

偏心および傾斜荷重を受けた砂地盤における剛性基礎の支持力解析

Bearing capacity analysis of rigid strip footings on frictional soils under eccentric and inclined loads

山本健太郎*

Kentaro Yamamoto

*博士(工学), 鹿児島大学助手, 工学部海洋土木工学科 (〒890-0065 鹿児島市郡元 1-21-40)

In this paper, the limit analysis theorems and linear programming techniques are applied to find the rigorous lower- and upper-bound solutions to the exact limit load of rigid strip footings with rough base loaded by eccentric and inclined loads. Finite elements are used to construct both statically admissible stress fields for lower bound analysis and kinematically admissible velocity fields for upper bound analysis. By assuming linear variation of nodal and elemental variables, the determination of the best lower- and upper-bound solutions is done using linear programming. Finite element analyses were also performed for the same cases. In addition to the news of limit bearing capacity, the contact normal and shear stress distributions below the footing were also determined from the finite element analysis. The results of the limit analysis and the finite element analysis were compared with the Meyerhof and Hansen equations using the simplified procedure (effective width) due to Meyerhof for dealing with eccentric loads. The comparison suggests that Meyerhof's and Hansen's procedures are unconservative for large eccentricities. In addition, the bearing capacity equation was newly proposed to obtain the reasonable bearing capacity in the large eccentricities.

Key Words: foundation, bearing capacity, finite element method, limit analysis

キーワード: 基礎, 支持力, 有限要素法, 極限解析

1. はじめに

1. 1 背景と目的

地盤上における基礎は上部構造物からの重力による鉛直荷重のみならず、しばしば、風力、波力、地震力、裏込め土圧などの水平荷重から生ずるモーメントが原因で偏心および傾斜荷重を受ける可能性が高いと考えられる。実務ではそのような荷重を受ける基礎の設計は普通、偏心・鉛直荷重(鉛直荷重が偏心して作用)と中心・傾斜荷重(基礎中心に傾斜荷重が作用)の二つの部分に分けて行われる。その時、二つの異なる部分の問題を解析することによって得られた基礎の支持力、(a) 偏心・鉛直荷重を受けた基礎の支持力、(b) 中心・傾斜荷重を受けた基礎の支持力の二つの値を重ね合わせることによって、偏心および傾斜荷重を受ける基礎の支持力が得られる。

今まで、偏心・鉛直荷重を受けた基礎に関する研究^{1)~3)}並びに、中心・傾斜荷重を受けた基礎に関する研究^{1), 4), 5)}が主に行われてきた。また、模型実験を用いた偏心および傾斜荷重を受けた基礎の研究も実施されてきた^{1), 6)}。偏心と傾斜荷重は同時に起こるにも関わらず、そのような荷重を受けた基礎の支持力とその接地圧分布に対する厳密解はあまり求められていない。その代わり、Meyerhof⁷⁾と

Hansen⁷⁾による実験的観察に基づいた近似解がよく用いられている。実務上の設計における偏心荷重を取り扱うためのアプローチは、Meyerhof⁷⁾によって初めて提案された。Meyerhofは偏心荷重を取り扱う際に、偏心によって底面積が減少する有効基礎幅の仮定 $B' = B - 2e$ を提案し、その仮定は現設計法において幅広く採用されている。

また、偏心荷重に対して接地圧分布は一樣ではなく、設計において偏心を有する基礎の接地圧分布は、偏心を有する軸に対して線形的に変化することが仮定されている。この事は本来の分布に対する簡素化である。Peckら⁸⁾は偏心載荷された基礎が支持力破壊するなら、正解は基礎のつま先での最大応力か有効基礎幅での極限支持力にあることを指摘した。この事は、どんな支持力破壊も基礎のつま先周辺で生じるので正しいと考えられる。砂地盤において、基礎のつま先における接地圧は中心・鉛直載荷の場合に基礎幅 B を用いて計算したものと同一ではない。一方、設計における傾斜荷重を取り扱うアプローチに関して、

Meyerhof⁷⁾と Hansen⁹⁾は支持力係数 N_c, N_γ, N_q を減少さ

せるために傾斜係数 i_c, i_γ, i_q を提案した。

本研究では、これまで実施してきた数値極限解析(下界

解析と上界解析)の結果¹⁰⁾を踏まえ、数値極限解析の結果と有限要素解析の結果とを比較検討するために、数値極限解析並びに有限要素解析を偏心および傾斜荷重を受けた砂地盤上の剛性基礎の極限支持力と基礎直下での垂直並びにせん断応力分布を評価するために適用した。そして、現設計法で採用されている Meyerhof¹¹⁾による偏心荷重に対する支持力計算における有効基礎幅の仮定を用いた既存の支持力提案式と基礎直下における垂直応力の線形分布の仮定を数値極限解析並びに有限要素解析の結果と比較することにより検証することを目的としている。

1. 2 極限解析

地盤における極限解析は、崩壊荷重もしくは土構造物の安定性を評価する方法として従来から良く用いられてきた。極限解析では、地盤の弾性変形は十分小さく無視できるものとして剛塑性体として取り扱う。極限解析は塑性論の下界、上界定理の利点を用い、正解値を下界値、上界値とで挟み撃ちにしてその幅を狭めることにより、工学的に十分精度のある解を求めることができる大変有用な数学的解析手法である。本研究では、境界値問題に対して有限要素法による空間離散化を適用し、極限解析を線形計画問題として定式化を行い、数値解析による手法を用いる。

地盤工学における厳密な下界解を計算する有限要素と線形計画法の使用は Lysmer によって初めて提案された¹¹⁾。その手法はとても効果的であったが、大規模な線形計画問題を解くために利用したアルゴリズムが当初、良くなかったため、その使用は制限された。最近になり、大規模な線形計画問題を効果的に解くためのアルゴリズムが開発された¹²⁾。線形計画法を用いた下界解析の有限要素定式化の発展はいくつかの論文で詳細に述べられている^{13), 14), 15)}。一方、有限要素と線形計画法を用いた上界解析の最初の定式化は Anderheggen と Knopfel によって提案された¹³⁾。この定式化は後に、速度不連続線を含ませるために Bottero ら¹⁴⁾と Sloan¹⁶⁾によって一般化された。最近になり、速度場において数多くの不連続線が存在することを許す新しい定式化が Sloan と Kleeman によって提案された¹⁷⁾。この定式化において、2つの隣接する三角形要素が共有するどの境界においても速度不連続線が生じることが可能となった。

現在までに、数値極限解析(下界解析と上界解析)は多様な工学的に重要な安定問題に対する設計チャートを描くために用いられてきた¹⁸⁾。基礎に対する研究としては、Sloan と Yu¹⁹⁾は数値極限解析を用い、 N_y に対する新しい

下界値と上界値を調べた。そこでは、Rough な基礎に対しては Meyerhof²⁰⁾と Hansen⁷⁾によって提案された N_y が数値

極限解析の結果と比較して、正解値に近いと報告された。また、Ukritchon ら²¹⁾は組み合わせ荷重下での不均質な粘性土地盤における基礎の非排水状態での安定性を評価するために数値極限解析を適用した。彼らは3次元破壊包絡面の形状に焦点をあて、基礎下のサクショと深さ方向に不均質な非排水せん断強さの影響を示した。現在のところ、

数値極限解析を用い、偏心および傾斜荷重を受けた砂地盤上の剛性基礎の支持力を調べた研究は見当たらない。一方、斜面に対する研究としては、Yu ら²²⁾はシンプルな斜面に対して極限釣り合い法の結果を数値極限解析と比較した。そして、数値極限解析による下界値と上界値が極限釣り合い法の結果に対するベンチマークとして使用できることを示した。Kim ら^{23), 24)}は間隙水圧の影響を受けた均質並びに不均質な斜面の安定性を評価するために数値極限解析を適用した。

