

砂の平面ひずみ変形挙動の分岐メカニズムに基づく分析法

Bifurcation Mechanism based Analysis Procedure of Plane Strain Deformation of Sands

佐々木寛典*・池田清宏**・市村強***・山川優樹****・須藤良清†・高村浩之‡

Hironori SASAKI, Kiyohiro IKEDA, Tsuyoshi ICHIMURA, Yuki YAMAKAWA, Yoshikiyo SUDO and Hiroyuki TAKAMURA

*学生会員 若築建設株式会社 (〒 541-0056 大阪府大阪市中央区久太郎町 2-2-8)

**正会員 Ph.D 東北大学教授 工学部土木工学科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***正会員 博工 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

****正会員 博工 長岡技術科学大学 助手 環境・建設系専攻 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

†正会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

‡学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

The analysis procedure of plane-strain deformation of sands based on bifurcation mechanism is presented through the combination of PIV (particle image velocimetry), double Fourier analysis, and block-diagonalization method. This procedure is applied to the PIV images of the progress of deformation of sand specimens to detect the specific Fourier mode corresponding to the bifurcation mode. The images are decomposed based on block-diagonalization to identify bifurcation modes triggering shear band formation. The procedure is found to be especially suited for the physical comparison of the deformation of experiment and numerical bifurcation analysis

Key Words : Bifurcation, Double Fourier Transformation, Image Analysis, Plane Strain Compression Test, Sand, Shear Band

1. はじめに

土の「要素試験」における変形形態の多様性に分岐が関与していることが、近年明らかにされており¹⁾、拡散型分岐による変形がせん断線形成分岐を誘発するという仮説も提案されている²⁾。しかし、実験における分岐の発現を特定する決定的な手法は、現段階では存在しない。

土の供試体における局所化領域の目視による観察には困難を伴うため、色々な工夫がなされている。近年画像処理技術の導入が図られており、X線CT法による土のせん断面等の詳細な観察^{3),4),5),6)}、Matching methodによる軟岩の変位場測定^{7),8)}、画像解析による砂の変位場計測等⁹⁾が行われている。しかし、物理的に有意な情報を、このようにして得られた画像データから、いかにして取り出すかということは、課題として残されている。

本論文では、「PIV」(粒子画像流速計測法)と「2重フーリエ解析」と「ブロック対角化原理」¹⁰⁾を組み合わせた分岐検出画像解析手法を提案する。池田ら¹²⁾は、砂の平面ひずみ供試体の2次元画像にPIV¹⁾を施し、さらにブロック対角化原理に基づいて複数のブロック(画像)に分解することにより、分岐モードを抽出する手

法を提案している。ブロック対角化原理は、対称性を持つ系の支配方程式(解空間)は、適当な座標変換により、複数の独立な支配方程式(解空間)に分解できる性質を表す。このとき、分解された画像の内一つが分岐を起こさない場合の変形モードに対応し、残りの画像が分岐モードに対応することが重要である。また、この結果、砂の平面ひずみ試験体の拡散型分岐モードを検出し、拡散型分岐がせん断線形成に先行する形で起きているという仮説²⁾を検証している。

本論文では、この手法と変形画像のフーリエスペクトル分解を組み合わせた画像解析法を提案する。これは、従来、ブロック毎の分解という粗い尺度に基づいて抽出していた分岐モードを、さらにフーリエモードまで分解して細かく調べていこうという試みである。また、この試みは、Hill and Hutchinson¹³⁾が示したフーリエモードが、せん断線モードと並んで、均質長方形領域の分岐モードであるという事実に基づいている。すなわち、画像解析に分岐のメカニズムに基づく処理を導入することが本手法の画期的な点である。さらに、フーリエモードを用いることにより、ブロック分解が簡略化できるという利点もある。

本手法を用いることにより、PIVにより得られる画像データを、複数の画像データに分解する。変形画像のフーリエスペクトル分布を対称性ごとのブロックに分解し、ブロック毎のフーリエスペクトル分布と変形

† Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

¹ PIV は、微小な粒子の移動を可視化し、画像解析することにより、流速ベクトル分布を求める計測法の総称である。

速度ベクトル図を求め、拡散型分岐モードの発現によって変形の対称性が多段階に失われ、局所化が進行するメカニズムを明らかにする。

端面摩擦無し、载荷速度一定の条件の下で豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験を行う。実験中に撮影された画像に対して PIV を用いることにより、供試体の変位場の経時変化の画像を求める。さらに、この画像を本手法によって解析することにより、分岐モード (harmonic mode) を特定し、拡散型分岐が起きていることを示す。さらに、実験により求めた変形挙動と有限変形弾塑性解析¹⁴⁾結果を、本手法により処理することによって、本手法が数値解析結果の評価法として有望であることを示す。

2. 長方形領域の分岐の仕組みと分岐検出法

長方形領域の分岐の仕組みは、群論的分岐理論により明らかにされており¹⁾、その詳細は付録 I と付録 II にまとめている。ここでは、その結果を簡単にまとめ、さらに、この仕組みに基づいた画像解析による分岐の検出法を提案する。

2.1 長方形領域の分岐の仕組み

長方形領域の分岐は幾何学的対称性を喪失する場合 (付録 I 参照) と周期対称性による拡散型分岐 (付録 II 参照) とに大別される。

幾何学的対称性の喪失による分岐では、長方形領域は、分岐するまでは、上下・左右鏡映対称性と π 回転対称性を保つ。一方、第 1 次分岐後の解は、上下対称または左右対称または π 回転対称となる。さらに、第 2 次分岐を起こす場合には、分岐後の解は非対称となる。この分岐の仕組みの模式図を図-1 の実線の矢印で示す。

周期対称性による拡散型分岐では、長方形領域が、均質な状態を保ちながら変形できる場合には、拡散型 (harmonic) モードが分岐モードとなる。このため、均質な状態から、図-1 に点線の矢印で示すような分岐が引き起こされることとなる。分岐後は、一般に、幾何学的対称性だけとなるが、拡散型分岐モードがある対称性を持つ場合には、さらなる分岐を起こす可能性を持つ。例えば、拡散型分岐モードが π 回転対称性を持つ場合には、

$$\pi \text{ 回転対称} \rightarrow \text{非対称}$$

というさらなる分岐を起こす可能性を持つ。

2.2 画像解析による分岐検出法

本解析法では、土の平面ひずみ圧縮せん断における均質な状態からの拡散型分岐を検出するために、有限離散 2 重フーリエ解析を用いる。

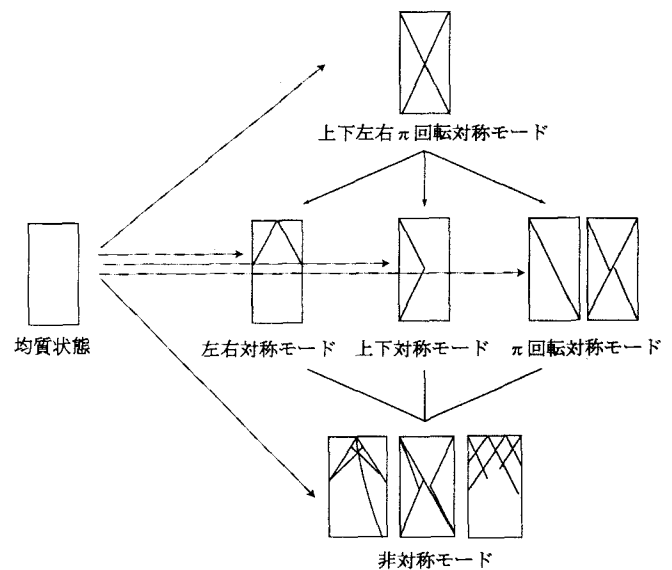


図-1 長方形領域の分岐の仕組み図

直交座標の原点に位置する $L_x \times L_y$ の長方形領域を考える。ただし、領域の寸法 L_x と L_y は、パラメータ f の値の変化とともに変化するが、長方形という形状は変化しない。以下 x と y を、

