ただし文献¹⁸⁾に図示したように、この実験値の降伏応力は、対象とした複合材料に軟鋼のような明確な降伏棚が存在しないために、いわゆる 0.2% オフセット耐力で与えられていることに注意する．

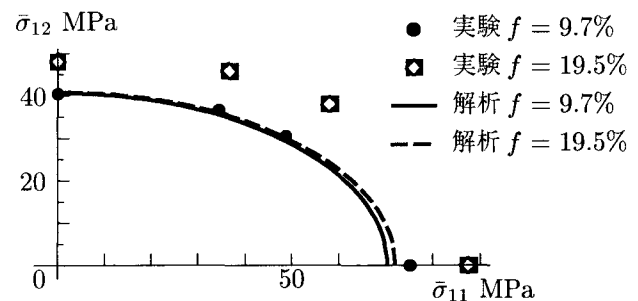


図-1 実験との比較（球形介在物で母材が降伏する場合）

図-1 には σ_{12} - σ_{11} 平面で、本手法で得られた降伏曲面と実測値を比較した．体積比率が $f = 9.7\%$ の場合の降伏曲面は実測と良く一致しているが、 $f = 19.5\%$ の場合にはかなり差がある．母材と介在物の弾性係数の差がそれ程大きくないために、本手法で求められる降伏曲面が、介在物の体積比率の変化にはそれ程影響されず、したがって両曲線は近い位置にある．そのため、体積比率が $f = 19.5\%$ の場合には、 σ_{11} の方向での相対誤差が 17.6% 程度になっている．ただ文献¹⁸⁾にも示したように、実測値が 0.2% オフセット耐力で算定されていることを踏まえて、硬化挙動を本手法によっても考慮すると、その予測値が実測値にかなり近づくことを示すことはできる．この論文ではそのような硬化挙動をシミュレーションしていないため、以後の図に現れる降伏状態は図-1 程度の精度であると考えて欲しい．

3.2 介在物の半径比の影響

最も基本的な場合として、巨視的には静水圧成分が無い場合を考える．楕円体介在物形状の 3 主軸方向に x_i 軸を置き、形状は $a_2/a_1 = 1$ の回転楕円体とし、半径比 $a_3/a_1 > 1$ の影響にまず着目する．材料定数のうち、介在物の降伏応力を無限大として母材が降伏するとしたときの巨視的降伏曲面を図-2 に示した．なお、以下の同様の図の軸上の目盛は $\sqrt{2J_2}$ MPa の値を示している．図中の最も内側に位置する細い一点鎖線は、介在物が存在しない母材のみの降伏曲面である．そのすぐ外側の細い破線は、介在物が球形である場合の曲面で、真円ではあるが、介在物の補強効果で母材そのものの降伏強度よりも若干強くなっている．

太い実線は介在物の半径比 a_3/a_1 が 2, 4, 8 の場合の曲面である．いずれも σ_3 軸方向に長軸を持ち、 x_3 方向に対して横等方性の巨視的降伏曲面である．半径比が大きくなるにつれて、 $-\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2$ 方向の純せん断（真横の破線）方向の強度は若干小さくなる．それに対し、 $-\dot{\sigma}_1 = -\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_3/2$ 方向の 3 軸引張り（ σ_3 軸の正）方向の強度は、半径比の増加に伴い大きくなる．

一方、母材の降伏応力を無限大とし、介在物が降伏する場合の同様の結果を示したのが図-3 である．図中の線の定義は図-2 と同様である．この場合も x_3 軸方向に

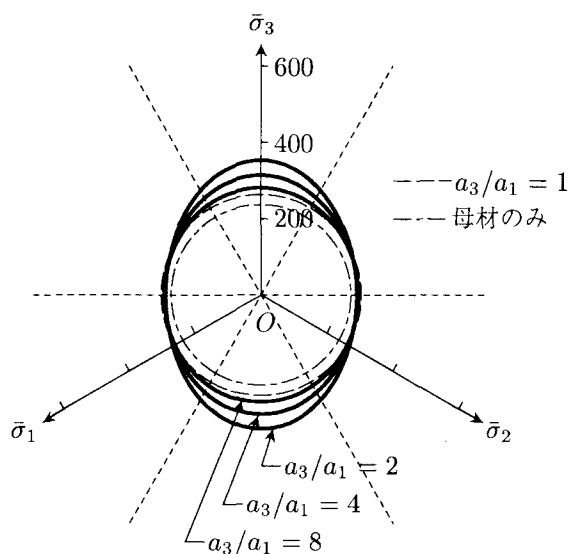


図-2 半径比の影響 ($a_3/a_1 > 1$, 母材降伏)

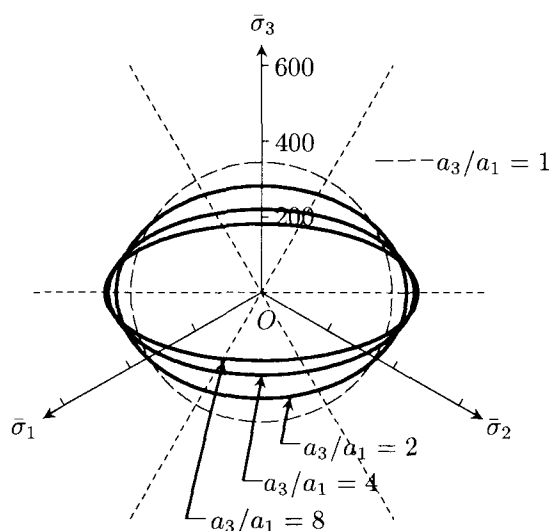


図-3 半径比の影響 ($a_3/a_1 > 1$, 介在物降伏)

対して横等方の挙動を示す。しかし、母材が降伏する場合とは逆に、介在物の半径比が大きくなるにつれて $\bar{\sigma}_3$ 軸方向の強度が下がるのに対し、 $-\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ の純せん断方向の強度が上がる。これは、母材と介在物の間の抵抗関係に作用・反作用的な特性があるためである。

複合材料に $-\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 1$ MPa の関係で純せん断を作用させた場合の、各相の応力を図-4 に示した。破線が母材の、実線が介在物の平均応力である。介在物は x_3 方向に細長いため、複合材料は平均的には横等方性の巨視的挙動を示す。そのため、 $-\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 1$ MPa のせん断に対して、母材中に σ_{M33} は生じないため、降伏曲面に影響を与えるのは σ_{M11} と σ_{M22} である。この2つの応力成分を図-4 で見ると、 a_3/a_1 が4程度までの領域では若干の変化があるが、それ以上の半径比では一定になっている。したがって、巨視的なせん断、 $-\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ に対する半径比による補強効果が小さい

