

混合型剛塑性有限要素法による摩擦性材料の支持力解析

Bearing Capacity Characteristics of Frictional Materials Estimated by Hybrid Rigid Plastic Finite Element Method

小林俊一*・酒井拓磨**・田村 武***

Shun-ichi KOBAYASHI, Takuma SAKAI, Takeshi TAMURA

*正会員 博士(工学) 京都大学助手 大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**修士(工学) 東海旅客鉄道 (〒450-6101 名古屋市中村区名駅 1-1-4 J R セントラルタワーズ)

***フェロー 工博 京都大学教授 大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

Rigid plastic analysis is widely used for the analyses of metal forming process or bearing capacity characteristics. From the mathematical point of view, rigid plastic analysis essentially belongs to convex programming. In this context, one of the authors proposed a hybrid type rigid plastic finite element method based on the primal dual interior point method (PDRPFEM) as an efficient numerical tool. In this paper, PDRPFEM is extended to more general rigid plastic boundary value problems including dead loads which is independent of a load factor and frictional materials. Formulation of this extension is explained in details. Numerical performance of this extension is also investigated in comparison with the previous analytical solutions.

Key Words : rigid plastic analysis, finite element method, interior point method, bearing capacity characteristics frictional material

1. はじめに

塑性加工や地盤の支持力問題など、物体の塑性変形が卓越する境界値問題は、しばしば弾性変形を無視した剛塑性境界値問題として解かれる。この解析法を剛塑性解析と呼ぶ。剛塑性解析と弾塑性解析とを比較すると、剛塑性解析は対象問題の終局状態を評価する手法であり、

- 初期応力分布を知る必要がない
- 荷重係数が解として得られるので工学的に理解しやすい

といった特徴がある。つまり、対象問題の挙動を時系列で詳細に評価することには不向きであるが、最終的な塑性崩壊状態を評価するのに適している。

剛塑性解析法の指導原理は極限定理である。極限定理は静力学定理(下界定理)と運動学定理(上界定理)から構成され、これらは本質的には剛塑性境界値問題の凸性を規定する最大塑性仕事の原理¹⁾あるいはそれと等価な関連流れ則²⁾から導出される。また静力学定理と運動学定理は互いに双対の関係にある。

さて、剛塑性有限要素法とは、有限要素法による空間離散化を剛塑性解析法に持ち込み、システムチェックに剛塑性境界値問題を解く方法である。この方法はもともと塑性加工の分野で開発され³⁾、実際に広く実用に使われている。

これまで多くの剛塑性有限要素法は上界法に基づく運動学的方法として定式化されてきた。これに対して、剛塑性境界値問題の双対性に着目し、凸計画問題の数値解析法の観点から、内点法を用いて主双対両方の問題を同時に解く解析法の研究が進められつつある⁴⁾⁵⁾。

筆者の一人も、剛塑性解析法の数理構造を Lagrangian 双対理論の立場から整理し、主双対内点法による解法アルゴリズムを用いた混合型剛塑性有限要素法 (Primal Dual Rigid Plastic Finite Element Method)⁶⁾を提案している。さらに PDRPFEM を用いて、Tresca 材料の剛塑性境界値問題を具体的に解き、その有効性を示している。

また PDRPFEM を従来の上界法に基づく剛塑性有限要素法と比較すると以下のような特徴を有する。

- 従来の方法では、定式化の段階で全領域に剛塑性構成式(応力～塑性ひずみ速度関係)が成立すると仮定している。したがって、剛体域では 0/0 の不定形が現われるので数値解析上問題が生じる。実際の解析では、塑性ひずみ速度に適切な閾値を仮定し、近似的に剛体域 / 塑性域の判別を行うことにより、この問題に工学的に対処している。また、この閾値の設定は数値解析を通して決めるのが一般的である。これに対して、PDRPFEM では後述するように、相補性条件が課されるので、これを用いて剛体域 / 塑性域を判別することが可能である。つまり、定式化の中に剛体域 / 塑性域を判別する制約条件をきちんと組み込まれている。
- 主双対内点法は、もともと大規模な線形計画問題の高速解法として発展してきた経緯を有する。今日では、大規模線形計画問題に対しては、内点法は従来のシンプレックス法を遥かに凌駕する高速数値解法として評価が定着している。本論文で議論する PDRPFEM は、この主双対内点法の数理的な特徴を組み込んだ定式化を行っているため、やはり同様に大規模な最適化問題に対して有利な数値解析手法であると考えられる。この特徴ゆえ

† Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

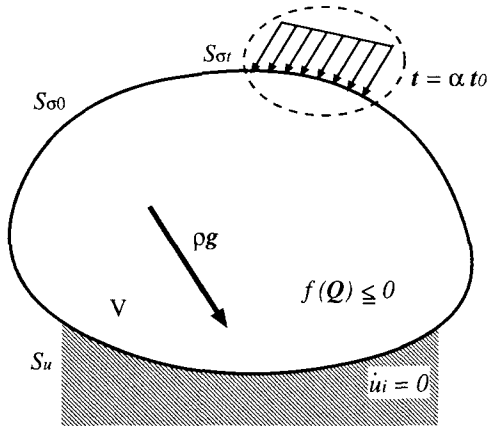


図-1 対象とする剛塑性境界値問題

に、3次元問題や細かなメッシュ分割など未知量が増加する大規模な問題に対して、従来の剛塑性有限要素法よりも数値解析上有利となることが予想される。

さて、本研究では、PDRPFEMを荷重係数によらない死荷重を含んだ剛塑性境界値問題に拡張し、その定式化を示す。さらに、せん断強度が拘束圧の関数となる摩擦性材料の支持力問題に対してPDRPFEMを適用し、既往の解析解と比較してその有効性を検証する。

2. 極限解析法の双対性

この節では混合型剛塑性有限要素法を定式化する準備として、小林(2003)⁶⁾に従って、対象となる剛塑性境界値問題の数理構造をまとめる。既往の文献⁶⁾との相違点は、荷重係数に依らない死荷重を考慮した剛塑性境界値問題を扱っていることである。

2.1 対象とする剛塑性境界値問題

対象とする剛塑性境界値問題を図-1に示す。材料は降伏関数 $f(Q)$ に従う剛完全塑性材料とする。ここに Q は応力である。与えられる境界条件は以下の3つ、すなわち境界 S_u で固定境界（斉次 Dirichlet）条件、境界 S_{σ_0} で表面力がゼロの応力境界（斉次 Neumann）条件、境界 S_{σ_t} で表面力 $t = \alpha t_0$ の応力境界（非斉次 Neumann）条件の和 $S = S_u \cup S_{\sigma_0} \cup S_{\sigma_t}$ を考える。ここに t_0 は基準となる表面力、 α は荷重係数である。また物体力として自重による死荷重 ρg を考える。この死荷重は荷重係数とは独立であることに注意する。