$$\pi x / L_x \rightarrow x, \quad \pi y / L_y \rightarrow y \quad (1)$$

とスケーリングし、長方形領域

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\} \quad (2)$$

を考える。2次元長方形領域内のある点 (x, y) の変位ベクトル (u_x, u_y) を考え、その各方向成分をそれぞれ

$$\begin{aligned} u_\Phi = \sum_{n_x=0, n_y=0} [& a_{n_x n_y}^{\Phi 1} \sin n_x x \cdot \cos n_y y \\ & + a_{n_x n_y}^{\Phi 2} \sin n_x x \cdot \sin n_y y \\ & + a_{n_x n_y}^{\Phi 3} \cos n_x x \cdot \cos n_y y \\ & + a_{n_x n_y}^{\Phi 4} \cos n_x x \cdot \sin n_y y] \end{aligned} \quad (\Phi = x \text{ or } y) \quad (3)$$

とフーリエスペクトルに分解する。

卓越するスペクトルの波数 (n_x, n_y) を調べることににより、拡散型分岐を検出する。また、フーリエモードを、上下左右 π 回転対称、 π 回転対称、左右対称、上下対称性の4つの対称性を持つモードと対称性ごとのブロックに分解し、その経時変化を調べることで、上記の2種類の分岐を検出することとする。

3. 現行法による実験と解析の比較

PIV 画像解析法を用いて、豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験結果と弾塑性有限要素解析結果とを比較する。

3.1 豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験

平面ひずみ圧縮せん断試験法と豊浦砂の圧縮せん断試験結果についてまとめる。試験法については、付録 IV を参照されたし。

供試体の軸ひずみ-軸差応力曲線を実線で、軸ひずみ-体積ひずみ曲線を破線で図-2 に示す。軸ひずみ $\varepsilon = 3.95(\%)$ でピーク強度 $277.8(kPa)$ を発揮する。その後に応力が緩やかに減少し、その直後、強度が急激に減少して、 $\varepsilon = 5(\%)$ 以降は強度が再び発現する。供試体は、実験初期の段階では体積圧縮を受け、 $\varepsilon = 1(\%)$ 付近から膨張を始め、 $\varepsilon = 3.89(\%)$ で膨張速度が最大になり、強度が急激に落ち込むところで膨張速度も急激に減少する。

図-3(a) に PIV² により取得した流速ベクトルから求めた変形速度ベクトルを示す。この図から $\varepsilon = 3.6\%$ 付近から徐々に変形が局所化していったことが確認できた。

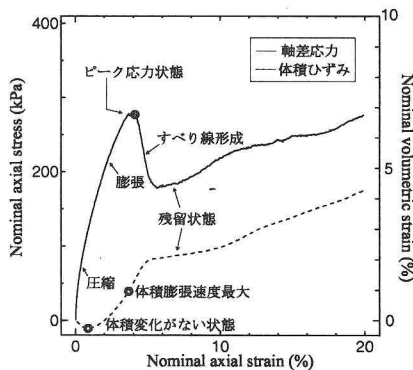


図-2 軸ひずみ-軸差応力曲線と軸ひずみ-体積ひずみ曲線

3.2 分岐解析

山川ら¹⁴⁾の弾塑性有限要素解析法により、長方形供試体の分岐解析を行った。完全弾塑性を仮定し、降伏基準は Drucker-Prager モデルを用いた。今回は、数値解析により求めた供試体の局所変形モードを実験と比較することを主な目的とし、最も基本的な構成モデルでの検討を行う。図-4 に示す解析モデルの境界条件では、供試体中心部を完全固定としている。これは、供試体の中心部はほとんど変位しないという試験結果を反映している。

平面ひずみ圧縮試験の図-2 の軸ひずみ約 1.3% までの結果に基づき、弾性係数 $E = 11.5MPa$ 、摩擦角 $\theta = 30^\circ$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を定めた。また、実験とピーク強度が整合するように粘着力 $\hat{c} = 77.4kPa$ と定めた。 θ と $\hat{c}$ の値に基づき、初期降伏応力 $\hat{\tau}_{y0} = 66.3kPa$ と主応力空間における Drucker-Prager の降伏曲面による円錐の頂点の値を $\beta_\phi = 0.699$ を求めた。

² PIV による流速ベクトルの取得方法については付録 V にまとめる。

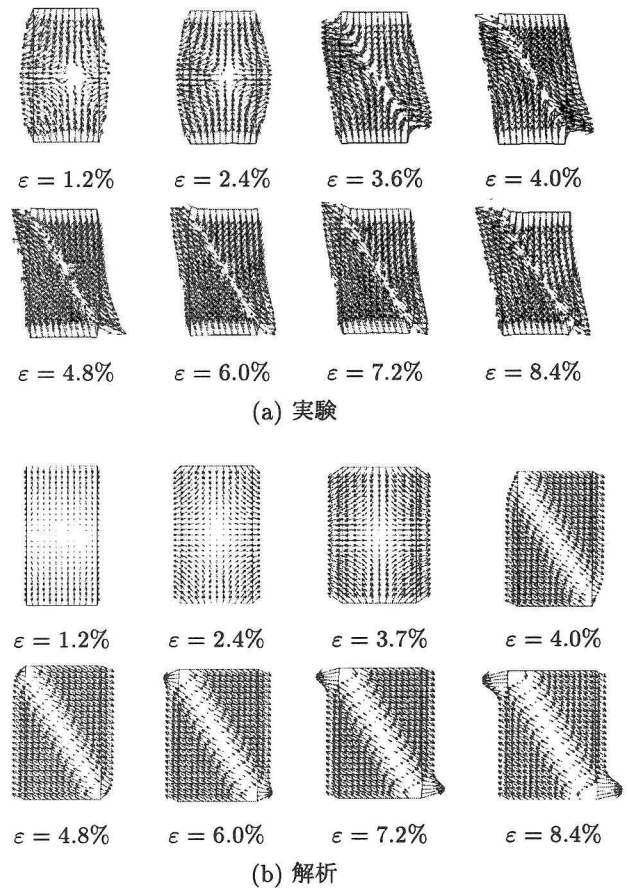


図-3 変形速度ベクトル図

図-3(b) に数値解析から得られた変形速度ベクトル図を、図-5 の点線で軸ひずみ-軸差応力曲線を示す。

3.3 実験と解析の比較

図-3 の変形図に示すように、実験と解析とは、軸ひずみ $\varepsilon = 4.0\%$ 以降にせん断帯が発達していく過程は、みかけ上比較的よく整合している。ただし、実験で見られるような狭いせん断領域に集中する局所化を解析では完全には再現できていないことが分かる。しかし、PIV の画像からこれ以上の有意な情報を得ることは困難であった。

図-5 の軸ひずみ-軸差応力曲線に示すように、実験と数値解析のグラフは、ピーク以前では比較的良く整合しているが、ピーク以降では大きく異なっている。これは、せん断帯の形成、軟化の度合い、変形モードの違い等の様々な要因によるものと思われる。また、図-6 の軸ひずみ-体積ひずみ曲線に示すように、数値解析では、過大な体積膨張が発生している。

このように、解析結果は実験結果を完全には記述できておらず、課題を残している。解析手法の改善は今後の課題とし、本論文では、解析手法の評価という観点から、解析結果と実験結果とを分析比較して行くことにする。