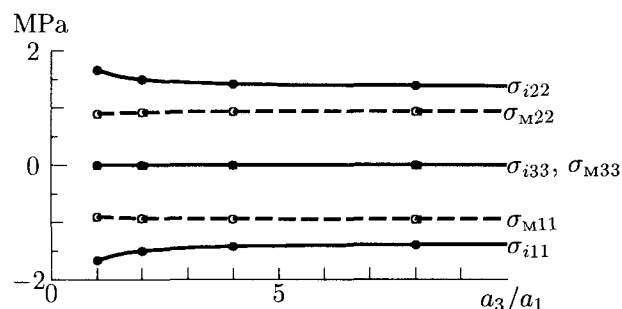


図-4 $-\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 1$ MPa の場合に生じる応力 ($a_3/a_1 > 1$)

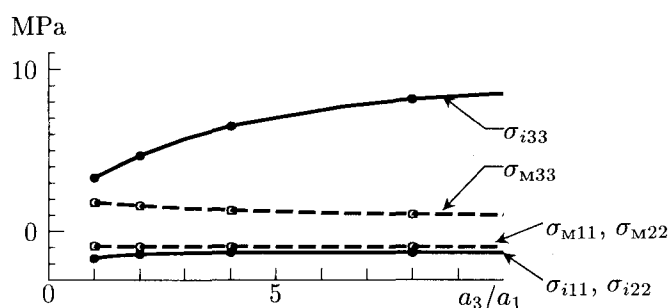


図-5 $-\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3/2 = 1$ MPa の場合に生じる応力 ($a_3/a_1 > 1$)

ために、図-2 のように純せん断方向には強度変化が小さい。介在物内でもほぼ同様の傾向を示している。

これに対し、巨視的に $-\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3/2 = 1$ MPa の3軸引張を作用させた場合の各相の応力は図-5 のようになる。巨視的にせん断を作用させた場合と同様、介在物の半径の増加に伴う母材部分の応力 σ_M と介在物内の応力 σ_i の増減はほぼ逆の関係にある。 x_3 方向の応力成分 σ_{M33} や σ_{i33} の変化は、 x_1 、 x_2 方向のそれと比較して大きい。つまり、 $-\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2$ の等2軸圧縮状態によって介在物内には $\sigma_{i33} > 0$ の引張り応力が発生するが、それと同時に、 $\bar{\sigma}_3$ を作用させても $\sigma_{i33} > 0$ が発生する。そのため、 $-\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3/2$ の3軸引張状態では、介在物の長軸方向にこの2つの応力増加が生じ、応力の11成分や22成分に比べて33成分の変化量が比較的大きくなっている。これによって介在物内の主応力差は大きくなるので、図-3 に示したような介在物が降伏する場合の降伏曲面は、図中の細い破線で示した球形介在物の場合と比較して $\bar{\sigma}_3$ 軸方向に半径がより小さくなる。逆に、介在物に応力集中が生じる反作用によって母材部分は応力が緩和されるので、図-2 のように、図中の細い破線で示した球形介在物の場合と比較して $\bar{\sigma}_3$ 軸方向に半径が大きくなっていると考えられる。

介在物が扁平 ($a_3/a_1 < 1$) な場合は、特性は逆ではあるが、その具体例は図-6 や図-7 のようになる。

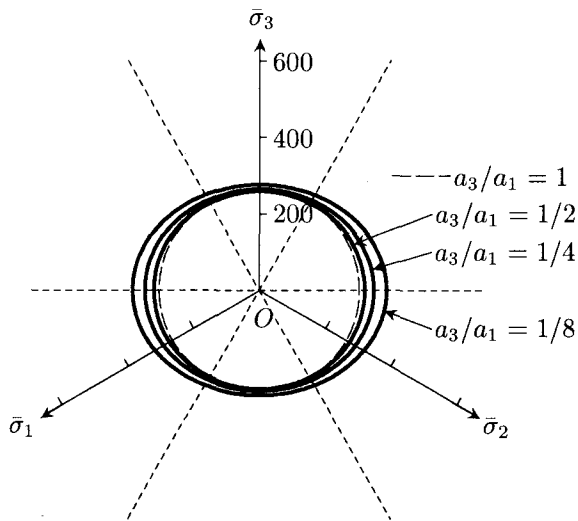


図-6 扁平な場合 ($0 < a_3/a_1 < 1$, 母材降伏)

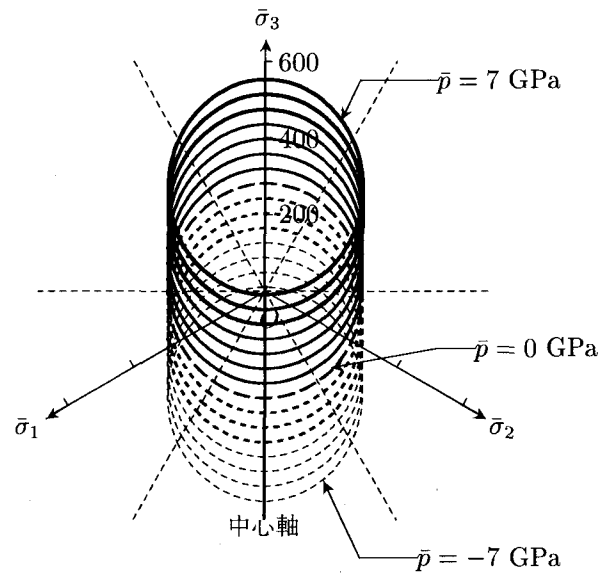


図-8 静水圧の影響 ($a_3/a_1 = 8$, 母材降伏)

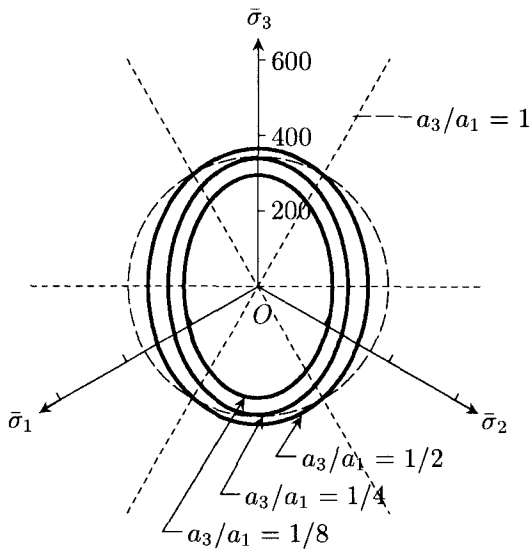


図-7 扁平な場合 ($0 < a_3/a_1 < 1$, 介在物降伏)