このような剛塑性境界値問題に対して、系が支持できる最大の表面力 $t = \alpha t_0$ に対応する荷重係数 α を求める最適化問題を考える。

2.2 静的許容な応力場

最初に、釣合系の応力場の一般的な表現法を考える。まず、系が線形弾性挙動を示すと仮定したときの応力場を考える。外力として、基準となる表面力 t_0 だけが作用した場合の仮想線形弾性応力を Q_0^E とする。また同様に物体力 ρg だけが作用した場合の仮想線形弾性応力を

Q_b^E とする。ここで、外力として表面力 $t = \alpha t_0$ と物体力 ρg を考えれば、仮想線形弾性応力場 $(\alpha Q_0^E + Q_b^E)$ は明らかに釣合系を構成する。また、言うまでもなく、仮想線形弾性応力場は与えられた外力に対して一意に決められる。

一方、表面力および物体力がゼロの場合に釣合う応力場を残留応力場と言い、 Q^r で表す。ここで有限要素による空間離散化を行い、残留応力場が満たすべき釣合式を弱形式で表現すると以下の式が得られる。

$$\int_V B'^T Q^r dV = 0 \quad (1)$$

ここにテンソル B' は有限要素法に現れる B -マトリクスから斉次 Dirichlet 条件にあたる節点の成分を差し引いたテンソル、右辺のゼロベクトル 0 は Neumann 条件にあたる成分だけを集めた外力ベクトルである。本論文では、積分点を利用して応力やひずみ速度の空間離散化を行うので、以後は式(1)を単に

$$B'^T Q^r = 0 \quad (2)$$

と表記する。ここにベクトル Q^r は積分点で空間離散化された残留応力場、テンソル B' は数値積分によるヤコビアンと重みを考慮して代数的に表現した B -マトリクスであることに注意する。なお、言うまでもないが、静定問題を除いては、残留応力場は一意に決められない。

ここで、釣合式の線形性に着目すれば、仮想線形弾性応力場とゼロ外力に釣合う残留応力場の和で表される応力場 Q が、釣合系の応力場を表す一般的な表現となっていることが分かる。

$$Q = \alpha Q_0^E + Q_b^E + Q^r \quad (3)$$

次に降伏条件について考えてみよう。対象とする材料の剛塑性挙動が、応力空間内の原点を含む凸な降伏曲面 f によって表せると仮定する。すなわち、応力状態 Q が降伏曲面内 $f(Q) < 0$ にあれば、材料は剛体挙動を示し、応力状態 Q が降伏曲面上 $f(Q) = 0$ にあれば、材料は塑性挙動を示す。

ここでは、積分点による離散化を考慮して、積分点 i ごとに降伏条件を照査する。非負のスラック変数 $s_i \geq 0$ を導入すれば、降伏条件を破らない条件は以下の制約条件として表される。

$$f_i(Q) + s_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad \forall i \in V \quad (4)$$

よって、静的許容な応力場、すなわち釣合系の応力場でしかも領域の至るところで降伏条件を破らないような応力場は、制約条件(2), (3), (4)を満たす応力場である。

2.3 Lagrangian

応力場に静的許容の制約条件を課した以下の Lagrangian L を考える。

$$L(\alpha, Q, Q^r, s_i, \lambda_i, \kappa, \mu, t_i) = \begin{cases} \alpha + \kappa \cdot (B'^T Q^r) - \sum_i \lambda_i (f_i(Q) + s_i) \\ \quad + \mu \cdot (Q - \alpha Q_0^E - Q_b^E - Q^r) + \sum_i s_i t_i & \text{for } t_i \geq 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

ここに変数 λ_i は降伏条件を破らない制約 $f_i(Q) + s_i = 0$ に対応する Lagrange 乗数、変数 κ は残留応力場が釣合系であるための制約 $B'^T Q^r = 0$ に対応する Lagrange 乗数、変数 μ は応力の分解 $Q = \alpha Q_0^E + Q_b^E + Q^r$ に対応する Lagrange 乗数、変数 t_i はスラック変数の非負性 $s_i \geq 0$ に対応する Lagrange 乗数である。これらの Lagrange 乗数の力学的な意味については、上界法と関連するので、後ほど詳しく説明する。

2.4 下界法の導出

ここでは Lagrangian L の sup-inf 操作によって下界法を導出しておく。

まず、変数 $\lambda_i, \kappa, \mu, t_i$ に関する Lagrangian L の下限を考えると、以下の表現を得る。

$$\inf \{L | \lambda_i, \kappa, \mu, t_i\} = \alpha$$

$$\text{Sub. } \begin{cases} f_i(Q) + s_i = 0, s_i \geq 0, \forall i \\ B'^T Q^r = 0 \\ Q = \alpha Q_0^E + Q_b^E + Q^r \end{cases} \quad (6)$$

この下限操作に引き続いて、残りの変数 α, Q, Q^r, s_i について上限を考えると、以下のような最大化問題を得る。

$$\sup \{ \inf \{L | \lambda_i, \kappa, \mu, t_i\} | \alpha, Q, Q^r, s_i \}$$

$$= \sup \{ \alpha | \alpha, Q, Q^r, s_i \}$$

$$\text{Sub. } \begin{cases} f_i(Q) + s_i = 0, s_i \geq 0, \forall i \\ B'^T Q^r = 0 \\ Q = \alpha Q_0^E + Q_b^E + Q^r \end{cases} \quad (7)$$

これは静的許容な応力場の中で最も大きな荷重係数を求める最適化問題であり、下界法に他ならない。

2.5 上界法の導出

つぎに、下界法の導出方法とは上限と下限の操作順序を変え、Lagrangian L の inf-sup 操作から上界法を導出しておく。

まず、Lagrangian L の変数 α, Q, Q^r, s_i に関する上限をとるが、変数 Q に関する上限は陽な形で表現できない。そこで、最初に変数 α, Q^r, s_i に関する上限を

とる。

$$\sup \{L | \alpha, Q^r, s_i\} = \mu \cdot Q - \sum_i \lambda_i f_i(Q) - \mu \cdot Q_b^E$$

$$\text{Sub. } \begin{cases} \mu \cdot Q_0^E = 1 \\ B' \kappa = \mu \\ \lambda_i = t_i \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

つづいて式 (8) の変数 Q に関する上限を考え、その上限を関数 D で表す。

$$D(\mu, \lambda_i) = \sup \left\{ \mu \cdot Q - \sum_i \lambda_i f_i(Q) | Q \right\} \quad (9)$$

そうすると、Lagrangian L の変数 α, Q, Q^r, s_i に関する上限は形式的に以下のように書ける。

$$\sup \{L | \alpha, Q, Q^r, s_i\} = D(\mu, \lambda_i) - \mu \cdot Q_b^E$$

$$\text{Sub. } \begin{cases} \mu \cdot Q_0^E = 1 \\ B' \kappa = \mu \\ \lambda_i = t_i \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

式 (10) に現れる制約条件について、その力学的な意味を検討しておく。

制約条件 $B' \kappa = \mu$ は変位速度～ひずみ速度関係となっており、Lagrange 乗数 κ は節点変位速度、Lagrange 乗数 μ はひずみ速度を表す。さらに行列 B' の定義から分かるように、変数 μ には、Gauss 数値積分によるヤコビアンと重みの影響が含まれていることに注意する。