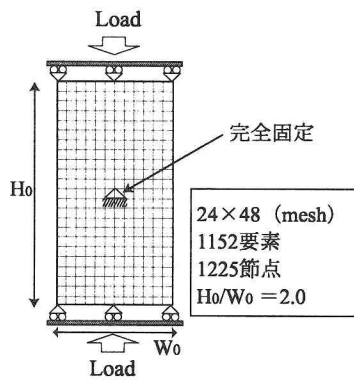


図-4 数値解析モデル

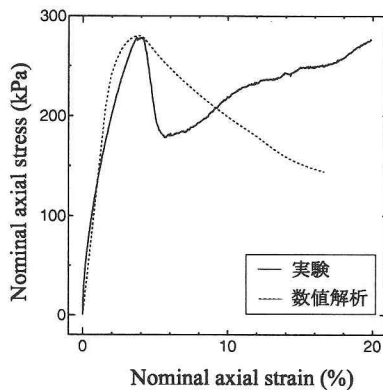


図-5 実験および数値解析における軸ひずみ-軸差応力曲線

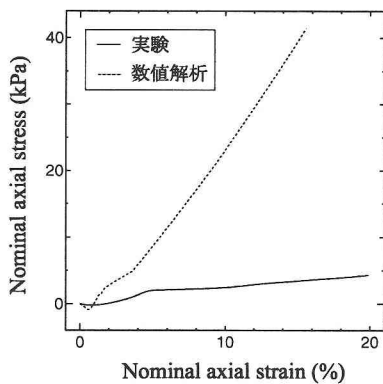


図-6 実験および解析における軸ひずみ-体積ひずみ曲線

4. スペクトル分布を用いた分岐の検出

スペクトル分布を用いた拡散型分岐の検出法についてまとめる。

4.1 実験

実験から得られた変形速度の PIV 画像をスペクトル分解し、図-7 に示すように、上下左右 π 回転対称、 π 回転対称、左右対称、上下対称性の 4 つの対称性を持つモードごとのブロックをまとめることにより、図-8(a) に示すようなスペクトルの経時変化を求めた。こ

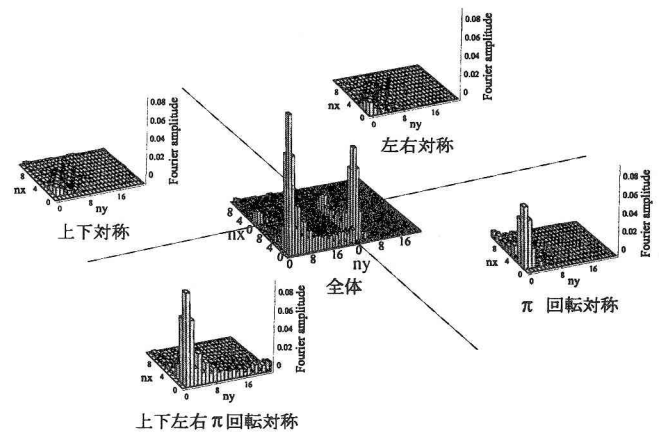


図-7 スペクトル分布のブロック分解

こで、 y を一様圧縮方向に、 x を一様膨張方向に取った。 $\varepsilon = 0.8\%$ では、 y 方向の一様圧縮変形に対応する複数のスペクトルの卓越と、 x 方向の一様膨張変形に対応する複数のスペクトルの卓越が観察された。また x 方向では、上下対称性を持つ横方向にたわむ様な変形に対応するスペクトルも検出されたが、これはすぐに消えてしまうことから、実験誤差と判断した。 $\varepsilon = 2.8\%$ では、一様圧縮変形に加えて一様膨張変形がさらに卓越している。 $\varepsilon = 4.0\%$ では、一様圧縮変形と同レベルまで一様膨張変形が卓越している。また、 π 回転対称性を持つスペクトル成分が急激に発達している。この内、 x 方向成分は $\cos n_x x \cdot \sin n_y y$ に対応し、大きい順に、

$$(n_x, n_y) = (2, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 1) \quad (4)$$

であった。一方、 y 方向成分は $\sin n_x x \cdot \cos n_y y$ に対応し、大きい順に、

$$(n_x, n_y) = (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1) \quad (5)$$

であった。これらのスペクトルの波数に対応する変形形態を図-9(a) に示す。これらが拡散型分岐モードの候補であると思われるが³、どの波数成分により、分岐が引き起こされているかということは特定できなかった。

$\varepsilon = 4.8\% \sim 10\%$ までは、一様膨張変形が一様圧縮変形のほぼ半分になっている。これは、形状比が 2.0 であることから体積変化がほとんどない状態まで膨張変形が減少したことを示唆しており、図-2 の軸ひずみ-体積ひずみ曲線の傾きが非常に小さいことと整合している。また、分岐モードの発現に連成する形で発生する上下対称変形に対応するスペクトルが観察され、 $\varepsilon = 5.6\%$ では、それらのスペクトルが、さらに大きくなっている。後述するように、これは 2 次分岐を起こす成分であると思われる。