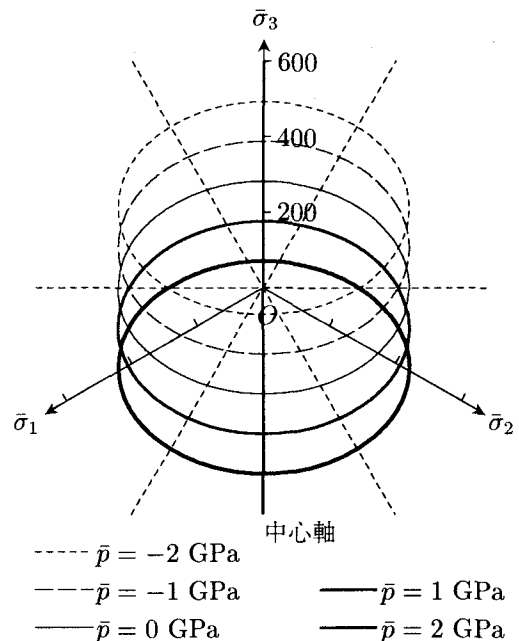


図-9 静水圧の影響 ($a_3/a_1 = 2$, 介在物降伏)

3.3 巨視的静水圧 $\bar{p}$ と巨視的降伏の関係

von Mises の降伏条件には静水圧成分による降伏は含まれていない。しかし複合化することによって、巨視的な静水圧は各相に降伏を発生させてしまう。ここでは、その影響を定量的に示す。まず母材が降伏する場合に、巨視的な降伏曲面を巨視的静水圧 $\bar{p}$ ($\equiv \bar{\sigma}_{kk}$) の等圧線で描き、それを π 平面上に投影したのが図-8 である。点線が $\bar{p} < 0$ の場合で、破線が $\bar{p} = 0$ GPa の場合、実線が $\bar{p} > 0$ の場合である。von Mises の降伏曲面であれば、 π 平面への投影等圧線はすべて一致するが、複合材料ではずれている。この等圧線の中心を結んだ線を同図には「中心軸」と記した。すなわち、巨視的降伏曲面は主応力空間において、 $\bar{\sigma}_3$ 軸方向にやや傾いた無限の楕円柱形を形成している。文献¹⁹⁾でも、一様な方向に介在物が分布している場合に巨視的には降伏しない方向が応力空間に存在することが報告されており、ここで得られ

た「中心軸」方向がその降伏しない方向になっている。

介在物が降伏する場合も同様で、それを図-9 に示した。母材と介在物の応力状態は作用反作用的な関係があることから、「中心軸」の向きが前述の母材降伏の場合と逆になっているが、巨視的な降伏曲面はやはり、主応力空間で傾いた無限長の楕円柱形状をしている。

最後に、回転楕円体ではなく介在物形状の 3 主軸方向半径がすべて異なる場合の降伏曲面は異方性を示し、例えば静水圧が無い状態での π 平面の楕円の長軸は、どの主応力軸からもずれた方向を向く。介在物形状主軸と巨視的主応力軸が平行な場合の代表的な例を、図-10, 11 に示した。ただし、この場合でも降伏しない応力方

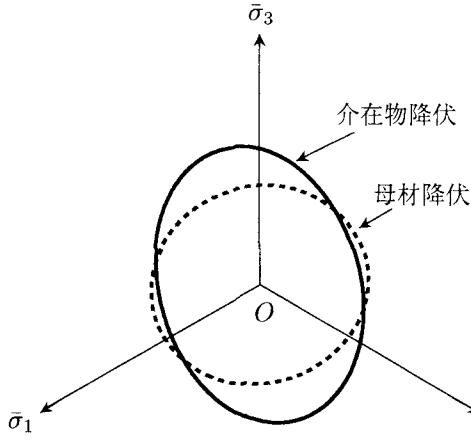


図-10 $a_2/a_1 = 2/3$, $a_3/a_1 = 1/3$ の場合の降伏面 ($\bar{p} = 0$)

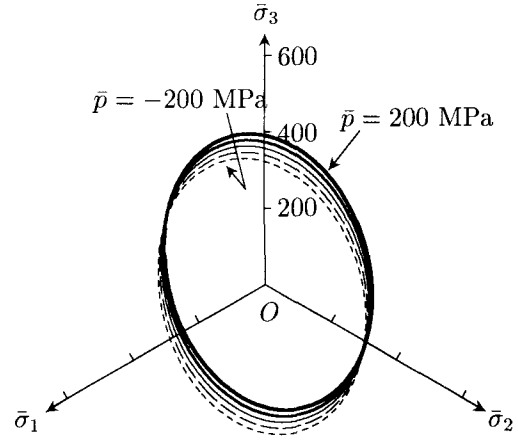


図-11 $a_2/a_1 = 2/3$, $a_3/a_1 = 1/3$ の場合の降伏面 ($\bar{p} \neq 0$): ただし介在物が降伏する場合

向である「中心軸」が存在し、この例では静水圧軸から若干ずれた方向になる。

3.4 降伏曲面の中心軸 — 主応力軸と介在物形状の主軸が一致する場合

前節のように、回転楕円体介在物の形状主軸と巨視的主応力軸が一致する場合には、その巨視的降伏曲面は開いた楕円柱になる。ここでは、この楕円柱の母線の向き「中心軸」方向を解析的に表現する。例として、介在物が降伏する場合を取り挙げると、降伏する寸前の介在物中の応力は式 (1b) の増分を取り去ることで

$$\sigma_i = B\bar{\sigma} \quad (5)$$

とも表現できる。ただし直観的な理解を助けるために、この式では応力も応力集中テンソルもそれぞれ、6次元のベクトルと行列で表してある。すなわち Voigt 表記に従って

$$\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{31} \bar{\sigma}_{12}]^T$$