一方、極限解析を用いた基礎に対する研究として、Agrawal²⁵⁾は偏心傾斜荷重を受けた基礎に対して上界法を適用した。その解析では荷重が偏心並びに傾斜した側だけでの破壊メカニズムを仮定し、荷重の偏心並びに傾斜がない側では部分的な動員を考慮した。Salençon と Pecker^{26), 27)}は均一な半無限表面上の帯基礎の極限支持力に対する下界、上界値を導くために極限解析を用いた。彼らは、Tresca の降伏規準または引張り力を考慮しない Tresca の降伏規準に従う粘性土地盤を仮定した。また、Michalowski と You²⁸⁾は偏心荷重を受けた基礎の支持力を計算するために上界法を適用した。彼らは Meyerhof¹¹⁾による有効基礎幅の仮定を検証し、有効基礎幅の仮定の使用は粘着成分のない土に対して、大きい上界値を導くかもしれないことを示した。

2. 数値極限解析

ここでは、偏心および傾斜荷重が作用する剛性基礎に対しても厳密な下界、上界値を求めることが可能な数値極限解析(下界解析と上界解析)の概略について述べる¹⁰⁾。

2. 1 線形計画問題としての下界解析

下界、上界解析ともに3節点3角形要素を用いた。各節点は特定の要素に属し、応力不連続線を表現するために数個の節点が同一座標を持つことが可能である。2つの応力 (σ_x, σ_y) と1つのせん断応力 (τ_{xy}) が節点変数として各節点に与えられる。そして、応力の線形変化の仮定により、要素内の点における応力は以下に示すように3つの節点応力の線形結合として表すことができる。

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{xi}; \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{yi}; \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^3 N_i \tau_{xyi} \quad (1)$$

ここに、 $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \tau_{xyi})$: 節点*i*での応力、 N_i : 要素の節点座標の関数である線形形状関数¹⁵⁾である。

静的可容応力場は、(a) 要素内での力の釣り合い、(b) 応力不連続線での力の釣り合い、(c) 応力境界条件、(d) 降伏規準が土塊のどこにおいても破られないこと、(e) 基礎に対する力の釣り合いの条件を満たされなければならない。これらの条件は以下のように表される。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \quad (2)$$

$$\sigma_{na}^d = \sigma_{nb}^d; \quad \tau_a^d = \tau_b^d \quad (3)$$

$$\sigma_n^l = q^l; \quad \tau^l = t^l \quad (4)$$

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 \leq 0 \quad (5)$$

$$\sin \alpha \int_s \sigma_n dx - \cos \alpha \int_s \tau dx = 0; \quad \int_s x \sigma_n dx = 0 \quad (6)$$

ここに、 γ : 土の単位体積重量、 q^l : 境界端 l に垂直な規定応力、 t^l : 境界端 l に接する規定応力、 ϕ : 土の内部摩擦角、 x : 荷重が作用している点からの距離を表す。

式(3)は二つの隣接する要素 a と b の間の応力不連続線 d での力の釣り合いを表す。 σ_{na}^d と τ_a^d が要素 a 側における応力不連続線 d 上での垂直応力とせん断応力を示す。式(5)を満足させるため、 $(\sigma_x - \sigma_y)$ と $2\tau_{xy}$ の空間において、円

形で表されるモール・クーロンの降伏規準を近似する p 辺と p 個の頂点をもつ多角形を用いる。静的可容は、土塊のどこにおいても降伏規準を破らないことが要求されるので、多角形は元となる降伏面の内側に位置するように定義されることによって、静的可容を満足する。式(6)は剛性基礎に対する鉛直、水平方向の力の釣り合いとモーメントの釣り合いを示す。式(1)を式(2)~(6)に代入することによって、今まで述べてきた静的可容条件が節点応力を用いて線形式として表現することができる。

基礎に対する極限荷重の下界値は、垂直応力が作用する境界において垂直応力を積分形式で表現した次式を最大化することによって得られる²⁾。

$$\max \{Q\} = \max \left\{ \frac{1}{\cos \alpha} \int_s \sigma_n dx \right\} \quad (7)$$

ここで、 s : 垂直応力が作用する境界、 α : 垂直線からの荷重の傾斜角を表す。また、式(7)の応力は式(1)に従って、線形的に変化すると仮定されるので、式(7)は静的可容条件を記述するいくつかの線形拘束をもつ、最大化されるための線形目的関数として以下のように定式化することができる。

maximize: $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ あるいは minimize: $-\mathbf{c}^T \mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \text{subject to:} \quad & \mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{B}_1 \\ & \mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \mathbf{B}_2 \\ & \mathbf{A}_3 \mathbf{x} = \mathbf{B}_3 \\ & \mathbf{A}_4 \mathbf{x} \leq \mathbf{B}_4 \\ & \mathbf{A}_5 \mathbf{x} = \mathbf{B}_5 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{x}$: 未知の節点応力の全体ベクトル、 $\mathbf{c}$: 目的関数の係数ベクトル、 $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ ($i=1, 5$): 線形等式または線形不等

式の係数マトリックスを示す。なお、 $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ が要素内と応力不連続線での力の釣り合い、 $\mathbf{A}_3$ が応力境界条件、 $\mathbf{A}_4$ が降伏規準、 $\mathbf{A}_5$ が基礎上で力の釣り合いに関するもので

ある。目的関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ はスカラーである。最終的には上記の拘束条件を示すマトリックスがいくつかの列よりも多くの行をもち（未知数の数よりも拘束数が多い）、行列の値の存在がまばらな大きなマトリックスとしてまとめられる。このような拘束マトリックスをもつ線形計画問題を解くためには、steepest-edge active set algorithm¹²⁾ が適しており、本研究においてもこの手法を用いた。

2. 2 線形計画問題としての上界解析

各節点には、水平並びに鉛直変位速度 u と v が節点変数として与えられ、要素変数としては要素内で一定である塑性定数速度 $\dot{\lambda}$ が与えられる。そして、要素内の点において、変位速度は次式を用いて 3 つの節点変位速度の線形結合として表すことができる。

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^3 N_i v_i \quad (9)$$

ここに、 u_i, v_i : 節点 i での水平並びに鉛直変位速度、 N_i : 線形形状関数である。

動的可容速度場は、(a) 要素内での関連流動則、(b) 速度不連続線での関連流動則、(c) 速度境界条件、(d) 基礎上の節点に対する運動学的条件の条件を満たされなければならない。これらの条件は以下のように表される。

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}; \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y};$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \quad (10)$$

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 = 0 \quad (11)$$

$$\Delta v^d = |\Delta u^d| \tan \phi^d \quad (12)$$

$$u_i^l = \bar{u}_i^l; \quad v_i^l = \bar{v}_i^l \quad (13)$$

$$u_i = u_c + x_{ci} \omega_c \sin \theta; \quad v_i = v_c - x_{ci} \omega_c \cos \theta \quad (14)$$

ここに、 $\dot{\lambda}$: 要素における非負の塑性定数速度、 F : 降伏関数、 Δu^d , Δv^d : 二つの隣接する要素 a と b の間の速度不連続線 d における接線方向と垂直方向の速度不連続成分、 $\phi^d = \min(\phi_a, \phi_b)$; ϕ_a, ϕ_b : 要素 a と b における内部摩擦角、 $\bar{u}_i^l$, $\bar{v}_i^l$: 境界端 l の節点 i において規定された接線方向と

垂直方向の速度、 u_c, v_c, ω_c : 基礎の中心 c での水平方向と鉛直方向の変位速度と角速度を表す。

下界解析同様、一つの多角形がモール・クーロンの降伏規準の線形近似として用いられる。上界解は式(11)を満たさなければならないので、元となるモール・クーロンの降伏面の周囲を外側に取り囲む p 辺を有する多角形を用いることで降伏規準を満たすことができる。式(14)は基礎上の節点に対する運動学的条件を示し、基礎が x 軸から傾き θ を有し、基礎の中心 c から左側に x_{ci} 離れた基礎上の節