³ 厳密には、同じ波数成分を全てたし合わせたものが分岐モードとなる。

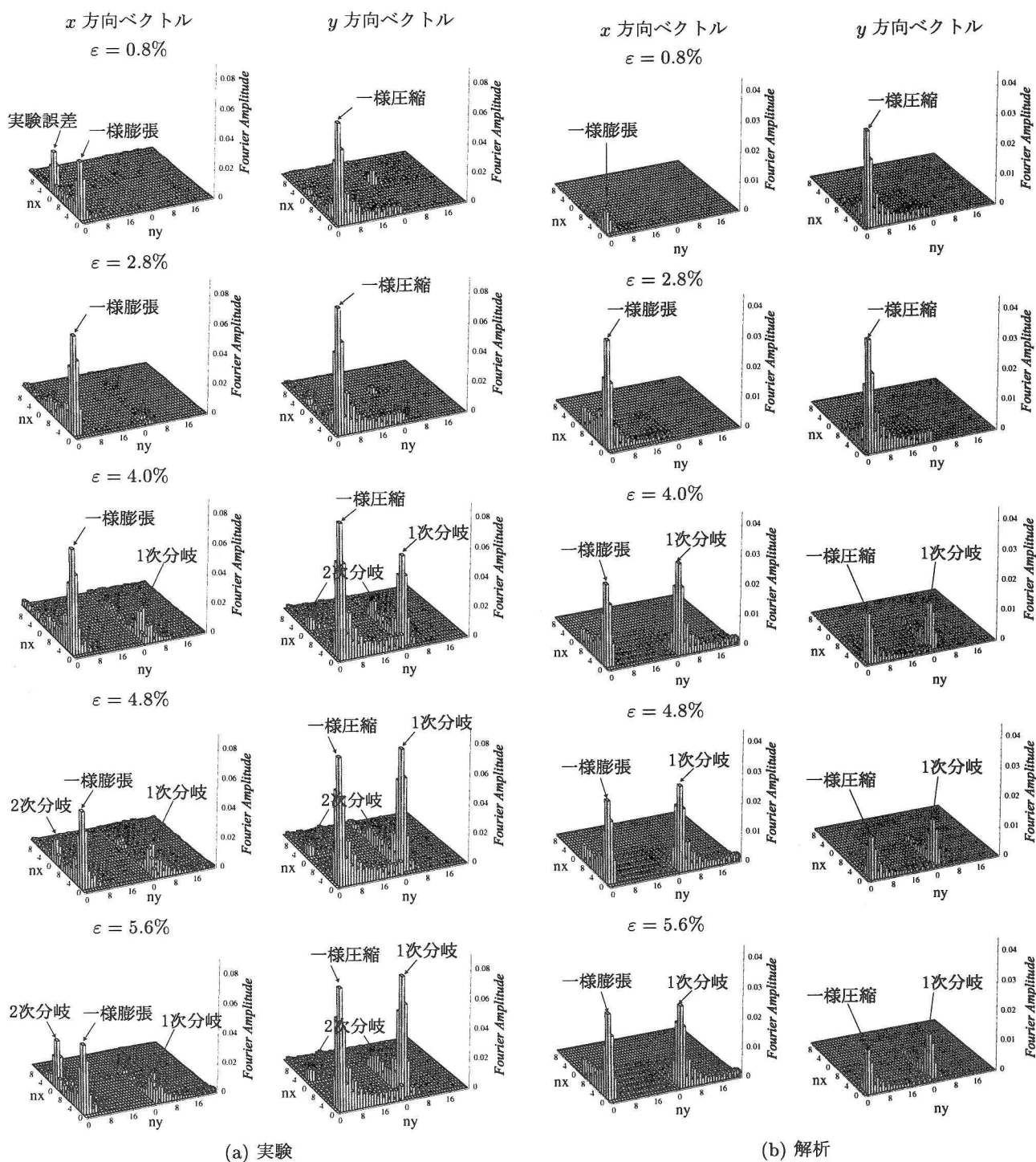


図-8 スペクトル分布の経時変化

4.2 解析

数値解析によって得られた変形図(図-3(b))に、画像解析法を施した場合の変形スペクトルの経時変化を図-8(b)に示す。 $\varepsilon = 0.8\%$ では、 y 方向の一様圧縮変形に対応する複数のスペクトルの卓越と、 x 方向の一様膨張変形に対応する複数のスペクトルが観察された。 $\varepsilon = 2.8\%$ では、一様圧縮変形と同レベルまで一様膨張変形が卓越してきている。 $\varepsilon = 4.0\%$ では、一様圧縮変形が急激に減少するのに対して一様膨張変形は引き続

き卓越しており、これから先は膨張変形が卓越していることが分かる。

また、 $\varepsilon = 4.0\%$ では、 π 回転対称性を持つスペクトル成分が急激に発生している。この内、 x 方向成分は $\cos n_x x \cdot \sin n_y y$ に対応し、大きい順に、

$$(n_x, n_y) = (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2) \quad (6)$$

であった。一方、 y 方向成分は $\sin n_x x \cdot \cos n_y y$ に対応

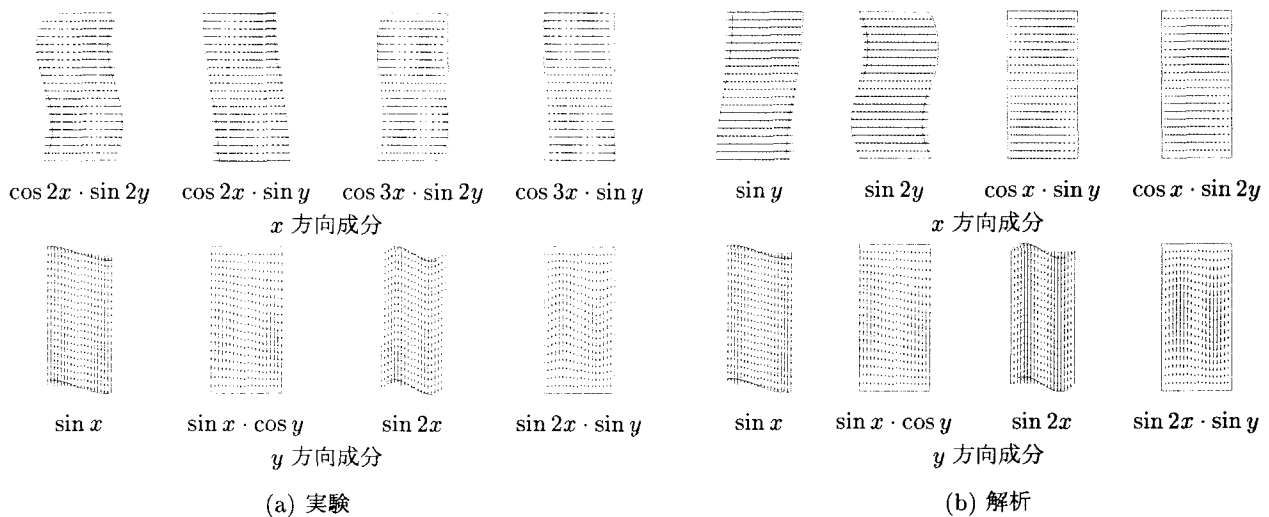


図-9 分岐点付近で卓越するスペクトル成分

し、大きい順に、

$$(n_x, n_y) = (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1) \quad (7)$$

であった。これらのスペクトルの波数に対応する変形形態を図-9(b)に示す。

$\varepsilon=4.8\%$ 以降では、スペクトル分布はほとんど変化しなかった。

4.3 実験と解析の比較

実験と数値解析ともに、分岐以前では圧縮変形が卓越しており、膨張変形が除々に卓越してきた。分岐後は、実験では y 方向成分のスペクトルが卓越しているのに対し、解析では x 方向成分のスペクトルが卓越している。

$\varepsilon = 4.0\%$ において発生する第1次分岐に対応するスペクトルの y 方向成分は、式(5)と(7)に示すように、実験と解析とで非常によく整合していた。一方、 x 方向成分は式(4)と(6)に示すように、完全に異なっていた。このような差異が変形形態の差異にどのようなつながるかは、6節において考察する。

実験において見られた $\varepsilon = 4.8\%$, 5.6% における上下対称性を持つスペクトル成分の発現は、解析においては全く見られていない。これは、実験における2次分岐の発現を示唆している可能性がある。

5. ブロック対角化による分岐の検出

ブロック対角化原理(付録III参照)を用いて変形図(図-3)を対称性ごとに4つの変形画像に分解することにより、対称性喪失に伴う分岐を検出する。図-10に示す分解した4つの画像の内、上下左右 π 回転対称モードは、分岐以前のモードであり、残りの3つが分岐モードに対応する。

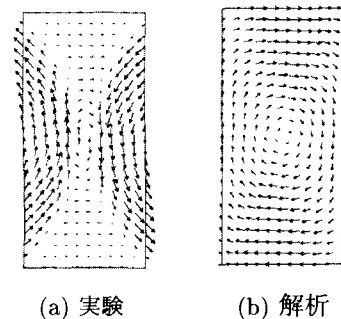


図-11 π 回転対称な分岐モード

5.1 実験

実験では、図-10(a)に示すように、 π 回転対称性を有するモードが $\varepsilon = 3.6\%$ で発生している。これは、

上下左右 π 回転対称 $\rightarrow \pi$ 回転対称

という対称性破壊分岐を起こしたことを示している。

このブロック分解図だけでは判然としない。しかし、図-8(a)のスペクトル分布において $\varepsilon = 4.8\%$ 以降に上下対称成分が発現したことから、2次分岐