であり、介在物の形状が $a_1 = a_2$ である場合の B は

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{66} \end{pmatrix}$$

と表せる。介在物主軸方向の主応力成分で介在物の降伏条件式 (3b) を書き直し、上式 (5) を代入すると、巨視的な主応力で表した J_2 が

$$\begin{aligned} (J_2)_i = \frac{1}{6} & \left[\{ (B_{21} - B_{31}) \bar{\sigma}_1 + (B_{22} - B_{32}) \bar{\sigma}_2 \right. \\ & + (B_{23} - B_{33}) \bar{\sigma}_3 \}^2 + \{ (B_{31} - B_{11}) \bar{\sigma}_1 \\ & + (B_{32} - B_{12}) \bar{\sigma}_2 + (B_{33} - B_{13}) \bar{\sigma}_3 \}^2 \\ & + \{ (B_{11} - B_{21}) \bar{\sigma}_1 + (B_{12} - B_{22}) \bar{\sigma}_2 \end{aligned}$$

$$\left. + (B_{13} - B_{23}) \bar{\sigma}_3 \}^2 \right] \quad (6)$$

となる。

ここで例としたように、 x_3 軸方向に長径が向くような介在物の場合、降伏しない方向の「中心軸」は、この降伏条件式の第一項が零になる条件、すなわち $(J_2)_i = 0$ から求められる。つまり

$$\begin{aligned} (B_{21} - B_{31}) \bar{\sigma}_1 + (B_{22} - B_{32}) \bar{\sigma}_2 + (B_{23} - B_{33}) \bar{\sigma}_3 &= 0 \\ (B_{31} - B_{11}) \bar{\sigma}_1 + (B_{32} - B_{12}) \bar{\sigma}_2 + (B_{33} - B_{13}) \bar{\sigma}_3 &= 0 \\ (B_{11} - B_{21}) \bar{\sigma}_1 + (B_{12} - B_{22}) \bar{\sigma}_2 + (B_{13} - B_{23}) \bar{\sigma}_3 &= 0 \end{aligned}$$

という条件になり、これを簡単のために

$$\begin{aligned} a\bar{\sigma}_1 + b\bar{\sigma}_2 + c\bar{\sigma}_3 &= 0 \\ d\bar{\sigma}_1 + e\bar{\sigma}_2 + f\bar{\sigma}_3 &= 0 \\ g\bar{\sigma}_1 + h\bar{\sigma}_2 + i\bar{\sigma}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

と置くと、代数幾何を用いてその「中心軸」の方向が

$$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h af - cd}{g ae - bd} - \frac{i}{g} \\ \frac{cd - af}{ae - bd} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

のように求められる。もちろん球形介在物の場合には、この方向は $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ となる。母材が降伏する場合には、上式の B を A で置き換えればよい。

3.5 主応力空間における初期降伏曲面の表現

式 (6) の誘導と同じ手順を、任意の巨視的応力状態に対して踏み、介在物が降伏する場合の巨視的降伏条件式を求めると、文献¹⁸⁾にも示したように

$$\begin{aligned} (\sigma_M^y)^2 &= [Q_i (\bar{\sigma}_{11})^2 + R_i (\bar{\sigma}_{22})^2 + S_i (\bar{\sigma}_{33})^2 \\ &\quad - T_i (\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22}) - U_i (\bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33}) - V_i (\bar{\sigma}_{33} \bar{\sigma}_{11})] \\ &\quad + 3 [W_i (\bar{\sigma}_{23})^2 + X_i (\bar{\sigma}_{31})^2 + Y_i (\bar{\sigma}_{12})^2] \end{aligned} \quad (9)$$

となる。各係数は介在物の応力集中係数 B によって

$$\begin{aligned}
Q_i &= (B_{11})^2 + (B_{21})^2 + (B_{31})^2 \\
&\quad - B_{11}B_{21} - B_{21}B_{31} - B_{31}B_{11} \\
R_i &= (B_{12})^2 + (B_{22})^2 + (B_{32})^2 \\
&\quad - B_{12}B_{22} - B_{22}B_{32} - B_{32}B_{12} \\
S_i &= (B_{13})^2 + (B_{23})^2 + (B_{33})^2 \\
&\quad - B_{13}B_{23} - B_{23}B_{33} - B_{33}B_{13} \\
T_i &= B_{11}B_{22} + B_{12}B_{21} + B_{21}B_{32} \\
&\quad + B_{22}B_{31} + B_{31}B_{12} + B_{32}B_{11} \\
&\quad - 2B_{11}B_{12} - 2B_{21}B_{22} - 2B_{31}B_{32} \\
U_i &= B_{12}B_{23} + B_{13}B_{22} + B_{22}B_{33} \\
&\quad + B_{23}B_{32} + B_{32}B_{13} + B_{33}B_{12} \\
&\quad - 2B_{12}B_{13} - 2B_{22}B_{23} - 2B_{32}B_{33} \\
V_i &= B_{11}B_{23} + B_{13}B_{21} + B_{21}B_{33} \\
&\quad + B_{23}B_{31} + B_{31}B_{13} + B_{33}B_{11} \\
&\quad - 2B_{13}B_{11} - 2B_{23}B_{21} - 2B_{33}B_{31} \\
W_i &= (B_{44})^2, \quad X_i = (B_{55})^2, \quad Y_i = (B_{66})^2
\end{aligned} \tag{10}$$

と表せる。これは最も一般的な表現であるが、まず応力主軸が介在物の主軸と一致している場合を対象として、もう少し幾何的にわかり易い表現に置き換えてみる。すなわち、前節で求めた「中心軸」のベクトルを用い、Hill の降伏条件式²⁰⁾を参考にすると、複合材料の降伏条件は

$$\begin{aligned}
Q'_i \left(\frac{\bar{\sigma}_1}{n_{i1}} - \frac{\bar{\sigma}_2}{n_{i2}} \right)^2 + R'_i \left(\frac{\bar{\sigma}_2}{n_{i2}} - \frac{\bar{\sigma}_3}{n_{i3}} \right)^2 \\
+ S'_i \left(\frac{\bar{\sigma}_3}{n_{i3}} - \frac{\bar{\sigma}_1}{n_{i1}} \right)^2 = 1 \tag{11}
\end{aligned}$$

と表すことができそうである。

一般的な降伏条件式 (9) を巨視的主応力のみの関係に書き直すと

$$\begin{aligned}
(\sigma_i^y)^2 &= Q_i \bar{\sigma}_1^2 + R_i \bar{\sigma}_2^2 + S_i \bar{\sigma}_3^2 \\
&\quad - T_i \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 - U_i \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 - V_i \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_1 \tag{12}
\end{aligned}$$

と表せるので、これと式 (11) の関係を等値することによって、各係数が

$$Q'_i = \frac{n_{i1}n_{i2}T_i}{2(\sigma_i^y)^2}, \quad R'_i = \frac{n_{i2}n_{i3}U_i}{2(\sigma_i^y)^2}, \quad S'_i = \frac{n_{i3}n_{i1}V_i}{2(\sigma_i^y)^2} \tag{13}$$