点 i における水平方向と鉛直方向の変位速度を表す。式(9)を式(10)~(14)に代入することによって、今まで述べてきた動的相容条件が節点変位速度、塑性定数速度などを用いて線形式として表現することができる。

次に、全内部消散エネルギーは要素内での塑性変形と要素間の速度不連続線に沿ってのせん断の 2 つによって消散される。1 つの三角形要素 e (面積: A) 内での塑性変形による内部消散は以下のように計算することができる。

$$P^e = \int_{A^e} (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA = \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 \quad (15)$$

また、長さ L^d をもつ速度不連続線 d に沿っての内部消散は次式で示されるように、垂直応力と接線応力によって消散される。

$$P^d = \int_{L^d} (\tau^d \Delta u^d + \sigma_n^d \Delta v^d) dL = \int_{L^d} c^d |\Delta u^d| dL = \mathbf{c}_3^T \mathbf{x}_3 \quad (16)$$

ここに、 $c^d = \min(c_a, c_b)$; c_a, c_b : 要素 a と b における粘着力を示す。

支持力問題において、作用する荷重に加えて土の自重も外力として考えられる。平面ひずみ条件において、要素 e の重力によってなされる外力仕事 $\dot{W}_g^e$ は以下の式で与えられる。

$$\dot{W}_g^e = - \int_{A^e} \gamma^e v dA = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 \quad (17)$$

ここで、 γ^e : 要素 e の単位体積重量。式(17)のマイナスは y 方向の変位速度に関して、上向きが正の向きであることによる。ここでも変位速度は要素内で線形に変化すると考えられ、単位体積重量は一定であるので、最終的に式(17)のような形にまとめられる。また、基礎に作用する偏心傾斜荷重による外力仕事は、剛性基礎での運動学的条件を用い、以下のように表される²¹⁾。

$$\dot{W}_{foot}^l = \int_L \sigma_n v_n dL = Q \{ u_c \sin \alpha - v_c \cos \alpha + \omega_c e \cos \alpha \} \quad (18)$$

ここに、 L : 荷重が作用する境界の長さ、 σ_n, v_n : 荷重境界 l における垂直応力と変位速度、 Q : 基礎に作用する偏

心傾斜荷重を表す。

仮想仕事の原理により、全内部消散エネルギーを全外力仕事に等しいと置くことにより、以下のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^E P^e + \sum_{d=1}^D P^d = \sum_{e=1}^E \dot{W}_g^e + \sum_{l=1}^L \dot{W}_{foot}^l \quad (19)$$

ここに、 E : 全要素数、 D : 全速度不連続線数、 L : 全荷重境界数を表す。式(18)を式(19)に代入し、整理すると以下のようなになる。

$$Q \{ u_c \sin \alpha - v_c \cos \alpha + \omega_c e \cos \alpha \} = - \sum_{e=1}^E \dot{W}_g^e + \sum_{e=1}^E P^e + \sum_{d=1}^D P^d \quad (20)$$

ここで、基礎の動きを荷重が作用する方向に式(21)のように拘束することにより、式(20)から Q を直接求めることができる。

$$u_c \sin \alpha - v_c \cos \alpha + \omega_c e \cos \alpha = 1 \quad (21)$$

以上により、上界解析の目的関数である Q を最小化するためには、式(20)の右辺を最小化すればいいことがわかる。よって、上界解析の定式化を下界解析同様、線形計画問題としてまとめると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & -\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_3^T \mathbf{x}_3 \\ \text{subject to:} \quad & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{23} \mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_{31} \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_3 \\ & \mathbf{A}_{41} \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_4 \\ & \mathbf{A}_{51} \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_5 \\ & \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x}_3 \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{x}_1$: 節点変位速度の全体ベクトル、 $\mathbf{x}_2$: 要素に対する塑性定数速度の全体ベクトル、 $\mathbf{x}_3$: 速度不連続線パラメータの全体ベクトル、 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$: 目的関数の係数ベクトル、 $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{41}, \mathbf{A}_{51}, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5$: 線形式の係数マトリックスを示す。なお、 $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{23}$ が要素内と速度不連続線での関連流動則、 $\mathbf{A}_{31}$ が速度境界条件、 $\mathbf{A}_{41}, \mathbf{A}_{51}$ が剛性基礎の運動学的条件に関するものである。

式(22)で表される線形計画問題も最終的には、steepest-edge active set algorithm¹²⁾が適用可能な問題へと変換され、下界解析同様、steepest-edge active set algorithmを用いた。

3. 有限要素解析

有限要素法は、偏心および傾斜荷重を受けた砂地盤における剛性基礎の極限支持力の正確な近似解を得るために、支持力問題に対しても適用可能である。有限要素解析から

得られた解のエラーとしては、主に有限要素による連続体の離散化、解法並びにその増分値、各要素における非線形応力—ひずみ関係の数値積分などが挙げられる。しかし、エラーとなりうる原因を注意深く扱う努力をすれば、有限要素解析の結果から数学的厳密解に近い解を得ることは可能である。本論文では、非線形解析にも優れている有限要素コード SNAC²⁹⁾を使用した。このコードは非線形問題にも有効であることが示されており³⁰⁾、このコードを改良し、極限支持力と基礎直下での垂直並びにせん断応力分布を求めた。数値極限解析と同様に、降伏規準にはモール・クーロンの降伏規準を用いた。モール・クーロン降伏曲面での角部においては、微分の不連続性による数値解析上の不都合が生じるため、モール・クーロン降伏曲面での角部を丸めた降伏規準を採用した。応力積分手法には陽解法に基づいた修正 Euler 法を用いた。そして、関連流動則を仮定し、メッシュには平面ひずみ条件で、2 次式の形状関数をもつ 6 節点 3 角形要素を用いた。解析に用いたメッシュは、基礎端周辺と荷重の作用方向で十分にメッシュを細かくすることも実施した。

解析手法としては、最初、水平地盤堆積層に重力をかけることによって、静的応力場を設定した。そして、砂地盤と比較してかなり剛な基礎を仮定し、応力制御方式により解析を実施した。非線形弾塑性問題を解くために、Newton-Raphson 反復法を用いた。砂地盤の弾性係数 E 並びにポアソン比 ν は妥当な範囲内にあれば、極限支持力に対して影響を与えないことも確認した。有限要素解析の有限要素メッシュ並びに境界条件の詳細に関しては、次章で述べるものとする。

4. 解析結果

最初に、数値極限解析から得られた解の精度の検証を行う。図-1 には粘性土地盤に対する q_b/c_u と偏心率、基礎幅比 (e/B) との関係を示す。縦軸には粘着力 c_u で無次元化された極限支持力、横軸には基礎幅 B に対する偏心率 e の比 (e/B) を示す。なお、下界解析並びに上界解析用有限要素メッシュは、後述において説明される図-2 と同様のものを用いた。図中のプロットは本解析結果からの下界値、上界値並びに Meyerhof の提案式(23)から計算された値を示す。Meyerhof³⁾は、偏心荷重による基礎底面幅の減少を考慮した偏心・鉛直荷重を受ける粘性土地盤上での基礎の極限支持力 q_b を以下のように表現した。

$$q_b = c_u N_c \left(1 - 2 \frac{e}{B} \right) \quad (23)$$

ここに、 c_u : 粘着力、 N_c : 鉛直荷重に対する理論的な支持力係数、 $N_c = (2 + \pi)$ 、 e : 基礎の中心からの偏心率、 B : 基礎幅、 q_b : 基礎の base における単位面積当たりの荷重を表す。これを見ると、Meyerhof による値は本解析結果からの下界値、上界値で常に挟まれていることがわかる。 $e/B=0$ の時、下界値、Meyerhof、上界値による値は $q_b/c_u = 4.93, 5.14, 5.41$ となり、3 つの値ともに e/B の増加とともに直線的に減少