π 回転対称 $\rightarrow$ 非対称

を起こして非対称化しているものと思われる。

5.2 解析

解析では、図-10(b)に示すように、分岐以前は上下左右 π 回転対称モードが卓越し、 $\varepsilon = 3.9\%$ 付近で、

上下左右 π 回転対称 $\rightarrow \pi$ 回転対称

と、対称性を喪失するような局所化を引き起こしている。その後は π 回転対称性を保ちながら変形している。

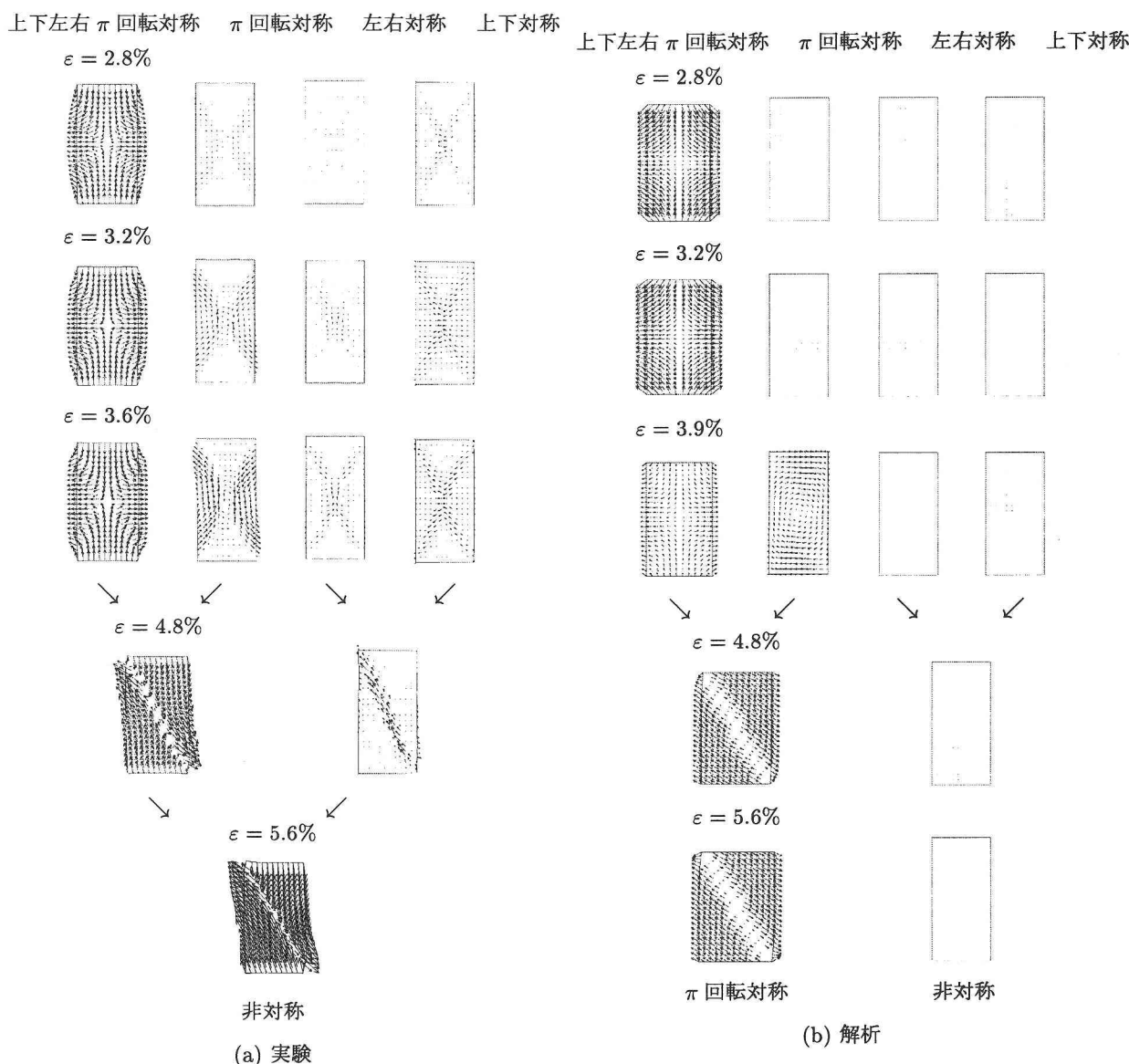


図-10 変形速度分布のブロック分解

5.3 実験と解析の比較

実験、数値解析ともに $\varepsilon = 4\%$ (分岐点) で π 回転対称性を有する変形が急激に発生し、対称性を喪失するような変形の局所化が起こっているという点では比較的よく再現されている。しかし、 π 回転対称な変形モード、すなわち分岐モードは、図-11 に示すように、実験と解析とは大きく異なっている。実験では、2つの渦がぶつかり合うことにより、せん断を引き起こしている。一方、解析では、大きな1個の渦を形成しており、せん断を引き起こしていない。

実験においては、 π 回転対称性を有する変形に加えて上下対称性または左右対称性を持つモードの発生による第2次分岐により非対称化している。数値解析では対称性が完全に喪失されるところまではシミュレーションできていないことが確認できた。

6. 本手法による変形の進行状況の比較

実験における変形モードの経時変化を図-12(a) にコンター図で示し、本手法により明らかになった変形進行状況を図-13(a) に示す。平面ひずみ試験では、圧縮変形から、中央部が先行する形で体積膨張・軟化が進行し、膨張速度が最大になる $\varepsilon_a = 4\%$ 付近で、分岐が発現し、変形の局所化に伴い急激に強度が低下する。その後、局所化のさらなる進展に伴い供試体の形状が除々に崩壊し、「袈裟切り」状のせん断帯が形成される。

解析における変形モードのコンター経時変化を図-12(b) に示し、本手法により明らかになった変形進行状況の物理的解釈を図-13(b) に示す。圧縮変形から、中央部が先行する形で体積膨張・軟化が進行し、膨張速度が最大になる $\varepsilon_a = 4\%$ 付近で、分岐が発現するという所までは、実験とよく整合しており、ピーク強度も

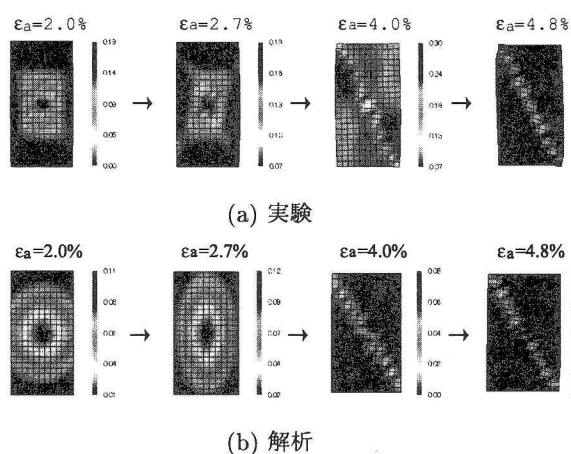


図-12 変形モードの経時変化

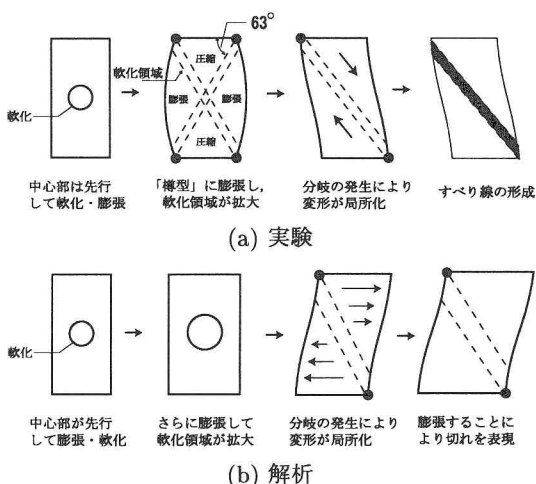


図-13 変形局所化の進行状況

再現できている。

図-11 に示すように、実験と解析における分岐モードは異なっており、この差異がその後の変形形態の違いにつながっている。解析では、局所的に膨張することによって擬似的にせん断領域を表現しており、せん断変形の局所化は表現できていない。また、図-5 に示すように、荷重のピーク後において強度が実験結果と合わないのは、軟化の度合いやせん断帯形成の違いに加えて分岐モードの違いも要因となっているものと思われる。