つぎに内積 $\mu \cdot Q_0^E$ の意味を考えると、これは釣合系の応力場 Q_0^E と適合系のひずみ速度場 μ による仮想的な内部仕事率であることが分かる。ここで、再度変数 μ には Gauss 数値積分によるヤコビアンと重みの影響が含まれていることを注意しておく。さらに、釣合系の応力場と適合系のひずみ速度場を用いているので、仮想仕事（率）の原理により、それは外部仕事率に等しいことが分かる。したがって、制約条件 $\mu \cdot Q_0^E = 1$ は、基準外力による釣合応力 Q_0^E と想定した適合系のひずみ速度場 μ がなす外部仕事率が 1 になること $\dot{W}_{ext0} = \mu \cdot Q_0^E = 1$ を意味する。これは外部仕事率の正規化と捉えることもできる。なお、外部仕事率および内部消散率が速度場について 1 次斉次性を持つことを考えれば、この正規化を行っても議論の一般性は失われないことに注意する。

さらに制約条件 $\lambda_i = t_i \geq 0$ は塑性乗数の非負性を表しており、Lagrange 乗数 λ_i は塑性乗数を表す。また Lagrange 乗数 t_i はスラック変数 s_i の非負性を表すために人為的に導入した変数で、力学的な意味は特ない。

さて、この上限操作に引き続いて、変数 $\lambda_i, \kappa, \mu, t_i$ に関する下限操作を考える。まず、変数 λ_i, t_i に関する下限をとる。制約条件 $\lambda_i = t_i \geq 0$ であることに注意

すると、以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} & \inf \{ D(\boldsymbol{\mu}, \lambda_i) \mid \lambda_i, t_i \} \\ &= \inf \{ D(\boldsymbol{\mu}, \lambda_i) \mid \forall \lambda_i = t_i \geq 0 \} \\ &= \begin{cases} \bar{D}(\boldsymbol{\mu}) = \sup \{ \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{Q} \} & \text{if } f_i(\boldsymbol{Q}) \leq 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

ここに関数 $\bar{D}(\boldsymbol{\mu})$ は定義より明らかに Hill の最大塑性仕事の原理¹⁾を表しており、内部消散率を表す。また、関数 $\bar{D}$ が応力 $\boldsymbol{Q}$ に関する上限操作の結果得られることに注意し、微分可能性を仮定してその停留条件を考えれば、関連流れ則が得られる。

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{Q}}, \lambda_i \geq 0 \quad (12)$$

また、関数 f_i が微分不可能な連続凸関数である場合でも、劣微分を用いることで同様の表現が可能である。具体的な表現については Koiter⁷⁾, Sewell⁸⁾ を参照されたい。

さて、さらに残りの変数 $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}$ についても下限をとると、以下の最適化問題を得る。

$$\begin{aligned} & \inf \{ \sup \{ L \mid \alpha, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}^r, s_i \} \mid \lambda_i, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}, t_i \} \\ &= \inf \{ \bar{D}(\boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{Q}_b^E \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\kappa} \} \\ \text{Sub. } & \begin{cases} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{Q}_0^E = 1 \\ \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\mu} \\ \lambda_i = t_i \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで関数 $\bar{D}$ の停留条件と関連流れ則 (12) の等価性を考慮すれば、式 (13) の最適化問題は、運動学的かつ塑性学的に許容な速度場の中で、関数 $\bar{D}(\boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{Q}_b^E$ の最小化を図る問題であり、上界法に他ならない。

2.6 双対ギャップと相補性条件

上界法の目的関数値と下界法の目的関数値の差を双対ギャップとよび、以下のように表される。

$$\bar{D}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) - \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{Q}_b^E - \underline{\alpha} \quad (14)$$

ここに $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ は上界法の変数であり、運動学的かつ塑性学的に許容な量である。一方、 $\underline{\alpha}$ は下界法の変数であり、静力学的かつ塑性学的に許容な量である。

ここで関数 $\bar{D}(\boldsymbol{\mu})$ の定義から、塑性乗数が正であるとき ($\lambda_i \geq 0$)、任意の静力学的かつ塑性学的に許容な応力場 $\boldsymbol{Q}$ に関して、以下の不等式を満足することに留意する。

$$\begin{aligned} \bar{D}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) &= \sup \left\{ \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{Q} - \sum_i \bar{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{Q}) \mid \boldsymbol{Q} \right\} \\ &\geq \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \underline{\boldsymbol{Q}} - \sum_i \bar{\lambda}_i f_i(\underline{\boldsymbol{Q}}) \end{aligned} \quad (15)$$

さて、不等式 (15) を用いて双対ギャップ (14) を整理

すると以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} & \bar{D}(\bar{\boldsymbol{\mu}}) - \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{Q}_b^E - \underline{\alpha} \\ &\geq \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \underline{\boldsymbol{Q}} - \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{Q}_b^E - \sum_i \bar{\lambda}_i f_i(\underline{\boldsymbol{Q}}) - \underline{\alpha} \\ &= \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\underline{\alpha} \boldsymbol{Q}_0^E + \underline{\boldsymbol{Q}}^r) + \sum_i \bar{\lambda}_i s_i - \underline{\alpha} \\ &= \underline{\alpha} (\bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{Q}_0^E - 1) + (\boldsymbol{B}'^T \underline{\boldsymbol{Q}}^r) \cdot \bar{\boldsymbol{\kappa}} + \sum_i \bar{\lambda}_i s_i \\ &= \sum_i \bar{\lambda}_i s_i \geq 0, \quad \bar{\lambda}_i \geq 0, s_i \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

この不等式 (16) は、常に双対ギャップは非負であることを意味しており、上界法の解が常に下界法の解を上回ることを表している。

さらに双対定理によれば、最適解のときに限って双対ギャップがゼロとなることが分かっている⁹⁾。したがって、最適解のときには以下の相補正条件が全ての積分点 i について成り立つことが分かる。

$$\lambda_i s_i = 0, \lambda_i \geq 0, s_i \geq 0 \quad \forall i \quad (17)$$

また、この相補性条件から積分点の状態、すなわち 塑性 / 剛体 / 中立 が判別できる。

3. 主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の定式化

全節の議論をもとにすると、既往の文献⁶⁾と全く同様の手続きにより、主双対内点法に基づく混合型の剛塑性有限要素法 (PDRPFEM) が定式化できる。

3.1 増分形方程式

まず解くべき方程式を以下に列挙する。

$$\boldsymbol{B}'^T \boldsymbol{Q}^r = 0 \quad (18)$$

$$\boldsymbol{Q} = \alpha \boldsymbol{Q}_0^E + \boldsymbol{Q}_b^E + \boldsymbol{Q}^r \quad (19)$$

$$f_i(\boldsymbol{Q}) + s_i = 0, s_i \geq 0 \quad \forall i \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{Q}}, \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{Q}_0^E = 1 \quad (22)$$

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\mu} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{s} = \varepsilon \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i), \boldsymbol{e} = (1, \dots, 1) \quad (24)$$