していることがわかる。また、 $e/B=0$ における下界値、上界値の Meyerhof による値との誤差は 4.1 と 5.3% であった。よって、工学的には十分精度を有していると考えられる。また、図-1 からは Meyerhof の提案式により計算された値は、上界値よりも下界値に近いことがわかる。このことは、粘性土地盤に対しては Meyerhof の提案式により計算された値は conservative であると報告されていることと一致していることがわかる²⁸⁾。

図-2(a), (b) には下界解析並びに上界解析用有限要素メッシュの一例を示す。下界メッシュは 1556 個の 3 角形要素、2379 個の応力不連続線から成る。一方、上界メッシュは 1556 個の 3 角形要素、2266 個の速度不連続線から構成されている。下界解析と上界解析の境界条件も図-2 中に示されている。図-2(a) で示された下界解析のメッシュの境界においては、地盤を半無限体としてシミュレートするために拡張要素が用いられた。できるだけ良い解を得るために、基礎端周辺においては十分にメッシュを細かくすることも実施した。一般的に、下界解析のメッシュでは上界解析のメッシュよりも、解の精度を上げるために特異点である基礎端周辺においてメッシュをより細かくする必要がある。左右と下の境界は極限支持力と破壊メカニズムに影響を与えない範囲内で、メッシュの数を増やすためにできるだけ基礎に近くなるように設定した。図-3~5 には荷重傾斜角、偏心率を変化させた時の上界解析からの速度変位ベクトル、塑性領域を示す。地盤は砂地盤を想定し、そのパラメータは $c_u=0$ 、 $\phi=35^\circ$ 、 $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$ と設定した。また、剛性基礎を仮定し、その基礎幅は $B=1 \text{ m}$ とした。偏心率 e 、荷重傾斜角 α の符号に関しては、Meyerhof³⁾と同様に、基礎の中心から左側と垂直線から時計回りを正の向きとしている。偏心率、基礎幅比 (e/B) と荷重傾斜角 (α) の範囲は、 $e/B=0, 1/12, 1/6, 1/3$ 、 $\alpha=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ とした。速度場における矢印は、破壊時における節点変位速度の大きさと方向を示している。塑性領域は対象とする領域内での内部消散の大きさの変化を表すために白色から黒色へと異なる濃淡をもつ領域へと分けられている。黒い領域では大きな内部消散が生じていることを示す。なお、基礎直下の領域は土塊の剛な領域を表して

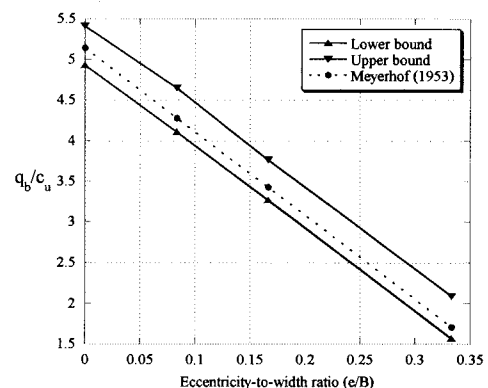
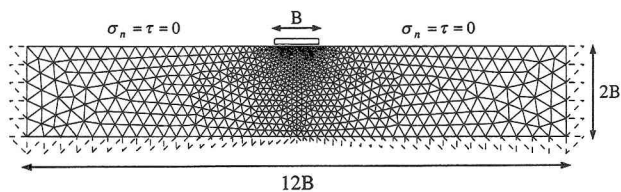
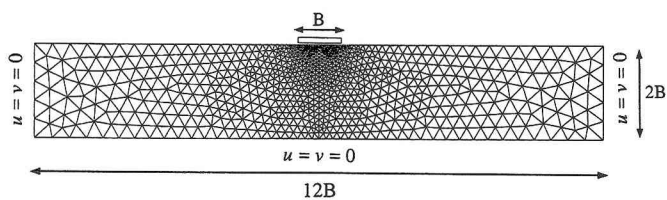


図-1 q_b/c_u と偏心率、基礎幅比 (e/B) との関係

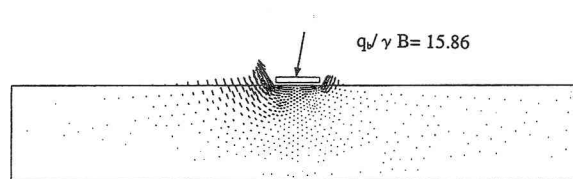


(a) 下界解析のメッシュ

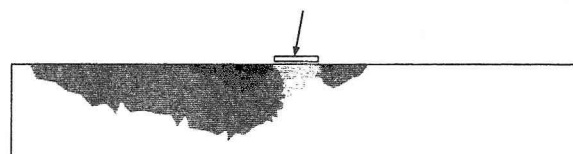


(b) 上界解析のメッシュ

図-2 典型的な有限要素メッシュと境界条件

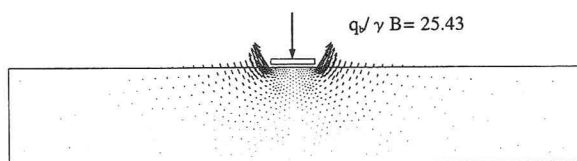


(a) 変位速度ベクトル

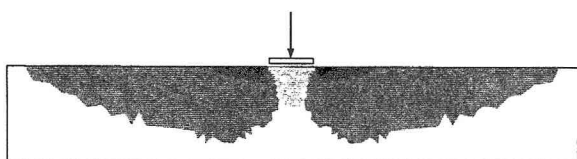


(b) 塑性領域

図-4 中心・傾斜荷重下における基礎の上界解
($e/B=0$, $\alpha=10^\circ$)

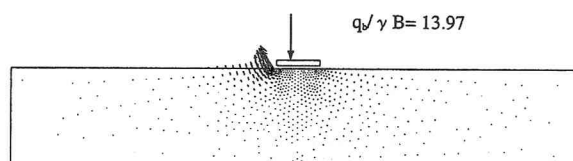


(a) 変位速度ベクトル

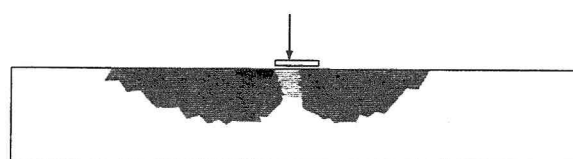


(b) 塑性領域

図-3 中心・鉛直荷重下における基礎の上界解
($e/B=0$, $\alpha=0^\circ$)



(a) 変位速度ベクトル



(b) 塑性領域

図-5 偏心・鉛直荷重下における基礎の上界解
($e/B=1/6$, $\alpha=0^\circ$)

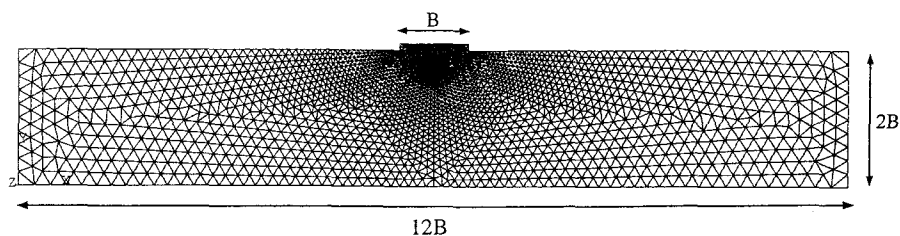


図-6 有限要素解析で用いられた典型的な有限要素メッシュ

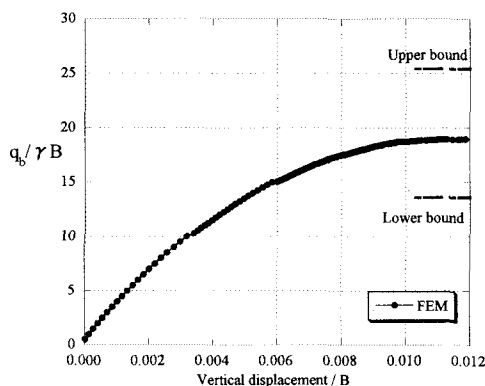


図-7 有限要素解析からの $q_b / \gamma B$ と無次元化された垂直変位との関係

いる。ここでは、基礎と土の間の境界面は rough と仮定した。図-3(a)を見ると、基礎端周辺において大きな変位速度が生じ、図-3(b)からは基礎端周辺において大きな内部消散が生じていることがわかる。また、図-3(a), (b)ともに基礎の中心に対しては対称で、両図は良い対応を示していることがわかる。中心・傾斜荷重の場合である図-4を見ると、荷重が作用する方向の基礎端において変位速度ベクトルと塑性領域が発達していることがわかる。次に、偏心・鉛直荷重の場合である図-5を見ると、変位速度ベクトルは主に、基礎上において荷重が載荷されている側で観察される。塑性領域は荷重直下の領域でより顕著になることがわかる。