また、分岐点以降で発生する変形形態は、 y 方向成分についてはほぼ一致している。ところが、 x 方向成分については、実験では、分岐点で膨張変形が体積変化が無い状態まで減少するのに対して、数値解析では、分岐点で圧縮変形が低下し、急激な膨張を初めるといった差異があることが明らかとなった。また分岐により誘発される変形においても、 x 方向の方が卓越しているおり、その主要な変形形態も実験と異なっていることが確認できた。

7. 結論

現行法による実験と数値解析との比較は、応力ひずみ曲線などの、強度に着目したものが主流であった。そのため強度に関しては比較的精度の良い数値解析手法が提案されているが、変形という尺度においては、課題が残されているのが現状である。さらに、上述したような変形図だけの比較では、数値解析がどの程度実験結果を再現している、何がどの程度再現できていないのかということが理解しづらいという問題もある。

本研究では、拡散型分岐モードの発現により、対称性が喪失し、せん断帯の形成が誘発されていることが確認できた。また、実験と解析における分岐モードの違いが、結果として現れる変形挙動に大きな違いをもたらすことが明らかになった。本手法は様々な数値解析や実験に適用可能であり、実験における変形メカニズムとの整合性を持つ数値解析手法の検討に有効であり、数値解析の高度化に貢献できるものと思われる。

参考文献

- 1) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials: Engineering Use of Group-Theoretic Bifurcation Theory*, Appl. Math. Sci. Ser. 149, Springer-Verlag, New York NY, 2002.
- 2) Ikeda, K., Yamakawa, Y., and Tsutsumi, S.: Simulation and interpretation of diffuse mode bifurcation of elastoplastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 51, No. 9, pp. 1649–1673, 2003.
- 3) Otani, J., Mukunoki, T., Obara, Y.: Application of X-Ray CT Method for Characterization of Failure in Solids, *Soils and Foundations*, Vol. 40, No.2, pp. 111–118, 2000.
- 4) Matsushima, T., Saomoto, H., Uesugi, K., Tsuchiyama, A., and Nakano, T.: Detection of 3D irregular grain shape of Toyoura sand at SPring-8, *International Workshop on X-ray CT for Geomaterials*, pp. 107–112, 2003.
- 5) Marelllo, S., Lenoir, N., Viggiani, G., Besuelle, P., Desrues, J., and di Michiel, M.: Shear banding in plain strain compression of Beaucaire Marl studied through post-mortem X-ray micro tomography, *International Workshop on X-ray CT for Geomaterials*, pp. 133–140, 2003.
- 6) Alshibli, K.A., Sture, S., Batiste, N., and Lankton, M.: Application of computed tomography to characterize strain localization in granular materials, *International Workshop on X-ray CT for Geomaterials*, pp. 141–147, 2003.
- 7) Horii, H., Takamatsu, K., Inoue, J., and Sasaki, N.: Measurement of displacement field by “Matching method” and observation of strain localization in soft

rock, *Imaging Technologies: Techniques and Applications in Civil Engineering*, ASCE, pp. 1-19, 1997.

- 8) 上野 勝利, 高島 伸哉, 望月 秋利, 馬 陰峰: 画像解析による簡便な砂の変位場計測法, 土木学会論文集, No. 666, III-53, pp. 339-344, 2000.
- 9) 財団法人災害科学研究所, 徳島大学工学部基礎工学研究室, 画像解析による地盤の変位場解析の模型実験への適用に関する研究, 西松建設株式会社受託研究平成 13 年度報告書, 2002.
- 10) Murota, K. and Ikeda, K.: Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 12, No. 2, pp. 273-297, 1991.
- 11) Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K.: Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 29, No. 22, pp. 2779-2793, 1992.
- 12) 池田 清宏, 市村 強, 高村 浩之, 須藤 良清, 堤 成一郎: 平面ひずみ供試体の変形挙動の分岐メカニズムに基づく画像処理法, 土木学会論文集, Vol. 757 (III-66), pp. 167-176, 2004.
- 13) Hill, R. and Hutchinson, J.W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, No. 4-5, pp. 239-264, 1975.
- 14) 山川 優樹, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動, 土木学会論文集, Vol. 701 (III-58), pp. 73-86, 2002.
- 15) Murota, K., Ikeda, K., and Terada, K.: Bifurcation mechanism underlying echelon-mode formation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 170, No. 3-4, pp. 423-448, 1999.
- 16) Ikeda, K., Murakami, S., Saiki, I., Sano, I., and Oguma, N.: Image simulation of uniform materials subjected to recursive bifurcation, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 39, No. 17, pp. 1963-1999, 2001.

付録 I 長方形領域の分岐：幾何学的対称性

この章では, Ikeda¹⁾の長方形領域の分岐理論についてまとめる。

式 (2) の長方形領域の幾何学的対称性は, 次の 4 つの幾何学操作により表される。

$$\left. \begin{array}{l} e: \text{恒等変換} \\ \sigma_x: x \mapsto -x \\ \sigma_y: y \mapsto -y \\ \sigma_x \sigma_y: x \mapsto -x, y \mapsto -y \end{array} \right\} \quad (\text{I.1})$$

ここで, e は恒等操作, σ_x と σ_y はそれぞれ yz と zx 平面についての鏡映であり, $\sigma_x \sigma_y$ は z 軸についての π 回転を表している。つまり, この系の対称性は, 長方形領域の上下左右 π 回転対称性を表す 2 次の二面体群

$$D_2 = \{e, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_x \sigma_y\} \quad (\text{I.2})$$

に関する不変性として表される。ここに, $\{\cdot\}$ は, 括弧内の変換からなる, 対称性を表す群である。また, 群

D_2 の真部分群は,

$$C_1 = \{e\}, \{e, \sigma_x\}, \{e, \sigma_y\}, \{e, \sigma_x \sigma_y\} \quad (\text{I.3})$$

であり, D_2 の部分対称性を表す。長方形領域の変形後の対称性は, D_2 の真部分群により以下のように表される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{左右対称モード: } \{e, \sigma_x\} \\ \text{上下対称モード: } \{e, \sigma_y\} \\ \pi \text{ 回転対称モード: } \{e, \sigma_x \sigma_y\} \\ \text{非対称モード: } \{e\} \end{array} \right\} \quad (\text{I.4})$$

群 D_2 の既約表現は,

$$(+,+), (+,-), (-,+), (-,-) \quad (\text{I.5})$$

により与えられる。ここに, 各既約表現は,

$$\begin{array}{ll} T^{(+,+)}(\sigma_x) = 1 & T^{(+,+)}(\sigma_y) = 1 \\ T^{(+,-)}(\sigma_x) = 1 & T^{(+,-)}(\sigma_y) = -1 \\ T^{(-,+)}(\sigma_x) = -1 & T^{(-,+)}(\sigma_y) = 1 \\ T^{(-,-)}(\sigma_x) = -1 & T^{(-,-)}(\sigma_y) = -1 \end{array} \quad (\text{I.6})$$

により定義される。

群 D_2 に同変な系の支配方程式の解空間 X は,

$$X = X^{(+,+)} \oplus X^{(+,-)} \oplus X^{(-,+)} \oplus X^{(-,-)} \quad (\text{I.7})$$

と, 4 つの空間の直和に分解 (isotypic decomposition) される。ここに,

- $X^{(+,+)}$ は上下左右 π 回転対称な解の空間
- $X^{(+,-)}$ は上下対称な解の空間
- $X^{(-,+)}$ は左右対称な解の空間
- $X^{(-,-)}$ は π 回転対称な解の空間