ここに式 (18), (19), (20) は、それぞれ残留応力場の釣合、応力の重ね合わせ、降伏条件を破らない条件を表しており、これらをまとめると静力学的および塑性学的に許容な応力場を表す。一方、式 (21), (22), (23) は、それぞれ関連流れ則、外部塑性仕事率の正規化、変位速度～ひずみ速度関係を表しており、これらをまとめると運動学的および塑性学的に許容な速度場を表す。また、式 (24) は相補性条件の近似値であり、スカラー量 ε はバリヤパラメータと呼ばれる正の単調減少列である。

主双対内点法では、このバリヤパラメータを十分小さな値に収束させることによって最適解に到達する収

束計算を行う。本研究ではバリエーションパラメータとして

$$\varepsilon = \left(\frac{\sum_i^{n_i} \lambda_i s_i}{n_i} \right)^\omega \quad (25)$$

を用いた。ここに n_i は全積分点数、 ω は収束性を制御するパラメータである。式 (25) は現時点での近似解による双対ギャップを全積分点数で割った平均値に、パラメータ ω の冪乗をとったものであり、相補性条件の全体的な満足度を示す指標となっている。なお、このパラメータ ω は数値実験によって決められるが、本研究では $\omega \approx 1.1$ を用いた。また計算が収束して最終的に最適解が得られる場合、この最適解はバリエーションパラメータの選び方には依らないことに注意しておく。

さて、Newton 法による収束計算によって最適解を求めるため、式 (18)~(24) を増分形に書き直す。さらに変数 ΔQ と $\Delta \mu$ を消去すると以下の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{B}' & \mathbf{C} & \mathbf{C}\mathbf{Q}_0^E & 0 \\ (\mathbf{E}^T \mathbf{Q}_0^E)^T & 0 & (\mathbf{C}\mathbf{Q}_0^E)^T & \mathbf{Q}_0^E \cdot \mathbf{C}\mathbf{Q}_0^E & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E}^T & \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_0^E & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{B}'^T & 0 & 0 \\ \mathbf{S} & 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta \kappa \\ \Delta Q^r \\ \Delta \alpha \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'\tilde{\kappa} - \mathbf{E}\tilde{\lambda} \\ 1 - \mathbf{Q}_0^E \cdot \mathbf{E}\tilde{\lambda} \\ -f(\tilde{Q}) - \tilde{s} \\ \mathbf{B}'^T \tilde{Q}^r \\ \varepsilon e - \tilde{\Lambda}\tilde{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \\ \tilde{r} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここに行列 $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$ はそれぞれ以下のように定義される。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial Q \partial Q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_{n_i} \frac{\partial^2 f_{n_i}}{\partial Q \partial Q} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial Q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\partial \tilde{f}_{n_i}}{\partial Q} \end{bmatrix} \quad (28)$$

なお $\tilde{\cdot}$ のついた量は、繰返し計算において現時点での近似解によって評価される量であることを示す。またベクトル $\mathbf{f}$, $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\lambda}$ は各積分点 i における値をまとめて表示したベクトル量、テンソル $\mathbf{S} = \text{diag}(s_i)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$ は対角項成分のみ非ゼロとなる行列である。

さらに逆行列 $\mathbf{S}^{-1} = \text{diag}(1/s_i)$ が容易に求まることから、以下の関係式を考慮して未知数を減らすことが可能である。

$$\Delta \lambda = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} (\mathbf{w} - \tilde{\Lambda} \Delta s) \quad (29)$$

$$\Delta s = \mathbf{r} - \mathbf{E}^T \Delta Q^r - \Delta \alpha (\mathbf{E}^T \mathbf{Q}_0^E) \quad (30)$$

最終的には式 (26) をさらに整理し、配列寸法を小さ

くした以下の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{L}\mathbf{Q}_0^E & -\mathbf{B}' \\ (\mathbf{L}\mathbf{Q}_0^E)^T & \mathbf{Q}_0^E \cdot \mathbf{L}\mathbf{Q}_0^E & 0 \\ -\mathbf{B}'^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q^r \\ \Delta \alpha \\ \Delta \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここに行列 $\mathbf{L}$, ベクトル $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^T = \mathbf{C} + \mathbf{E}\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E}^T \quad (32)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{E}\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{w} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{r}) \quad (33)$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \mathbf{Q}_0^E \cdot \mathbf{E}\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{w} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{r}) \quad (34)$$

方程式 (31) と従来の上界法に基づく剛塑性解析法を比較すれば、2次元問題で $2 \times n_i$ 個だけ変数が増加したに過ぎないことに注意する¹⁰⁾。つまり、主双対両方の問題を同時に解く場合でも、主双対内点法に従って関係式をうまく整理すれば、取り扱う変数がそのまま独立な未知数として増加するわけではない。さらに方程式 (31) は対称行列の解法ルーチンが使用できることも特徴である。

3.2 解の更新と収束判定

方程式 (31) を解き、さらに関係式 (29), (30) に代入すると、すべての未知数について解の更新方向が求められる。

次に解を更新するためのステップ幅 β を評価する必要がある。主双対内点法では、非負変数である塑性乗数 λ_i とスラック変数 s_i の非負性を満足する範囲で最大のステップ幅 β^* を選択する。ここでスラック変数 s_i については、降伏関数 f の非線形性を考慮して、更新された応力場の 1 次テーラー展開によって評価することとした。ここで更新された値を $\tilde{\cdot}$ で表せば、ステップ幅 β の満たすべき条件は以下の通りである。

$$\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i + \beta \Delta \lambda_i \geq 0 \quad (35)$$

$$\tilde{s}_i = -f_i(\tilde{Q}) - \beta \Delta Q$$

$$= -f_i(\tilde{Q}) - \beta \frac{\partial f_i}{\partial Q} \cdot (\Delta \alpha \mathbf{Q}_0^E + \Delta Q^r) \geq 0 \quad (36)$$

したがって、最大のステップ幅 β^* は制約条件 (35), (36) を満足する β の中で最大のものとなる。

$$\beta^* = \max \beta \quad (37)$$

Sub. eqs. (35), (36)

他の変数 Q^r , α , κ については式 (37) で求めたステップ幅 β^* と方程式 (31) の増分方向を用いて更新すればよい。

繰返し計算の収束は各積分点 i における近似的な相補性条件を照査して判定する。すなわち十分小さな正値 $\text{eps} > 0$ に対して、以下に示すように、全ての積分点で近似的な相補性条件が満足されておれば収束と判定する。