と求められる。したがって、介在物の主軸方向にのみ直応力が作用しているような場合で、介在物が降伏する場合の複合材料の巨視的降伏条件は

$$\begin{aligned}
\frac{n_{i1}n_{i2}T_i}{2(\sigma_i^y)^2} \left(\frac{\bar{\sigma}_1}{n_{i1}} - \frac{\bar{\sigma}_2}{n_{i2}} \right)^2 + \frac{n_{i2}n_{i3}U_i}{2(\sigma_i^y)^2} \left(\frac{\bar{\sigma}_2}{n_{i2}} - \frac{\bar{\sigma}_3}{n_{i3}} \right)^2 \\
+ \frac{n_{i3}n_{i1}V_i}{2(\sigma_i^y)^2} \left(\frac{\bar{\sigma}_3}{n_{i3}} - \frac{\bar{\sigma}_1}{n_{i1}} \right)^2 = 1 \tag{14}
\end{aligned}$$

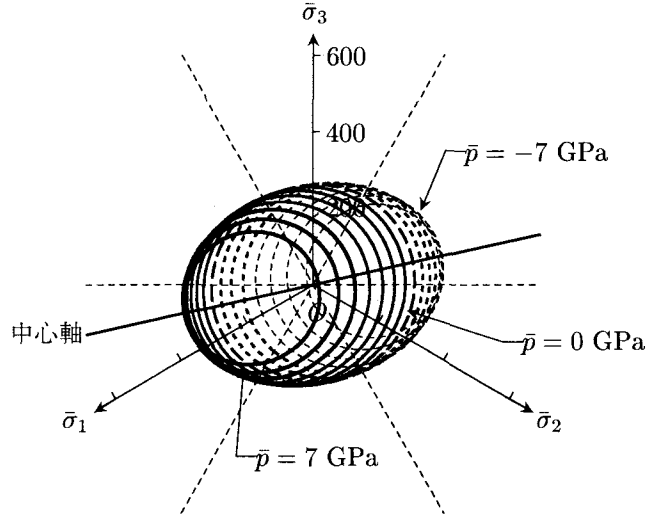


図-12 介在物の長軸が x_2 軸時計回りに 60 度方向を向いている場合 ($a_3/a_1 = 2$, 母材降伏)

となる。 Q'_i 等の具体的な数値は後述する。

3.6 降伏曲面の中心軸 — 主応力軸と介在物形状の主軸が異なる場合

次に一般的な場合を想定し、介在物形状の主軸方向が巨視的主応力軸と一致しない場合を考える。この場合には、もし降伏曲面を π 平面で描いたとしても、内部構造の異方性によって、ひとつの曲面ですべての巨視的な応力状態の降伏状態を表すことはできないことに注意しなければならない。

一例として、半径比 $a_3/a_1 = 2$ の扁長形回転楕円体形状の介在物が、その長軸を x_1 - x_3 平面内で 60 度の方向を向いている場合を対象とする。回転する方向は x_1 軸方向と逆方向、つまり x_2 軸時計回りに 60 度回転した。前節と同様に、降伏曲面の等圧線を巨視的主応力空間に投影して描いたのが図-12 である。投影された等圧線の半径は $\bar{p} = 0$ GPa で最大になり、巨視的静水圧の絶対値の増加に伴い小さくなる。また $|\bar{p}|$ が等しい等圧線同士の形状は同じになる。したがって、巨視的降伏曲面は「中心軸」方向に長軸を持つ回転楕円体の形をしており、「中心軸」方向の载荷でも降伏する。ただし「中心軸」方向の径は、 π 平面上への投影半径に対して数十倍の大きさになっている。

前節のように介在物形状の主軸と巨視的主応力軸が一致している場合は、例えば巨視的に静水圧状態な場合に、母材・介在物共に応力主軸と座標軸は一致している。それに対して、ここで示したような任意の配置の場合には、物体中にはせん断応力が生じてしまい、それが原因で「中心軸」が主応力軸からずれ、また「中心軸」方向の载荷に対しても降伏する。このような特性は介在物が降伏する場合においても同様で、その例を図-13 に示した。

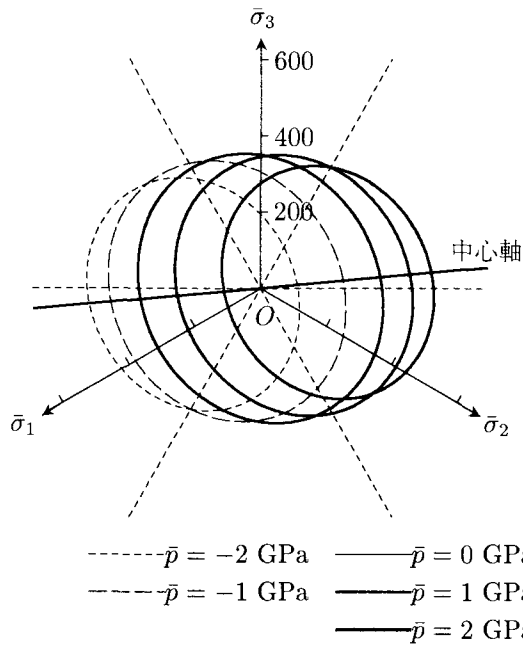


図-13 介在物の長軸が x_2 軸時計回りに 60 度方向を向いている場合 ($a_3/a_1 = 2$, 介在物降伏)

3.7 一般的な場合の降伏条件式の表現

前述のように、介在物形状の主軸と巨視的主応力軸が一致していない場合の降伏条件式は、一般的な式 (9) で与えられる。これを再度、もう少しわかり易い表現に直したのが次式である。

$$1 = \left[Q'_i \left(\frac{\bar{\sigma}_{11}}{n_1} - \frac{\bar{\sigma}_{22}}{n_2} \right)^2 + R'_i \left(\frac{\bar{\sigma}_{22}}{n_2} - \frac{\bar{\sigma}_{33}}{n_3} \right)^2 + S'_i \left(\frac{\bar{\sigma}_{33}}{n_3} - \frac{\bar{\sigma}_{11}}{n_1} \right)^2 \right] + [2W'_i \bar{\sigma}_{23}^2 + 2X'_i \bar{\sigma}_{31}^2 + 2Y'_i \bar{\sigma}_{12}^2] \quad (15)$$