である。

群 D_2 に同変な系の接線剛性行列は, 適当な座標変換行列 H により,

$$H^T K_t H = \begin{pmatrix} \tilde{K}_t^{(+,+)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_t^{(+,-)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K}_t^{(-,+)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_t^{(-,-)} \end{pmatrix} \quad (\text{I.8})$$

というブロック対角形となる。

付録 II 分岐の仕組み

式 (I.8) のブロック対角形より, この系の解は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{通常点: } \det \tilde{K}_t^\mu \neq 0, \\ \quad \mu = (+,+), (+,-), (-,+), \text{ and } (-,-) \\ f \text{ の極大・極小点: } \det \tilde{K}_t^{(+,+)} \neq 0 \\ \text{分岐点: } \det \tilde{K}_t^\mu = 0, \\ \quad \mu = (+,-), (-,+), \text{ or } (-,-) \end{array} \right. \quad (\text{I.9})$$

と分類される。

D_2 不変な系は、分岐するまでは、上下左右 π 回転対称性を保つ。一方、第 1 次分岐後は、上下左右 π 回転対称性を持つ解と上下対称性、左右対称性、 π 回転対称性のいずれかの対称性を持つ分岐解が混ざり、分岐後の解は、上下対称または左右対称または π 回転対称となる。さらに、第 2 次分岐を起こす場合は、解は非対称となる。ゆえに、この系の多段階の分岐の仕組みは、

$$D_2 = \{e, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_x \sigma_y\} \begin{array}{ccc} \nearrow & \{e, \sigma_x\} & \searrow \\ \rightarrow & \{e, \sigma_y\} & \rightarrow \\ \searrow & \{e, \sigma_x \sigma_y\} & \nearrow \end{array} \rightarrow \{e\} \quad (\text{I.10})$$

により表され、分岐は 1 回または 2 回起こる。幾何学的対称性だけを持つ長方形領域に関する分岐の仕組みの模式図を図-1 に示す。図中の実線が式 (1) に相当している。

付録 II 長方形領域の分岐：周期対称性

Hill and Hutchinson¹³⁾ は、フーリエモード (harmonic mode) が、せん断線分岐モードと並んで、均質な領域の分岐モードであることを示している。本研究で対象とする長方形供試体では、端面摩擦なしの理想的な状況では、長方形を保ったまま変形でき、均質な状態を保てることから、拡散型 (harmonic) モードが分岐モードとなる。このため、均質な状態から図-9 に示すような拡散型モードへの移行も分岐により引き起こされる可能性がある。

対象とする 2 次元長方形領域を、

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\} \quad (\text{II.1})$$

と x と y 方向に 2 倍に拡張する。この領域において、式 (3) のフーリエ級数は、2 重周期関数となる。

この拡張した領域 (II.1) の上で、周期境界条件を満足するベクトル場 (u_x, u_y) を考える。

このフーリエモードは既約表現 (ブロック) 毎に分解される。具体的には、波数 (n_x, n_y) が同一のフーリエモードが同一の既約表現 (ブロック) に対応する^{15), 16)}。すなわち、 $(n_x, n_y = 0, 1, \dots)$ に対しては、

$$\begin{cases} (\sin n_x x \cdot \cos n_y y, 0) \\ (0, \cos n_x x \cdot \sin n_y y) \\ (\sin n_x x \cdot \sin n_y y, 0) \\ (0, \cos n_x x \cdot \cos n_y y) \\ (\cos n_x x \cdot \cos n_y y, 0) \\ (0, \sin n_x x \cdot \sin n_y y) \\ (\cos n_x x \cdot \sin n_y y, 0) \\ (0, \sin n_x x \cdot \cos n_y y) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

という 8 個のフーリエモードが同一の既約表現 (ブロック) に対応する。ただし、 $n_x = 0, n_y \geq 1$ または $n_y = 0,$

$n_x \geq 1$ に対しては、4 個のフーリエモードが同一の既約表現 (ブロック) に対応する。この 4 個あるいは 8 個のフーリエモードを重ね合わせたものが、ある一つの分岐解となる。この分岐は、均質状態から harmonic mode による分岐に相当する。

このような理由により、フーリエモードはそれぞれ上下左右 π 回転対称、 π 回転対称、左右対称、上下対称性の 4 つの対称性にブロック分解しておく。この分解は式 (3) の 8 個のフーリエモードを

$$\begin{aligned} \text{上下左右 } \pi \text{ 回転対称} & \begin{cases} (\sin n_x x \cdot \cos n_y y, 0) \\ (0, \cos n_x x \cdot \sin n_y y) \end{cases} \\ \text{左右対称} & \begin{cases} (\sin n_x x \cdot \sin n_y y, 0) \\ (0, \cos n_x x \cdot \cos n_y y) \end{cases} \\ \text{上下対称} & \begin{cases} (\cos n_x x \cdot \cos n_y y, 0) \\ (0, \sin n_x x \cdot \sin n_y y) \end{cases} \\ \pi \text{ 回転対称} & \begin{cases} (\cos n_x x \cdot \sin n_y y, 0) \\ (0, \cos n_x x \cdot \sin n_y y) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

$(n_x, n_y = 0, 1, \dots)$ と分解することに対応している。

付録 III ブロック対角化原理による変形図のブロック分解

式 (I.8) の局所的座標変換行列 H は、

$$H = (H^{(+,+)}, H^{(+,-)}, H^{(-,+)}, H^{(-,-)}) \quad (\text{III.1})$$

と既約表現毎に分解される。

図 14 に示すように、 D_2 不変な離散系の節点は、「0」と「1H」と「1V」と「2」という 4 種類の軌道により構成される。

- 軌道 0 は、鏡映軸である y 軸上の節点 1 個からなる。
- 軌道 1H は鏡映軸である x 軸を挟んで鏡映の位置にある 2 個の節点からなる。
- 軌道 1V は鏡映軸である y 軸を挟んで鏡映の位置にある 2 個の節点からなる。
- 軌道 2 は鏡映軸である x 軸と y 軸を挟んで鏡映の位置にある 4 個の節点からなる。

例えば、図 14 に示す上下左右 π 回転対称な離散系は、1 個の軌道 0 と 1 個の軌道 1H と 1 個の軌道 1V と 1 個の軌道 2 に分解できる。

以下、変位としては、 (x, y) 平面内の並進変位を考え、各軌道毎に座標変換行列を組み立てる。節点 i の (x, y) 方向の変位成分を $(u_i, v_i)^T$ ($i = 1, \dots, N$) とおく。

軌道 0 に対する座標変換行列は、

$$H^{(+,-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H^{(-,+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、軌道 1V に対する座標変換行列は、

$$H^{(+,+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H^{(+,-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H^{(-,+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H^{(-,-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。軌道 1H に対する座標変換行列は、

$$H^{(+,+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H^{(+,-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H^{(-,+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H^{(-,-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、軌道 2 に対する座標変換行列は、

$$H^{(+,+)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{(+,-)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^{(-,+)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{(-,-)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

上記の座標変換行列 H の列ベクトルが表す節点の変形を、図 15 に図示する。

付録 IV 試験法

実験では、土粒子密度 $\rho_s = 2.639(\text{g}/\text{cm}^3)$ の豊浦砂を用いた。土質工学会基準に準拠した試験により求めた最大間隙比は $e_{\max} = 0.978$ ，最小間隙比は $e_{\min} = 0.611$ である。図 16 に粒度分布を示す。

豊浦砂を水で洗浄し、ほこりを取り除いた後に炉乾燥したものを試料として用いた。できるだけ均質な供試体とするために、試料は供試体の高さ方向に 3 層に分割し、各層で落下高さが一定となるように試料を詰めた。相対密度 $83 \pm 2\%$ の比較的密な供試体である。供試体は冷凍することによって作製した。