$$\lambda_i s_i \leq \text{eps}, \quad \forall i \quad (38)$$

もし計算結果が収束していなければ、現在の値を近似解として、同様の繰返し計算を継続する。

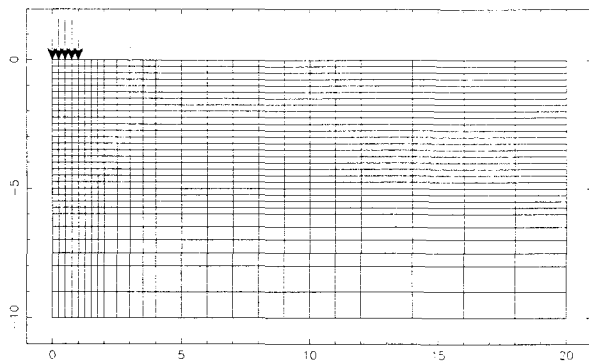


図-2 使用した有限要素メッシュ

3.3 得られる解の性質

最終的に収束して得られる解は、運動学的な制約条件、静力学的な制約条件、相補性条件を全て満足している正解（正確には空間離散化した問題に対する正解）である。

ただし剛体域における応力場については注意が必要である。剛体域での応力は、釣合式と降伏条件だけでは唯一には決定できないので、求められた残留応力場は静力学的な制約条件を満足する正解の1つでしかないことに注意する。言い替えれば、同じ荷重係数に対して、残留応力場が複数存在する可能性があるため、解析ではそれらのうちの1つを見つけているに過ぎない。したがって、従来の弾塑性有限要素解析などで得られる応力場と比較すると、PDRPFEMによる応力場の空間的な分布は、塑性域はともかくとして、剛体域ではかなり異なる分布形状を示す可能性が高い。これは、本解析による応力解が誤っているわけではないが、剛体域での応力場には自由度があるために、一般的にはその分布形状を唯一には決められないことを意味する。

なお、材料が弾塑性体であれば、直接法であっても文献¹¹⁾に示すように、残留応力場による補ひずみエネルギー最小という制約条件を課して、残留応力場を一意に決めることが可能となる。

上述の理由から、得られた応力解の塑性域での応力分布を議論することについては、力学的な意味は見出せない。したがって、本論文では、以後、得られた最適解のうち、荷重係数と速度場を取り扱うこととする。

4. 数値解析例

本論文の数値解析例は全て図-2の有限要素メッシュを使用した。変位境界条件は底面で固定、両側面でスライダ支持とする。地盤は自重 ρg のMohr-Coulomb材料（見かけの粘着力 c 、内部摩擦角 ϕ ）とする。図中の縦軸・横軸はメッシュの寸法を表すために無次元表示したものである。また鉛直荷重を対象とした解析のみを行うため、問題の対称性を考慮して対象領域の半分を解析する。基準荷重としては、材料上面の幅 $B=2$ の領域に一定の表面力 V_0 を載荷する。

要素は4節点の1次アイソパラメトリック要素を用い、弾性応力を評価する際には要素内 2×2 点で数値積分を行い、剛塑性解析では要素内1点で数値積分を

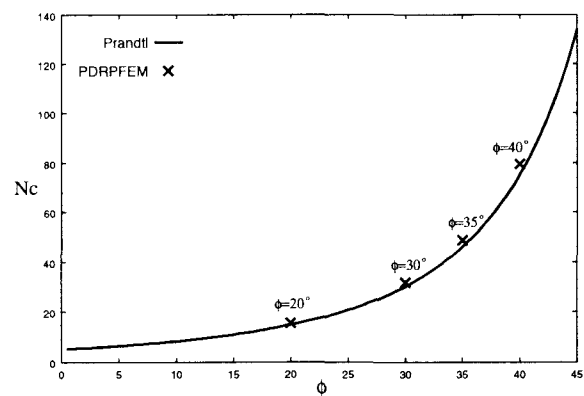


図-3 支持力係数 N_c : Prandtl 解と数値解析結果の比較

表-1 Prandtl 解と PDRPFEM による数値解の比較（自重なし、支持力係数 N_c ）

ϕ	20°	30°	35°	40°
$\frac{N_c^*}{N_c}$	1.046	1.051	1.054	1.056

$\bar{N}_c$: Prandtl 解 N_c^* : PDRPFEM による数値解

行った。また、降伏条件および流れ則の照査についても要素内1点で行った。これら、要素当たりの積分点および応力照査点の数については、文献⁶⁾に示すように、要素の持つ平均的な自由度と要素に課せられる制約条件数を勘案して決めた。つまり、運動学的な視点から見れば、4節点1次アイソパラメトリック要素では平均的に1要素当たり2自由度を有するので、要素内1点に制約条件として関連流れ則を課しても、1要素当たり平均1自由度の冗長性は確保されていることになる。一般的には、制約条件数が増加してこの冗長性が確保できなくなると、実行可能な解が見つからない可能性があることに注意する。

4.1 自重のない場合

鉛直荷重を受ける自重のない c, ϕ 材料の支持力問題についてはPrandtlの解析解¹²⁾が知られている。Prandtl解による支持力係数 $\bar{N}_c$ は解析的に

$$\bar{N}_c = \cot \phi \left[e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1 \right] \quad (39)$$

と表される。

このPrandtl解による支持力係数 $\bar{N}_c$ とPDRPFEMによる支持力係数 N_c を比較した結果を図-3に示す。また、Prandtl解の支持力係数とPDRPFEMによる支持力係数の比を表-1に示す。

図-3および表-1より、PDRPFEMによる数値解析結果は良好で解析解をよく評価していることが分かる。また、剛塑性有限要素法による数値解析では、有限要素による空間離散化のため幾何的な自由度が限定される。この制約のため、数値解析結果は実際の解析解よりも大きめの支持力を評価することが予想されるが、本数値解析結果もこの予想と矛盾しない。

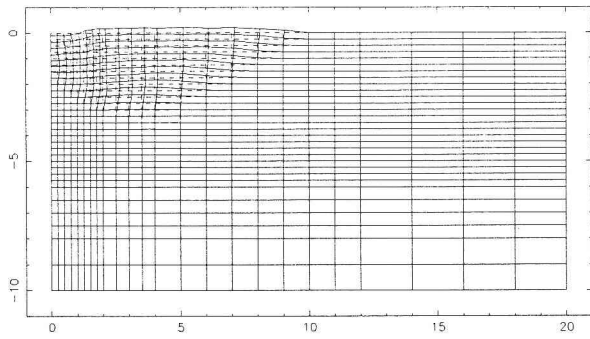


図-4 崩壊メカニズム ($\phi = 30^\circ$, 自重なし)

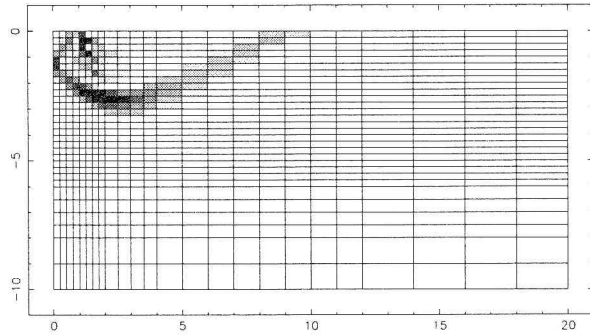


図-5 相当塑性ひずみ速度場 ($\phi = 30^\circ$, 自重なし)

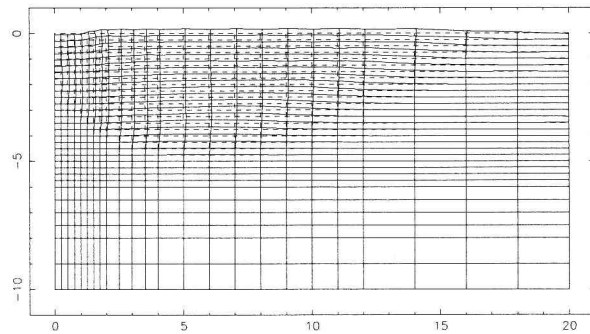


図-6 崩壊メカニズム ($\phi = 40^\circ$, 自重なし)