ここに、式 (13) で定義した量以外は

$$W'_i = \frac{3W_i}{2(\sigma_i^y)^2}, \quad X'_i = \frac{3X_i}{2(\sigma_i^y)^2}, \quad Y'_i = \frac{3Y_i}{2(\sigma_i^y)^2} \quad (16)$$

$$W_i = (2B_{44})^2, \quad X_i = (2B_{55})^2, \quad Y_i = (2B_{66})^2$$

という関係がある。ここで用いている材料定数等の設定で具体的にこの係数を算定すると

$$\mathbf{n} = [0.601 \quad 0.601 \quad 0.527]^T$$

$$Q'_i = 6.01 \times 10^{-7} \text{ MPa}^{-2}$$

$$R'_i = 1.27 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-2}$$

$$S'_i = 1.27 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-2}$$

$$W'_i = 8.99 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-2}$$

$$X'_i = 8.99 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-2}$$

$$Y'_i = 6.85 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-2}$$

となる。

ただし、式 (15) の表現では暗黙のうちに、座標軸方向と介在物の形状主軸方向は一致していることを前提と

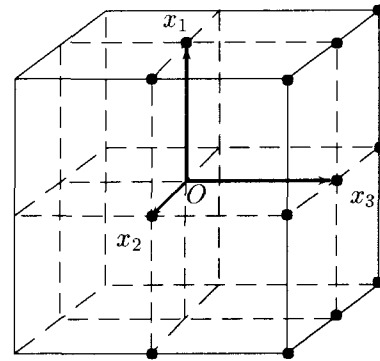


図-14 介在物を分布させる方向

した。したがって、座標軸とは無関係に介在物形状の主軸方向が与えられる問題の場合には注意が必要である。すなわち、その対象としている介在物方向を座標軸とする局所座標系で式 (15) を用いなければならないことに注意する。

4. 多相複合材料の巨視的初期降伏曲面

前節では一種類の介在物のみが同じ向きに並んで存在する場合の、降伏曲面の異方性と陽な表現について検討した。例えば繊維補強高流動コンクリートのような場合、鋼繊維を流動と共に配置させるとその向きが揃うことがある。応力状態が明確な場合には繊維の向きを制御するのが望ましいこともあるが、一般にはバイブレータで繊維の向きをランダムにしているのが現状のようだ。ここでは、そういう風にランダムに配置した介在物が存在する多相複合材料の降伏曲面について考察する。

材料は前節で用いたものと同じとする。介在物の体積比率 f_i も同様に、介在物全体で 13.2% になるようにする。すなわち、介在物の代表向きが n 種類である場合には、それぞれの向きを持った介在物を $13.2/n\%$ ずつ配置することにする。また代表例として、介在物は回転楕円体 ($a_2/a_1 = 1$) とし、その長軸の向きを介在物の代表向きとした。介在物の具体的な向きは、図-14 の座標原点 O から立方格子の各頂点にある黒丸へ向かう 13 種類とする。もちろん、49 方向や 145 方向のように配向数を増やした場合の解析も行ったが、結果の重要な特性は 13 方向の場合と同様なので、ここでは 13 方向の場合についてのみ報告する。

なお後述のように複合材料の巨視的降伏条件は、各介在物で満足する式 (9) のうちの最も半径の小さい曲面で区分的に定義される。そのため、ひとつの式で陽な表現を与えることはできないため、前節のような「中心軸」の誘導等を行わない。数値解析では、この式 (9) を判定しながら用いざるを得ないことを注記しておく。

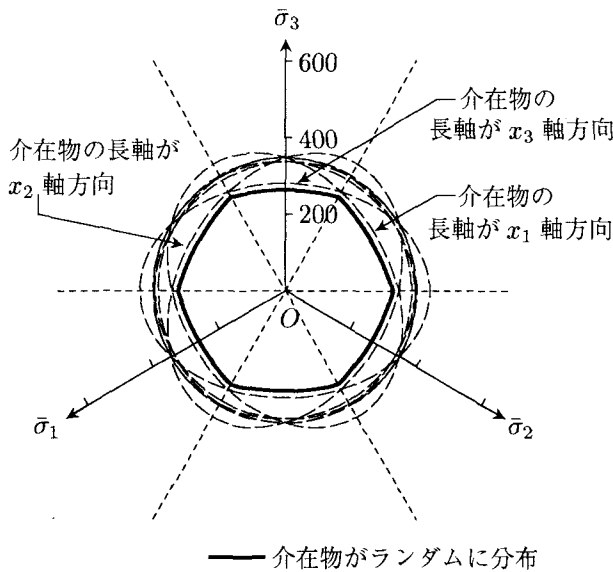


図-15 扁長形介在物がランダム分布した場合の降伏曲面 ($\bar{p} = 0$ MPa, 介在物が降伏)

4.1 扁長形介在物がランダム分布する場合

代表例として、介在物の半径比が扁長形の $a_3/a_1 = 2$ である場合を対象とし、母材は降伏しないものとする。図-15に13種類の介在物を含んだ多相複合材料の降伏曲面を示した。これは巨視的静水圧が $\bar{p} = 0$ MPaの状態での曲面である。一番内側の実線で示された曲面が多相複合材料の降伏曲面である。これに対して破線で描かれているのは、13種類の向きのうち、ひとつだけの向きを持った介在物しか存在しない場合の2相複合材料の曲面である。つまり、一方向の方向しか向いていない介在物を持つ複合材料の降伏曲面の包絡面の若干内側に、多相複合材料の降伏曲面は位置する。

すぐ外側に位置する降伏曲面は、実は3種類しかなく、それは介在物の長軸が座標軸のいずれかの方向を向いているものだけである。これはその3種類の形状の場合の応力集中係数が最も大きいことを反映している。それ以外の方向を持つ介在物の降伏曲面は、この3種類のものよりも少しだけ外側に位置する。この3種類の降伏曲面を結んだ線と実線との差が、多数の介在物が存在することの相互作用を表している。したがって降伏曲面は6つの角点を持つ。結局、全体的に丸みを帯びた Tresca の降伏曲面を、静水圧軸を中心にして30度回転した面と見ることできる。

ただ銅のような多結晶体の巨視的降伏曲面を見ると、実験的にもいわゆる von Mises の降伏曲面のような滑らかな降伏曲面になることは判明している。もちろん実際の多結晶体中の各単結晶は楕円体形状を有していないし、もしそうであったとしても、前節で例示したような楕円体主軸が3つとも異なる場合もランダムに存在し、それが示す異方性によって、ここで得られた角点が無くなることは十分に考えられるが、これは今後の検討課題