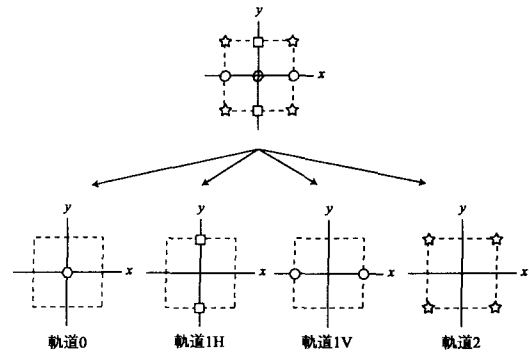


図-14 D_2 不変な離散系の軌道の分解の例

供試体形状としては、図 17 に示すような幅 $W_0 = 5\text{ cm}$ ，厚さ $T = 2\text{ cm}$ ，高さ $H_0 = 10\text{ cm}$ の直方体を用いた。用いた供試体の飽和度はいずれも約 92% である。

図 18 に示す、一面せん断試験機を改良したものを実験装置として用いた。実験は排水試験であり、両端部からの排水を行なっている。透明なアクリル板 2 枚を水平に設置し、これらの間に 2 cm の空間を常時保って、アクリル板の両側に金属棒を挟んで固定した。ラテックス製の極薄のゴム膜で供試体を包み、さらにグリースを利用して供試体上下の端面摩擦の影響をできる限り低減することにより、摩擦なしの境界条件とした。モーターを一定速度で稼働させてロードセルと載荷板を押すことにより供試体にせん断力を与えた。

まず、冷凍した供試体をセットし、加圧板が適度に可動する範囲でボルトを締め、アクリル板を固定する。側圧が供試体に等方に行き渡るように水圧を 29.4 kPa に上げ、供試体が溶けるのを待つ。さらに側圧を 49.0 kPa に上げ、以後一定に保つ。軸圧縮（せん断）を開始し、せん断ひずみ速度は 0.10%/min と設定し、0.10% 間隔で軸ひずみ 19% まで写真を撮影する。撮影にはデジタルカメラを使用しており、画像の解像度は 2592×1944 (pixel) である。

付録 V PIV による供試体変形流速ベクトルの取得

本研究では、PIV により供試体画像から流速ベクトルを取得した。実際の手順は、両端からの載荷によるせん断ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_a = 0.10\%/\text{min}$ の平面ひずみ試験中に、デジタルカメラを用いて 1 分間隔で 190 枚の供試体画像撮影する。次に、撮影された供試体画像から、PIV を用いて供試体内部の変位速度ベクトル分布を求める。

今回用いた高さ 10 cm の供試体においては、供試体は 1740×870 (pixel) で表されており、1 (pixel) は、0.057 mm に相当する。今回用いた豊浦砂の粒径平均は約 0.175 mm であり、砂粒子は 3 (pixel) で表現されてい

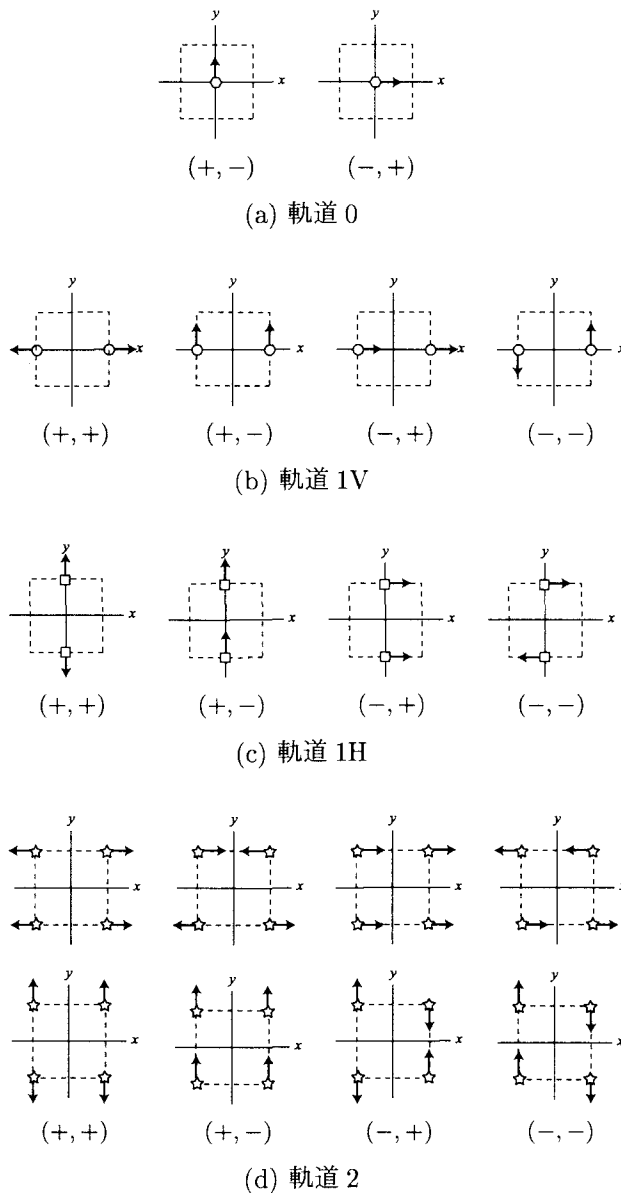


図-15 座標変換行列 H の列ベクトルが表す節点の変形

る。しかし、本研究で用いたデジタルカメラによって取得した画像では、粒子を特定することはできず、PIVによって追跡できる最小の粒子集合体は約 65×65 (pixel) の色むらパターンである⁴。

PIVにおいて追跡する2時刻間のパターンの移動量は、3~5pixel程度にすると比較的誤ベクトルが少なくなり、精度が向上することが確認されている。本研究で行った平面ひずみ試験においては、1分間に粒子は約 $0.05(\text{mm}/\text{min})$ 移動することになる。そこ1分間隔で撮影した画像を4枚間隔で追跡することで、2時刻間の移動量が3~5pixelとなるようにした。さらに、4ステップ間隔で誤ベクトルの平滑化処理を行った。

⁴ 比較する色むらパターンを 65×65 (pixel) よりも小さくしてしまうと、追跡が困難になることを確認している。

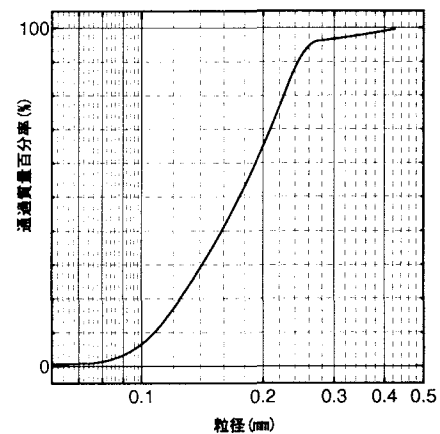


図-16 粒径加積曲線

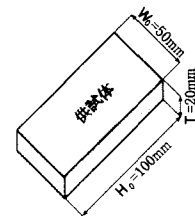


図-17 平面ひずみ供試体

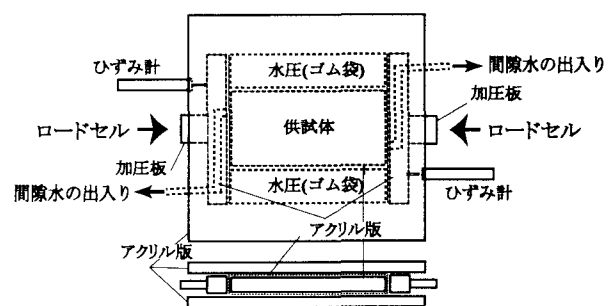


図-18 実験装置図