さらに、数値解析結果による崩壊時の速度場と相当塑性ひずみ速度場 $\bar{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}$ について、内部摩擦角 $\phi = 30^\circ$ の場合を図-4, 5 に、内部摩擦角 $\phi = 40^\circ$ の場合を図-6, 7 にそれぞれ示す。

これらの数値解析結果によれば、基礎底面直下には剛体の受働くさび領域が現われ、塑性変形を伴う遷移領域を経て、基礎側方の主働くさび領域に接続するような崩壊メカニズムが認められる。これは Prandtl 解のメカニズムと同様である。

4.2 自重のある場合

自重を考慮した Mohr-Coulomb 材料が表面鉛直载荷を受ける場合の支持力問題については、特性曲線法を利用した Cox の数値解析解¹³⁾ が良く知られている。一般に、特性曲線法を利用した解は、塑性域における応力の釣合条件と降伏条件は満足しているが、剛体域応

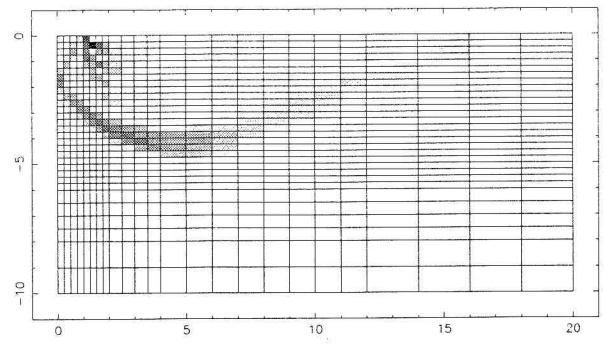


図-7 相当塑性ひずみ速度場 ($\phi = 40^\circ$, 自重なし)

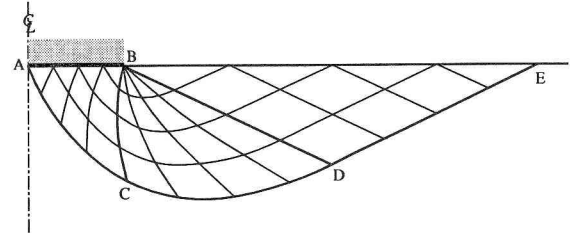


図-8 Cox(1962) の特性曲線場の例 ($\phi = 40^\circ$, $G=10$)

力場の静的許容性については検証していないため、不完全解と位置付けられることに注意しておく。本研究では、この特性曲線法による数値解と PDRPFEM による数値解の比較を行う。

Cox の数値解析解は、さまざまな内部摩擦角 ϕ と無次元パラメータ $G = \rho g B / (2c)$ のもとで、単位幅あたりの平均的な鉛直接地圧 q_0 を特性曲線法で求めている。ここに B は基礎幅、 c は見かけの粘着力である。無次元パラメータ G の性質は、 G が小さいほど粘着力の効果が発揮されて自重の影響が小さくなり、逆に G が大きいほど粘着力の効果が小さくなって自重の効果が出ることになる。また $G = 0$ のときは自重のない材料、 $G = \infty$ のときは粘着力のない材料に相当する。

Cox が求めた特性曲線場の一例を図-8 に示す。この図から、崩壊モードとしては基礎直下に左右半分ずつ受働域が現われ、遷移領域を経て、基礎側方の主働域に連なるメカニズムが出現することが分かる。このメカニズムは、基礎直下に一つの受働域が現われる Prandtl 解とは異なるメカニズムであり、しばしば Hill のメカニズム¹⁾ と呼ばれる。

ここでは以下の2点に着目して解の比較を行った。

1. Cox による無次元平均鉛直接地圧 q_0/c と PDRPFEM による単位幅あたりの無次元鉛直支持力 $V/(cB)$ の比較
2. 基礎中心から表面に出現した塑性域端までの距離 (AE) と基礎中心から基礎端部までの距離 (AB) の比 (AB, AE については図-8 を参照)

なお、前者は極限支持力の定量的な比較を、後者は塑性域の大きさを通して予測する崩壊メカニズムの比較を意図している。

Cox の特性曲線法による数値解析結果を表 2 に、一方、PDRPFEM による数値解析結果を表 3 に示す。

表-2 特性曲線法による数値解析結果 (Cox 1962)

	無次元平均鉛直地圧 q_0/c			
$\phi \backslash G$	0.01	0.1	1	10
0°	5.14	5.14	5.14	5.14
20°	14.87	15.2	17.9	37.8
30°	30.29	31.6	42.9	127
40°	76.13	83.0	139	574
	比 AE/AB			
$\phi \backslash G$	0.01	0.1	1	10
0°	2.00	2.00	2.00	2.00
20°	3.52	3.46	3.09	2.41
30°	5.27	5.09	4.31	3.36
40°	8.94	8.37	6.69	5.36

表-3 PDRPFEM による数値解析結果						
	単位幅当たり無次元鉛直支持力 $V/(cB)$					
$\phi \backslash G$	0.01	0.05	0.1	0.5	1	5
0°	5.31	5.31	5.31	5.31	5.31	5.31
20°	15.7	15.9	16.2	18.0	19.6	27.8
30°	32.2	33.3	34.6	40.8	46.8	68.6
40°	82.0	88.0	93.7	121	143	241
	比 AE/AB					
$\phi \backslash G$	0.01	0.05	0.1	0.5	1	5
0°	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
20°	6.0	6.0	6.0	4.0	3.5	2.5
30°	10.0	10.0	8.0	5.0	5.0	2.5
40°	18.0	16.0	11.0	8.0	6.0	5.0

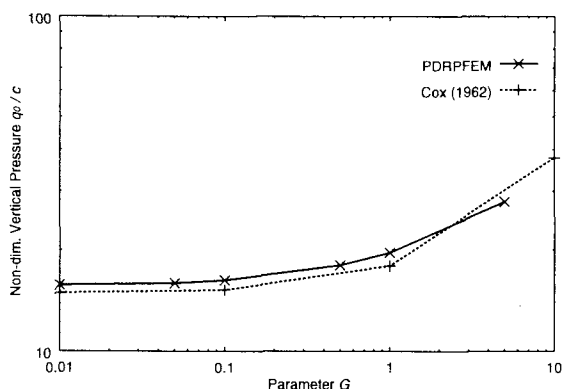


図-9 パラメータ G と鉛直支持力の関係 ($\phi = 20^\circ$)

さらに表-2, 3 を基にして、内部摩擦角が同一の場合にパラメータ G と無次元平均鉛直地圧 q_0/c あるいは単位幅当たり無次元鉛直支持力 $V/(cB)$ の関係を図-9、図-10、図-11 に示す。これらの結果によれば、PDRPFEM による解析結果は既往の特性曲線法の解と概ね良い一致を示す。しかしながら、内部摩擦角が相対的に大きく、しかも自重の効果が卓越する場合、すなわち内部摩擦角 $\phi = 30^\circ$ あるいは $\phi = 40^\circ$ でパラメータ $G = 5$ の場合には解を過小に評価する傾向がみ