図-6には有限要素解析で用いた典型的な有限要素メッシュの一例を示す。左右端の境界条件は x : 固定, y : 自由とし、下端の境界条件は x, y ともに固定とした。左右の境界は極限支持力と破壊メカニズムに影響を与えないように十分遠くに設定した ($12B$)。下端の境界は $2B$ であり、あまり深く設定していないように見えるが、結果は深さ $4B$ の時と同様であることを確認している。基礎の厚さは $0.1B$ である。メッシュは4160個の6節点3角形要素で形成した。図-7には有限要素解析から得られた $\phi=35^\circ$ の時の中心・鉛直荷重 ($e/B=0, \alpha=0^\circ$) における $q_b / \gamma B$ と無次元化された垂直変位との関係を示す。解析ではより正確な極限荷重を求めるために、multi-increment steps を用いた。解析初期では時間ステップを大きく設定し、荷重増分を大きくした。そして、載荷荷重が大きくなるに従い、時間ステップを小さく設定し、荷重増分が小さくなるように

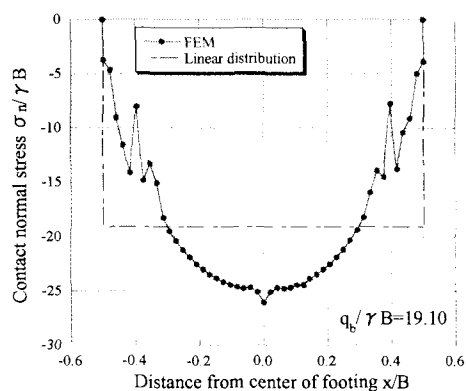
して正確な極限荷重を求めることを試みた。図-7では垂直変位が増加する時、 $q_b / \gamma B$ が19.10に収束することがわかる。後で述べるが、この値は大まかに下界値と上界値の中央に位置してくる。

図-8, 9には有限要素解析からの基礎直下での垂直応力分布並びにせん断応力分布を示す。縦軸には γB で無次元化された応力、横軸には基礎幅 B で無次元化された基礎中心からの距離を示す。使用した有限要素解析では、1つの3角形要素に3つの積分点があり、その積分点において応力が得られる。基礎直下における節点の応力は、その節点が属する要素での積分点の応力を補間することによって求めた。そして、基礎直下における複数の要素を構成する節点に対しては、その節点が属するすべての要素から算出した垂直並びにせん断応力の平均値を用いた。よって、図中の直線は有限要素解析からの基礎直下における節点での垂直応力またはせん断応力の値を結んだものである。図-8での破線は、以下の式で表される基礎直下での垂直応力の線形分布の仮定を示す。なお、下式を用いて垂直応力を計算する時、 Q には有限要素解析からの極限荷重を用いた。

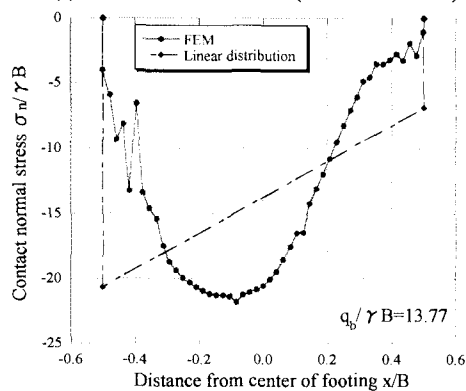
$$q_{b, \max / \min} = \frac{Q}{BL} \left(1 \pm \frac{6e}{B} \right) \quad (e/B \leq 1/6) \quad (24)$$

$$q_{b, \max} = \frac{4Q}{3L(B-2e)} \quad (e/B > 1/6) \quad (25)$$

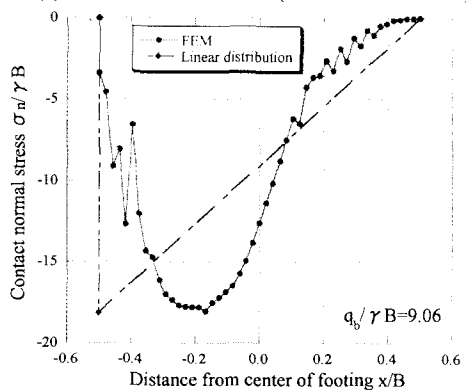
この仮定は、式(24)において $e/B=1/6$ の時、 $q_{b, \min}$ は0となり、 $e/B>1/6$ の時には $q_{b, \min}$ が負となり、基礎と地盤の間に張力が生ずるので、その時には分布形を式(25)で表される3角形としたものである。今なお、接地圧の正確な分布を推定することは難しいと考えられる。図-8(a)を見ると、有限要素解析からの基礎直下での垂直応力分布は基礎の中心に対して対称で、基礎中心で最大値をとり、基礎端で0をとっていることがわかる。このことは、砂地盤における基礎直下での接地圧分布と良い対応を示していることがわかる。なお、垂直応力は引張り力を正としている。図-8(a)-(d)を見ると、有限要素解析からの基礎直下での垂直応力分布は荷重が作用している周辺で最大値をとり、 e/B が $1/6$ を越えると、その分布と最大値は荷重が偏心していない側での基礎と地盤との接触面の減少とともに小さくなる。よって、 $q_b / \gamma B$ も減少している。図-8(d)においては、基礎と地盤との接触面は基礎の左側においてのみ見ら



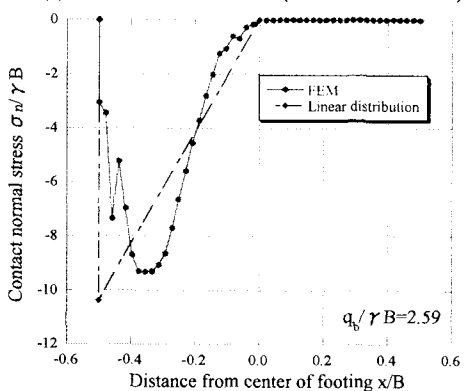
(a) 中心・鉛直荷重 ($e/B=0, \alpha=0^\circ$)



(b) 偏心・鉛直荷重 ($e/B=1/12, \alpha=0^\circ$)

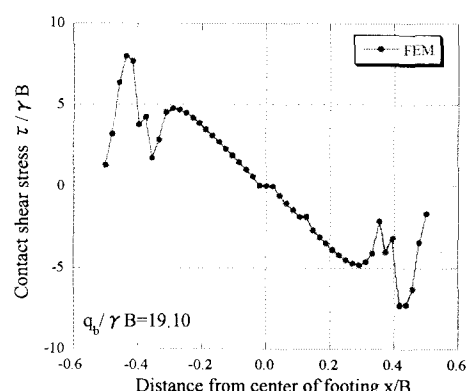


(c) 偏心・鉛直荷重 ($e/B=1/6, \alpha=0^\circ$)

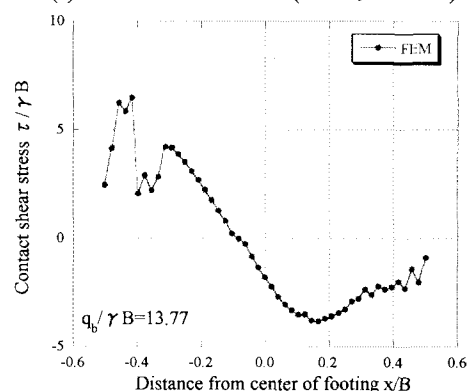


(d) 偏心・鉛直荷重 ($e/B=1/3, \alpha=0^\circ$)