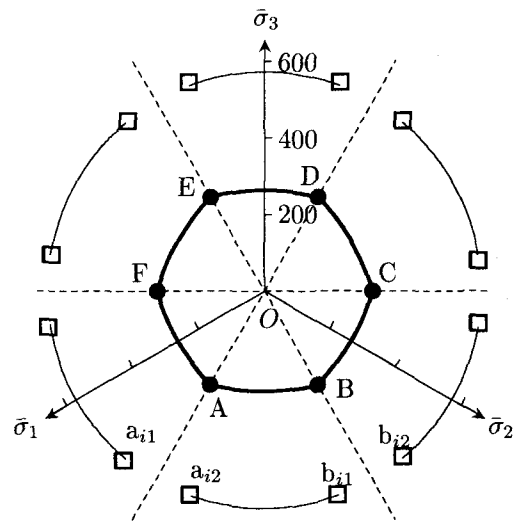


図-16 巨視的降伏時に降伏する介在物内の応力状態 ($\bar{p} = 0$ GPa, 介在物が降伏)

としたい。

また、そういった実測・観察を念頭に置いてこの結果を考察すると、特別な3種類の介在物の降伏だけで巨視的な降伏が決定されていることは、例えば均質化法を用いた数値解析³⁾で物体中のある一点での降伏で巨視的降伏を決定したと同じ状況になってしまっている。もし、より多くの介在物が降伏した状態で巨視的な降伏を定義し直すことにすると、この図-15の場合にはいくつもの破線が集中している部分、すなわち、この図の軸の値で言うと350 MPa程度の部分に集中している破線集合の円状の領域が、真の巨視的降伏状態と考えてもいいのかもしれない。そのように考えると、角の無い二次形式で表現できる降伏曲面になるが、これについても、後続降伏までも追跡して巨視的な応力ひずみ関係を検討する必要があるので、今後の課題にしたい。

さて、巨視的な降伏が生じた状態での、降伏を経験している介在物中の応力状態を図-16に示した。内側の太い実線は図-15の最も内側に位置する巨視的な降伏曲面である。その外側の□印で区切られた6つの線分が、降伏した介在物中の J_2 値である。例えば図中の点Aは巨視的なせん断状態（原点Oからの破線上）にあるが、この降伏状態では x_3 と x_1 軸方向に長軸を持つ2種類の介在物が降伏している。しかし、その2つの介在物中には長軸方向の応力集中が生じ、その方向の直応力が比較的大きくなるために、図に示した破線上に相当するせん断軸よりも若干ずれた位置の□印（点Aに対しては a_{i1} , a_{i2} で記した□印）に応力状態が位置し、純せん断状態ではないことに注意すべきである。

次に静水圧の影響を見るために、図-17, 18には、巨視的静水圧が $\bar{p} = \pm 200$ MPa の場合の降伏曲面の π 平面への投影図を描いた。いずれの巨視的降伏状態でも、前述の3つの介在物のいずれかのみが降伏しているだけ

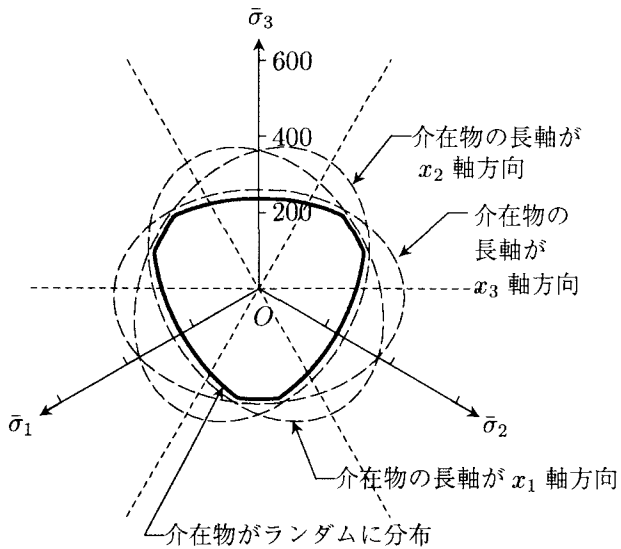


図-17 扁長形介在物がランダム分布した場合の降伏曲面 ($\bar{p} = 200$ MPa, 介在物が降伏)

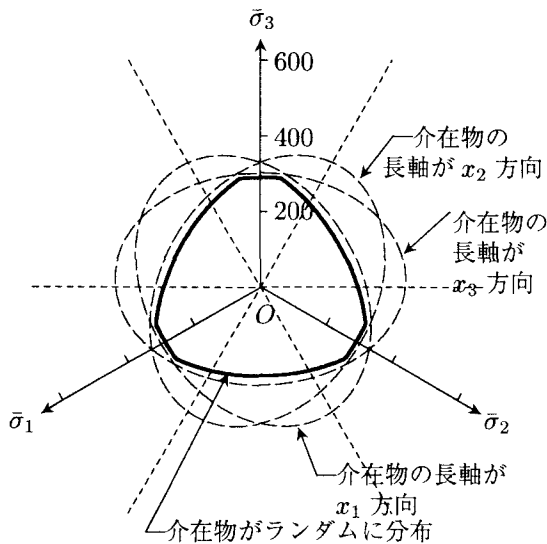


図-18 扁長形介在物がランダム分布した場合の降伏曲面 ($\bar{p} = -200$ MPa, 介在物が降伏)

である。それ以外の静水圧状態も含めて等圧図にして描いたのが図-19である。この図は π 平面より少しだけ傾いた方向から描いた3次元的なものを平面に投影した図(透視図ではない)である。図では算盤珠のように見えるが、2相複合材料の場合と同様、静水圧軸方向には非常に長い径を持っていることに注意して欲しい。太い実線で示した等圧線は $\bar{p} > 0$ の範囲での降伏曲面の等圧線を示し、 $\bar{p} < 0$ の等圧線は細い破線で示した。

4.2 扁平形介在物がランダム分布する場合

扁平な介在物の場合の結果も同様に図-20, 21に示した。扁平な場合と比べると、Trescaの降伏曲面に似ていることを除けば、その特性はほぼ同様である。図-

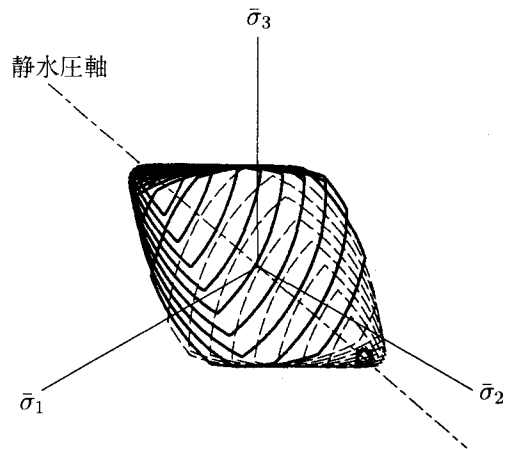


図-19 扁長形介在物がランダム分布した場合の降伏曲面の等圧線表示(介在物が降伏)