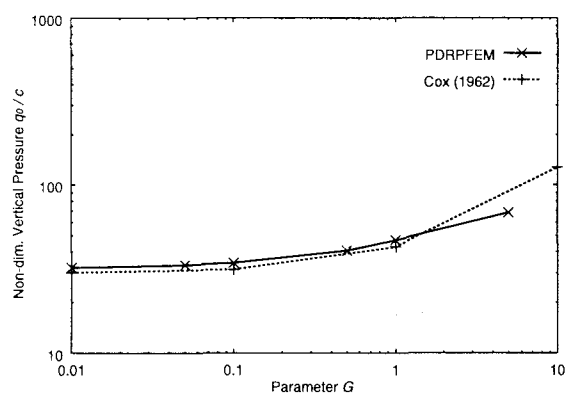


図-10 パラメータ G と鉛直支持力の関係 ($\phi = 30^\circ$)

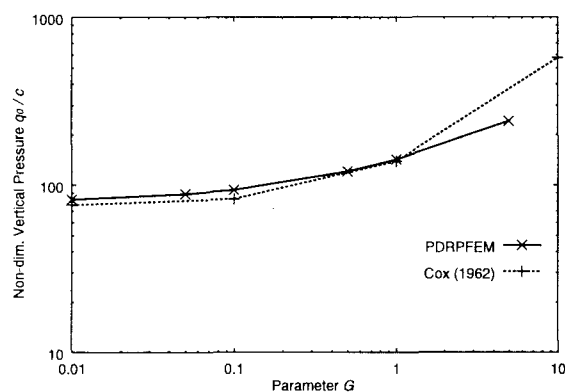


図-11 パラメータ G と鉛直支持力の関係 ($\phi = 40^\circ$)

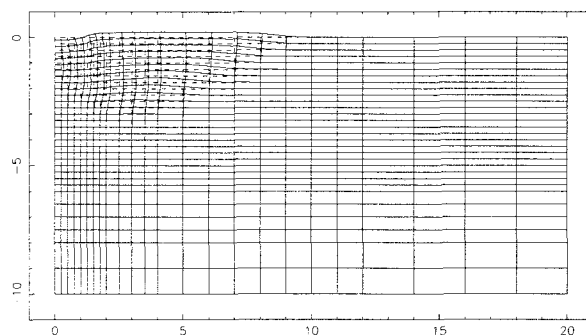


図-12 塑性崩壊メカニズム ($\phi = 30^\circ, G = 0.05$)

られた。また本論文の図表には掲載していないが、内部摩擦角が $\phi = 45^\circ$ で $G = 5$ の場合には、基礎端部のみに局所的な破壊領域が発生し、系全体の支持力をうまく評価できなかった。

なお、Chen¹⁴⁾は現実的に見込まれるパラメータ G の値として 0.1 ~ 1.0 程度であることを指摘おり、この範囲のパラメータ G に対しては、PDRPFEM の解析結果は十分正確であると言えよう。

また、PDRPFEM による崩壊メカニズムと相当塑性ひずみ速度分布の例として、内部摩擦角を一定値 $\phi = 30^\circ$ 、パラメータを $G = 0.05, G = 0.1, G = 0.5$ と変化した場合の解析結果を図-12 ~ 17 に示す。

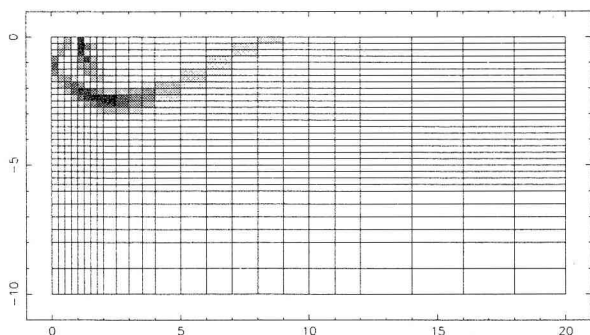


図-13 相当塑性ひずみ速度分布 ($\phi = 30^\circ$, $G = 0.05$)

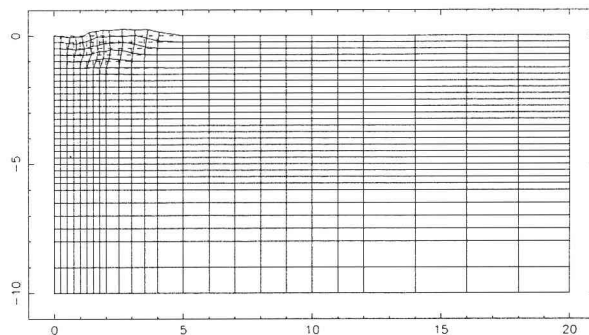


図-16 塑性崩壊メカニズム ($\phi = 30^\circ$, $G = 0.5$)

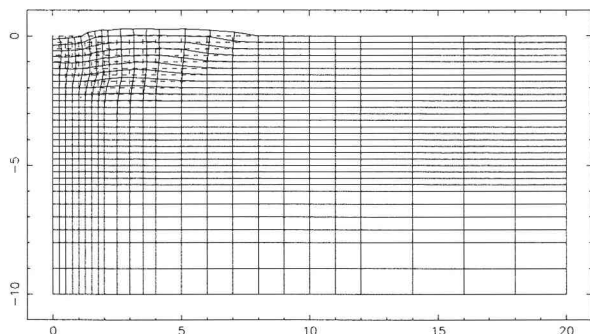


図-14 塑性崩壊メカニズム ($\phi = 30^\circ$, $G = 0.1$)

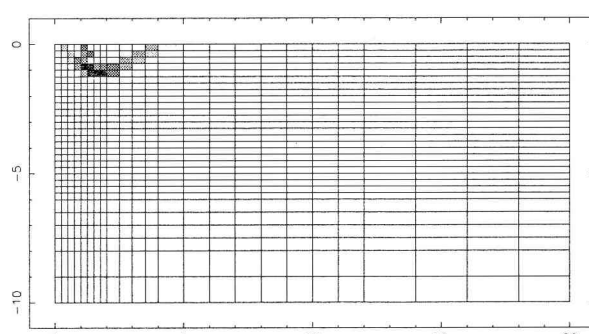


図-17 相当塑性ひずみ速度分布 ($\phi = 30^\circ$, $G = 0.5$)

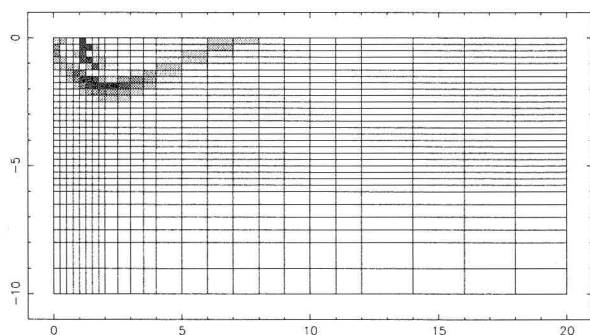


図-15 相当塑性ひずみ速度分布 ($\phi = 30^\circ$, $G = 0.1$)