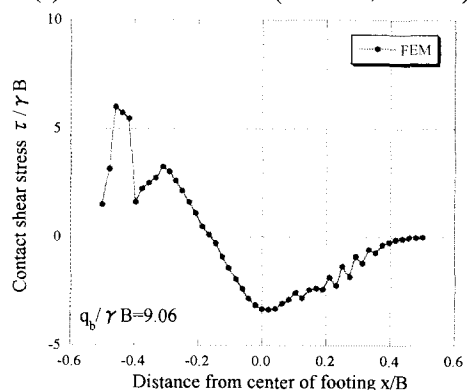
図一8 有限要素解析からの基礎直下での垂直応力分布



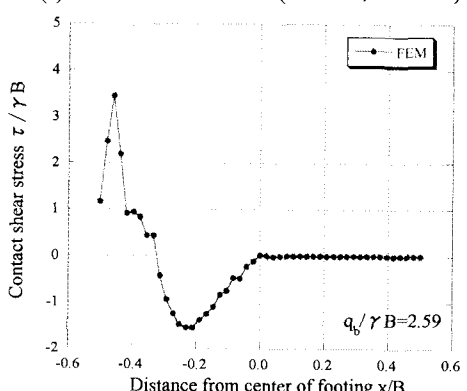
(a) 中心・鉛直荷重 ($e/B=0, \alpha=0^\circ$)



(b) 偏心・鉛直荷重 ($e/B=1/12, \alpha=0^\circ$)



(c) 偏心・鉛直荷重 ($e/B=1/6, \alpha=0^\circ$)



(d) 偏心・鉛直荷重 ($e/B=1/3, \alpha=0^\circ$)

図一9 有限要素解析からの基礎直下でのせん断応力分布

れる。図-8 から、全般的に有限要素解析からの基礎直下での垂直応力分布は線形分布の仮定と比べて、分布形状と最大値ともに比較的良好一致を示していることがわかる。次に、図-9(a)を見ると、有限要素解析からの基礎直下でのせん断応力分布は図-8(a)と対応しており、これも基礎の中心に対して対称となっており、基礎の中心で0をとっていることがわかる。なお、基礎直下でのせん断応力は時計回りが正となっている。図-8と同様に、図-9(a)-(d)を見ると、 e/B の増加とともに、せん断応力分布とその値は小さくなる。そして、荷重が作用している点ではせん断応力が0となり、正と負のせん断応力を分けている。 e/B が増加する時、偏心量 e と同方向にせん断力が0となる点も移動し、図-9(d)では基礎の左側でのみせん断応力が作用していることもわかる。図-8, 9中の $q_b/\gamma B$ はこの時の正規化された極限支持力を示し、後述の $\phi=35^\circ$ のケースである図-11(b)と図-12の $q_b/\gamma B$ と対応している。特に、図-8, 9の e/B が増加する方向では分布形状にジグザグが見られるが、これは基礎端周辺に位置し、応力の変化が著しいことがわかる。また、分布形状のジグザグを取り除くために、基礎直下における複数の要素を構成する節点に対しては、その節点が属するすべての要素から算出した垂直並びにせん断応力の平均値を用いたが無理であったことを書き加えておく。なお、下界解析からの基礎直下での垂直並びにせん断応力分布は有限要素解析から得られた分布と比較して、分布形状が類似していることもわかる¹⁰⁾。

図-10には中心・鉛直荷重に対するroughな剛性基礎上での支持力係数 N_γ と内部摩擦角 ϕ との関係を示す。ここでは、数値極限解析の結果である下界値、上界値とFEMからの解、並びにCaquot and Kerisel³¹⁾, Meyerhof²⁰⁾, Hansen⁷⁾, Michalowski³²⁾による提案式が比較されている。有限要素メッシュに関しては、メッシュを十分細かくし、より正確な解を得るために解析領域が半分のメッシュを用いた。各提案式は以下のように表されている。

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \phi \quad (\text{Caquot and Kerisel, 1953}) \quad (26)$$

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1.4\phi) \quad (\text{Meyerhof, 1963}) \quad (27)$$

$$N_\gamma = 1.5(N_q - 1) \tan \phi \quad (\text{Hansen, 1970}) \quad (28)$$

$$N_\gamma = e^{0.66+5.11 \tan \phi} \tan \phi \quad (\text{Michalowski, 1997}) \quad (29)$$

$$N_q = \exp(\pi \tan \phi) \tan^2(45 + \frac{\phi}{2}) \quad (30)$$

支持力係数 N_γ の提案式に関して、 $\phi \geq 35^\circ$ では、Michalowski, Caquot and Kerisel, Meyerhof, Hansenの順に大きい。下界値と上界値は $\phi=25^\circ$ と 30° の時のMichalowski, Caquot and Keriselの値を除いて、すべての値を挟み撃ちにすることができた。このMichalowski, Caquot and Keriselによる値は $\phi=25^\circ$ と 30° の時に他の提案式と比較すると、 N_γ を大きく評価する傾向があると考えられる。下界値と上界値の差並びに、MeyerhofとHansenによる解の差は ϕ が大きくなるにつれて、徐々に

大きくなることがわかる。また、FEMからの解はMeyerhofによる解と良好一致を示した。

図-11には様々な内部摩擦角をもつ砂地盤に対する $q_b/\gamma B$ と偏心量、基礎幅比(e/B)との関係を示す。縦軸には γB で無次元化された極限支持力、横軸には基礎幅 B に対する偏心量 e の比(e/B)を示す。図中のプロットは本解析結果からの下界値、上界値とFEMからの解並びにMeyerhof²⁰⁾とHansen⁷⁾の提案式(31)と(32)から計算された値を示す。MeyerhofとHansenは、偏心荷重による基礎底面幅の減少を考慮した偏心および傾斜荷重を受ける砂地盤上での基礎の極限支持力 q_b を以下のように表現した。

$$q_b = \frac{1}{2} \gamma (B - 2e) (1 - \frac{\alpha}{\phi})^2 N_\gamma \quad (\text{Meyerhof, 1963}) \quad (31)$$

$$q_b = \frac{1}{2} \gamma (B - 2e) (1 - 0.7 \tan \alpha)^5 N_\gamma \quad (\text{Hansen, 1970}) \quad (32)$$

ここに、 B : 基礎幅、 e : 偏心量、 α : 垂直線からの基礎上に作用する荷重の傾斜角、 ϕ , γ : 砂地盤の内部摩擦角並びに単位体積重量、 $B - 2e$: Meyerhof¹⁾による有効基礎幅、式(31)と(32)の N_γ はそれぞれ式(27)と(28)によって与えられる支持力係数である。図-11を見ると、FEMから得られた解が大まかに下界値と上界値の中央に位置してることがわかる。式(31)と(32)によって計算された $q_b/\gamma B$ は偏心量が大きい場合、 $e/B > 0.2$ ($\phi = 30^\circ$), $e/B > 0.25$

($\phi = 35^\circ$), $e/B > 0.3$ ($\phi = 40^\circ$), 上界値よりも大きいことがわかる。これらの解のみが下界値と上界値によって、挟み撃ちにされていないこともわかる。また、常にMeyerhofによる解はHansenによる解よりも大きい。 ϕ が大きくなる時、MeyerhofとHansenによる解の差は、特に $e/B=0$ の時に大きいことがわかる。 e/B が増加するにつれて、MeyerhofとHansenによる解の差は徐々に小さくなっている。図-11より、式(31)と(32)は偏心量が大きくなる時、支持力を解析結果の上界値より大きく評価する傾向が見られるので、ここでは偏心量が大きい場合にも支持力が解析結果の上界値、下界値の間に入るように次式を提案するものとする。

$$q_b = \frac{1}{2} \gamma (B - 2.5e) (1 - \tan \alpha)^{2.5} N_\gamma \quad (33)$$