21も π 平面から少しだけ傾いた方向から描いた3次元的なものを平面に投影した図(透視図ではない)である。

5. おわりに

森・田中理論を増分型の弾塑性理論に適用し、介在物の形状や角度の幾何学的特性と3次元的な分布状態とが、複合材料の巨視的初期降伏曲面に及ぼす影響について検討し、以下の知見を得た。

- 2相複合材料の場合、介在物の形状主軸と巨視的主応力軸が一致する場合には、ある応力方向には降伏しない「中心軸」が巨視的主応力空間に存在し、その「中心軸」は静水圧軸からずれる。
- また、介在物の形状主軸と巨視的主応力軸が異なる場合には、その「中心軸」方向の载荷でも降伏し、巨視的降伏曲面の形は、その主軸同士のずれ角ごとに異なる楕円体形状になる。
- いずれの場合も一つの降伏条件式で表すことができ、応力集中係数テンソル $\mathbf{A}$ あるいは $\mathbf{B}$ を用いて陽な表現が可能であるが、ここでは Hill のモデルを基礎にして、応力空間でわかり易い表現にして提案した。
- 介在物が3次元的にランダムに分布する場合、最も早く降伏する介在物の降伏で巨視的降伏を定義した場合には降伏曲面には角点が生じる。しかも、最も早く降伏する介在物の向きはある特定の少数のものに限られているため、分布のランダムさをさらに増大させても角点は無くならない。また、その巨視的降伏曲面は、静水圧軸方向には非常に長い径を持つが、閉じた形状となる。

なお、母材と介在物の両方が弾塑性である場合にも、図-10から容易に類推できるように、角点の発生などが生じる。しかし、通常の補強材では補強のための材料は

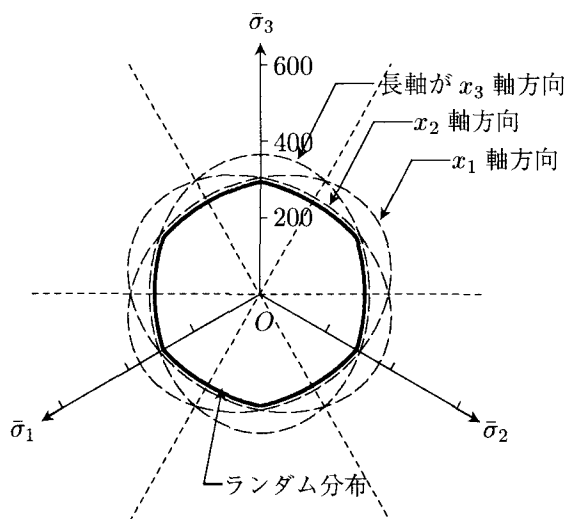


図-20 扁平形介在物がランダム分布した場合の降伏曲面 ($\bar{p} = 0$ MPa, 介在物が降伏)

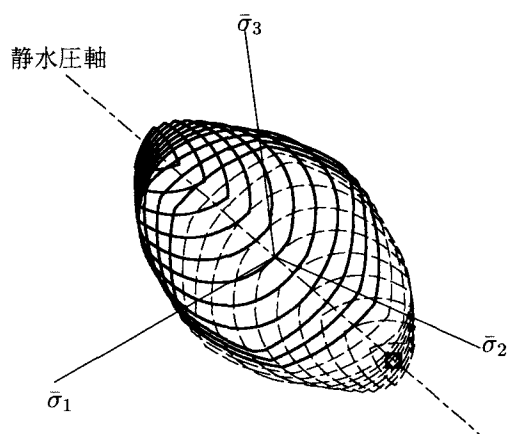


図-21 扁平形介在物がランダム分布した場合の降伏曲面の等圧線表示 (介在物が降伏)

降伏し難いものを導入するため、ここでは、母材か介在物のいずれかが降伏する場合に限定して報告をした。

参考文献

- 1) 武者浩透, 大竹明朗, 児玉明彦, 小林忠司: 超高強度コンクリート系新素材「ダクトル」を用いたPC橋梁の設計・施工—酒田みらい橋—, プレストレストコンクリート, Vol.45, No.2, pp.40-48, 2003.
- 2) 土木学会構造工学委員会FRP橋梁研究小委員会: FRP橋梁—技術とその展望—, 構造工学シリーズ14, 2004.
- 3) 松井和己, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岩熊哲夫: 弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価, 土木学会論文集, No.682/I-56, pp.335-346, 2001.
- 4) Hashin, Z. and Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.

- 5) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 6) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 7) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities; Part II: applications, *Int. J. Solids Str.*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
- 8) Weng, G.J.: Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.22, pp.845-856, 1984.
- 9) Huang, J.H.: Some closed-form solutions for effective moduli of composites containing randomly oriented short fibers, *Mat. Sci. and Eng.*, Vol.A315, pp.11-20, 2001.
- 10) 岩熊哲夫, 堀宗朗, 木谷朋之, 村外志夫: 内部に微視構造を有する材料の平均弾塑性関係の一評価, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.39A, pp.375-380, 1993.
- 11) Hill, R.: Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.89-101, 1965.
- 12) Tandon, G.P. and Weng, G.J.: A theory of particle-reinforced plasticity, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, Vol.55, pp.126-135, 1988.
- 13) 廣瀬恒太, 岩熊哲夫, 小山茂: 材料内部の微視構造が初期降伏特性に及ぼす影響と巨視的構成則, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.355-366, 2003.
- 14) 岩崎智明, 岩熊哲夫, 小山茂: 複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5, pp.273-282, 2002.
- 15) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 16) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ. 1982.
- 17) Zhu, H.T., Zbib, H.M. and Khraisheh, M.K.: Flow strength and size effect of an Al-Si-Mg composite model system under multiaxial loadings, *Scripta Met. Mater.*, Vol.32, pp.1895-1902, 1995.
- 18) 田辺将樹, 岩熊哲夫, 岩崎智昭, 小山茂: 複合材料や多結晶体の初期降伏曲面の特性, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.4, pp.405-412, 2001.
- 19) Zhao, Y.H. and Weng, G.J.: Theory of plasticity for a class of inclusion and fiber reinforced composites, *Micromechanics and Inhomogeneity*, pp.599-622, 1990.
- 20) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press 1998.

(2004年4月16日 受付)