次に表-2, 3 および図-12~17 に基づいて、基礎中心から塑性域端までの距離と基礎端部までの距離の比について検討する。

内部摩擦角 $\phi = 0^\circ$ の場合の差異については、Cox 解が Hill のメカニズムを想定しているのに対して、PDRPFEM では Prandtl のメカニズムが得られたためである。ちなみに $\phi = 0^\circ$ の場合には、両メカニズムとも同じ極限支持力を与えることが知られている。PDRPFEM で Prandtl のメカニズムが得られる原因としては、有限要素法の空間離散化によって基礎中心にあたる節点がスライダ支持されているため、この節点の運動学的な自由度が鉛直方向に限られていることが挙げられる。

相対的に粘着力の効果が出現しやすいパラメータ $G = 0.05$ の場合、PDRPFEM では図-13 に示すように、Prandtl のメカニズムに近い塑性崩壊メカニズムが現われている。自重ゼロ ($G = 0$) の解析結果が Prandtl

のメカニズムであったので、 $G = 0.05$ の場合にもそれに近いメカニズムが現われたと理解できる。したがって、Hill のメカニズムを仮定する Cox の解とは大きな相違が生じている。しかしながら、 $G = 0.05$ の場合は自重の効果があまり卓越しないため、メカニズムの相違に反して支持力はほぼ同様の値となっていると言える。

一方、相対的に自重の効果が出現しやすいパラメータ $G = 0.1$ や $G = 0.5$ の場合には、図-15 や 17 に示すように、Hill のメカニズムに近い塑性崩壊メカニズムが現われている。同様の傾向はパラメータ G がより大きい場合についても言える。このような場合、塑性域の広がりを出す比 (AE/AB) について、特性曲線法の解と本解析結果は概ね良い対応を示している。

最後に、内部摩擦角 ϕ 、パラメータ G が相対的に大きく自重の効果が卓越する場合に、支持力を過小評価する原因として以下の可能性が指摘できる。

- 材料の特性として、無次元粘着力 $c/(\rho g)$ が小さく、しかも内部摩擦角 ϕ が大きい場合は、降伏曲面が応力空間の原点に近く、しかも引張領域がほとんど含まれないような形状となる。
- 釣合式として有限要素による空間離散化に基づいた弱形式表現を用い、しかも要素内 1 点で応力を評価しているため、例えば特異点など応力場が空間的に急変する場所では、空間離散化を細かく行わないと、実際の応力分布をうまく近似できていない可能性がある。
- これらの結果として、荷重載荷端部周辺で静的許容な応力場を見出すことが困難である。

従って、今後の課題として、PDRPFEMによる数値解析が難しかった材料定数の組合せ、すなわち内部摩擦角 ϕ およびパラメータ G が相対的に大きい場合について、数値解析をうまく行うためのノウハウを開発することが挙げられる。具体的には、荷重載荷端部のメッシュ分割を細かくすることや、応力の特異点となる荷重端部での荷重分布を滑らかにすることなどが考えられよう。これらの効果については、別途数値実験による検証が必要である。

5. おわりに

本研究では、主双対内点法に基づく混合型の剛塑性有限要素法を摩擦性材料に適用し、その有効性を検討した。得られた結論をまとめると以下の通りである。

- 死荷重を含む剛塑性境界値問題に対して、Lagrange 双対理論による数理構造の検討を行った。さらにその結果を踏まえて、主双対内点法に基づく混合型の剛塑性有限要素法 (PDRPFEM) を定式化した。
- 摩擦性材料である Mohr-Coulomb 材料 (c , ϕ 材料) からなる地盤の支持力問題を取り上げ、PDRPFEMによる数値解析の有効性を検討した。その結果、提案した手法は概ね妥当な評価を行うことを確認した。また数値解析は安定であった。
- しかしながら、内部摩擦角 ϕ が大きく、しかもパラメータ G が大きい場合に限っては、支持力を明らかに過小に見積もる問題点も明らかとなった。このように支持力を明らかに過小評価する理由として、以下のような可能性を指摘できる。
 - － 材料の特性として、無次元粘着力 $c/(\rho g)$ が小さく、しかも内部摩擦角 ϕ が大きい場合は、降伏曲面が応力空間の原点に近く、しかも引張領域がほとんど含まれないような形状となる。
 - － 釣合式として有限要素による空間離散化に基づいた弱形式表現を用いているため、例えば特異点など応力場が空間的に急変する場所では、実際の応力分布をうまく近似できていない可能性がある。

今後の課題として、PDRPFEMによる数値解析が難しかった材料定数の組合せ、すなわち内部摩擦角 ϕ が大きく、しかもパラメータ G が大きい場合について、数値解析をうまく行うためのノウハウを開発することが挙げられる。

これらの問題点を克服することにより、地盤工学上の諸問題を剛塑性解析で統一的に解く基本的なツールとして、混合型の剛塑性有限要素法 (PDRPFEM) 発展させていきたいと考えている。

謝辞

本研究の一部は平成 15 年度 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 15760360 (研究代表者: 小林俊一) の補助を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1950.
- 2) Drucker, D.: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. 1st US National Congress Appl. Mech., pp. 487–491, 1951.
- 3) Lee, C.H. & Kobayashi, S.: New solution to rigid-plastic deformation problems using a matrix method, Trans. ASME, Journal of the Engineering for Industry, Vol. 95, pp. 865–873, 1973.
- 4) Andersen, K.D., Christiansen, E. & Overton, M.L.: Computing limit loads by minimizing a sum of norms, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 19., No. 3, pp. 1046–1062, 1998.
- 5) Andersen, K.D., Christiansen, E., Conn, A.R. & Overton, M.L.: An efficient primal-dual interior-point method for minimizing a sum of Euclidean norms, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 22, No. 1, pp. 243–262, 2000.
- 6) 小林俊一: 主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 6, pp. 95–106, 2003.
- 7) Koiter, W.T.: General theorems for elastic-plastic solids, *Progress in Solid Mechanics*, North Holland, pp. 165–211, 1960.
- 8) Sewell, M.J.: A plastic flow rule at a yield vertex, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 22, pp. 469–490, 1974.
- 9) 福島雅夫: 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.
- 10) Kobayashi, S.: Hybrid type rigid plastic finite element analysis for bearing capacity characteristics of surface uniform loading, Soils and Foundations (accepted).
- 11) 小林俊一: 直接法による永久変形量の評価法について, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 7, 2004.
- 12) Prandtl, L: Über die Härte plastischer Körper, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 75–84, 1920.
- 13) Cox, A.D.: Axially symmetric plastic deformation in soils – II – indentation of ponderable soils, Int. J. Mechanical Sciences, Vol. 4, 371–380, 1962.
- 14) Chen, W.F.: *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Chap. 6, Elsevier, 1975.

(2004 年 4 月 16 日 受付)