ここに、上式の N_γ は式(32)と同様に、式(28)によって与えられる支持力係数である。上式においては、式(31)と(32)と比較して、 $B - 2e$ の代わりに $B - 2.5e$ が用いられているのが特徴である。図-11からは、式(33)で表される提案式は $e/B \leq 1/12$ の範囲内ではHansenによる値と良く対応し、 $e/B > 1/12$ の領域ではFEMから得られた解に類似してることがわかる。

図-12には $\phi=35^\circ$ の場合における $q_b/\gamma B$ と荷重傾斜角 α との関係を示す。図-12から、図-11と同様にFEMからの解が大まかに下界値と上界値の中央に位置してることがわかる。MeyerhofとHansenからの解は、図-12(b)

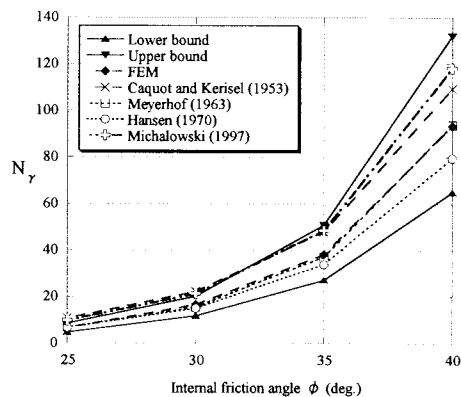


図-10 中心・鉛直荷重に対する支持力係数 N_γ と内部摩擦角 ϕ との関係 (Roughな剛性基礎)

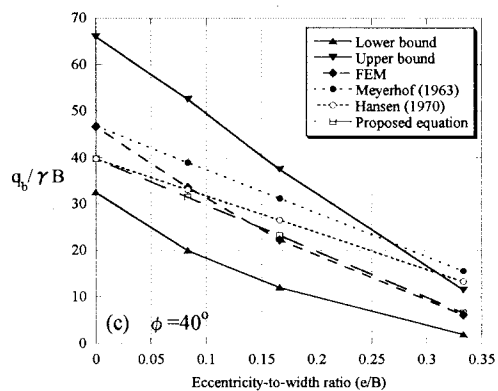
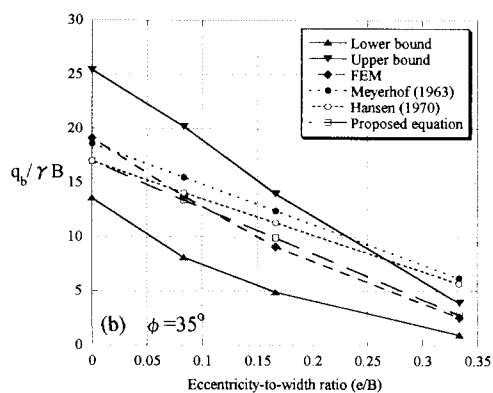
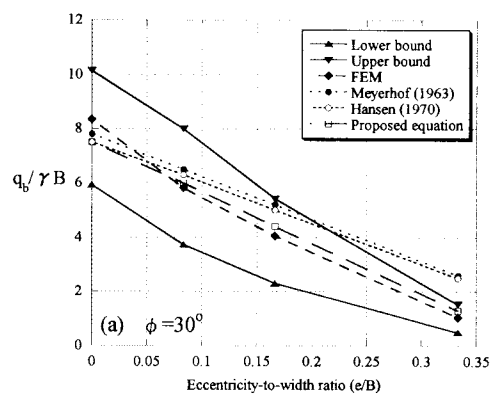


図-11 様々な内部摩擦角に対する $q_b/\gamma B$ と偏心率、基礎幅比(e/B)との関係 ($\alpha=0^\circ$)

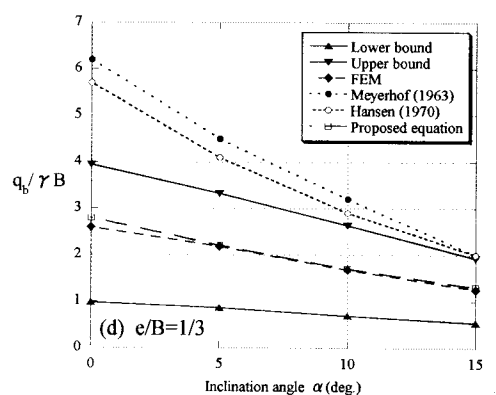
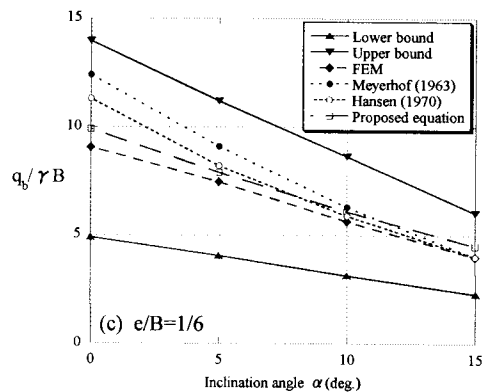
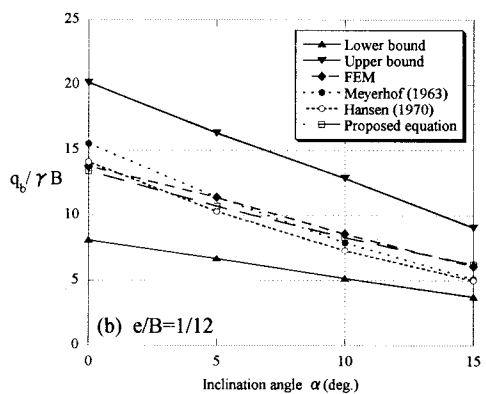
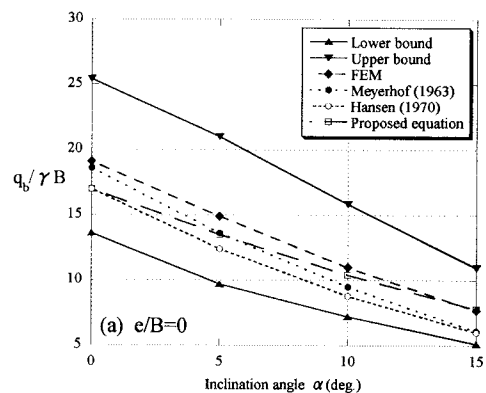


図-12 $\phi=35^\circ$ における $q_b/\gamma B$ と荷重傾斜角 α との関係

の $\alpha=0^\circ$ と図-12(c), (d)の $\alpha=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ においてFEMからの解よりも大きいことがわかる。特に、図-12(d)で示される $e/B=1/3$ の時には、MeyerhofとHansenからの解は $\alpha=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ に対して上界値よりも大きくなっている。また、図-12(a)において $\alpha=0^\circ$ の時、本研究における提案式からの解はHansenからの解に一致しているが、 α が増加するにつれてFEMからの解に近づくことが観察される。さらに、図-12(b)～(d)を見ると、本研究における提案式からの解は、MeyerhofとHansenからの解に比べて、FEMからの解に類似する傾向を示すことがわかった。

以上より、数値極限解析からの結果である下界値と上界値は正解値を挟み撃ちにすることができるので、他の提案式などと比較した場合にベンチマークとなることができる。MeyerhofとHansenによる提案式は、偏心量が大きい場合、特に $e/B \geq 1/3$ の時、支持力を解析結果の上界値より大きく評価する傾向があると考えられる。

5. 結論

本報告では数値極限解析と有限要素解析を用いて、偏心および傾斜荷重を受けた砂地盤上の剛性基礎の支持力を解析した。その結果をMeyerhof²⁰⁾とHansen⁷⁾による提案式から計算された支持力と比較した。本報告から得られた主な結論は以下の通りである。

- 1) 中心・傾斜荷重の場合、荷重が作用する方向の基礎端において、主に変位速度ベクトルと塑性領域は発達する。一方、偏心・鉛直荷重の場合、変位速度ベクトルは主に、基礎上において荷重が載荷されている側で観察される。塑性領域は荷重直下の領域でより顕著になる。
- 2) 有限要素解析からの基礎直下での垂直応力分布は線形分布の仮定と比べて、分布形状と最大値ともに比較的良好一致を示した。
- 3) 支持力係数 N_γ の既存の提案式に関しては、 $\phi \geq 35^\circ$ では、Michalowski³²⁾, Caquot and Kerisel³¹⁾, Meyerhof²⁰⁾, Hansen⁷⁾の順に大きい。下界値と上界値は $\phi=25^\circ$ と 30° の時のMichalowski, Caquot and Keriselの値を除いて、すべての値を挟み撃ちにすることができた。このMichalowski, Caquot and Keriselによる値は $\phi=25^\circ$ と 30° の時に他の提案式と比較すると、 N_γ を大きく評価する傾向があると考えられる。下界値と上界値の差並びに、MeyerhofとHansenによる解の差は ϕ が大きくなるにつれて、徐々に大きくなる。また、FEMからの N_γ はMeyerhofによる値と良好一致を示した。
- 4) 有限要素解析から得られた極限支持力は、大まかに数値極限解析からの解である下界値と上界値の中央に位置した。よって、今回設定した解析条件に対しては、正解値は下界値と上界値の平均値によって大まかに表されるかもしれないことがわかった。

- 5) Meyerhof¹⁾による有効基礎幅の仮定 $B-2e$ を用いているMeyerhof²⁰⁾とHansen⁷⁾による提案式によって計算された支持力は、偏心量が大きくなる場合、特に $e/B \geq 1/3$ の時、解析結果の上界値より大きな支持力となる傾向があると考えられる。また、Meyerhofによる解は常にHansenによる解よりも大きい。偏心量、基礎幅比(e/B)あるいは荷重傾斜角(α)が増加する時、MeyerhofとHansenによる解の差は徐々に小さくなる。一般に、基礎の設計においては大きな偏心量は避けているので、Meyerhof²⁰⁾とHansen⁷⁾によるこの不備は特に報告されていない。今回、偏心量が大きい場合にも解析結果の上界値と下界値の間に入り、FEMから得られた解にも類似する傾向を示す新しい支持力式を提案した。そして、この提案式を用いると、大きな偏心量の時でさえも、妥当な支持力を計算することができることを示した。
- 6) 数値極限解析は正解値が不明な安定解析での正解値を下界値、上界値とで挟み撃ちにして、その幅を狭めることにより工学的に十分精度のある解を求めることが可能である。よって、実務的な問題に対しても十分適用可能であると考えられる。

謝辞

本研究は著者がPurdue University, USAをVisiting scholarとして滞在していた時に主に行ったものである。著者に極限解析のオリジナルプログラムを快く提供し、有益な議論をいただいたPurdue University, Prof. Salgadoに謝意を表します。

参考文献

- 1) Meyerhof, G. G.: The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads, *Proc. of 3rd ICSMFE*, Zürich, 1, 440-445, 1953.
- 2) Prakash, S. and Saran, S.: Bearing capacity of eccentrically loaded footings, *J. Soil. Mech. And Found. Engrg. Div.*, ASCE, 97(1), 95-117, 1971.
- 3) Purkayastha, R. D. and Char, A. N. R.: Stability analysis for eccentrically loaded footings, *J. Geotech. Engrg. Div.*, ASCE, 103(6), 647-651, 1977.
- 4) Saran, S., Prakash, S. and Murty, A. V. S. R.: Bearing capacity of footings under inclined loads, *Soils Found.*, 11(1), 47-52, 1971.
- 5) Hanna, A. M. and Meyerhof, G. G.: Experimental evaluation of bearing capacity of footings subjected inclined loads, *Can. Geotech. J.*, 18, 599-603, 1981.
- 6) Saran, S. and Agrawal, R. K.: Bearing capacity of eccentrically obliquely loaded footing, *J. Geotech. Eng.*, ASCE, 117(11), 1669-1690, 1991.
- 7) Hansen, J. B.: A revised and extended formula for bearing capacity, *Danish Geotech. Inst. Bull.*, 28, 5-11, 1970.
- 8) Peck, R. B., Hanson, W. E. and Thornburn, T. H.: *Foundation Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.

- 9) Hansen, J. B.: A general formula for bearing capacity, *Danish Geotech. Inst. Bull.*, 11, 38-46, 1961.
- 10) 山本健太郎: 偏心および傾斜荷重を受けた砂質土地盤における基礎の極限解析, 構造工学論文集 Vol.50A, 1203-1214, 2004.
- 11) Lysmer, J.: Limit analysis of plane problems in soil mechanics, *J. Soil Mech. Found. Div.*, 96(SM4), 1311-1334, 1970.
- 12) Sloan, S. W.: A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, 2671-2685, 1988.
- 13) Anderheggen, E. and Knopfel, H.: Finite element limit analysis using linear programming, *Int. J. Solids Struct.*, 8, 1413-1431, 1972.
- 14) Bottero, A., Negre, R., Pastor, J. and Turgeman, S.: Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 22, 131-149, 1980.
- 15) Sloan, S. W.: Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 12, 61-77, 1988.
- 16) Sloan, S. W.: Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 13, 263-282, 1989.
- 17) Sloan, S. W. and Kleeman, P. W.: Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields, *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 127, 293-314, 1995.
- 18) Sloan, S. W.: Limit analysis in geotechnical engineering, *Modern developments in geomechanics*, C. M. Haberfield, ed., Monash University, Melbourne, Australia, 167-199, 1995.
- 19) Sloan, S. W. and Yu, H. S.: Rigorous plasticity solutions for the bearing capacity factor N_γ , *Proc. of 7th Australia-New Zealand Conf. on Geomechanics*, Adelaide, 544-550, 1996.
- 20) Meyerhof, G. G.: Some recent research on the bearing capacity of foundations, *Can. Geotech. J.*, 1(1), 16-26, 1963.
- 21) Ukritchon, B., Whittle, A. J. and Sloan, S. W.: Undrained limit analysis for combined loading of strip footings on clay, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 124(3), 265-276, 1998.
- 22) Yu, H. S., Salgado, R., Sloan, S. W. and Kim, J. M.: Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 124(1), 1-11, 1998.
- 23) Kim, J., Salgado, R. and Yu, H. S.: Limit analysis of soil slopes subjected to pore-water pressures, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 125(1), 49-58, 1999.
- 24) Kim, J., Salgado, R. and Lee, J.: Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, ASCE, 128(7), 546-557, 2002.
- 25) Agrawal, R. K.: Limit analysis of eccentrically obliquely loaded footing, *Proc. of 13rd ICSMFE*, New Delhi, 2, 453-456, 1994.
- 26) Salençon, J. and Pecker, A.: Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. Part I: purely cohesive soil, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14, 349-375, 1995.
- 27) Salençon, J. and Pecker, A.: Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. Part II: purely cohesive soil without tensile strength, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14, 377-396, 1995.
- 28) Michalowski, R. L. and You, L.: Effective width rule in calculations of bearing capacity of shallow footings, *Comput. Geotech.*, 23(4), 237-253, 1998.
- 29) Abbo, A. J.: Finite element algorithms for elastoplasticity and consolidation, *Ph. D. thesis*, Univ. of Newcastle, Australia, 1997.
- 30) Sloan, S. W., Sheng, D. and Abbo, A. J.: Accelerated initial stiffness schemes for elastoplasticity, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 24, 579-599, 2000.
- 31) Caquot, A. and Kerisel, J.: Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulverulent, *Proc. of 3rd ICSMFE*, Zürich, 1, 336-337, 1953.
- 32) Michalowski, R. L.: An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis, *Soils Found.*, 37(4), 57-64, 1997.

(2004 年 4 月 16 日受付)