

オイラー型解法による大変形ボクセル解析

Large Deformation Voxel Analysis using Eulerian Solution

開田隆広*, 高浦弘志**, 岡澤重信***, 藤久保昌彦****

Takahiro KAIDA, Hiroshi TAKAURA, Shigenobu OKAZAWA and Masahiko FUJIKUBO

*広島大学 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

**広島大学 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

***正会員 博(工) 広島大学助教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

****正会員 工博 広島大学教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

The Eulerian finite element method is compatible with voxel data because the computational mesh is generated in the space regardless of material configuration. In this study, CAD surface data is converted into voxel data and its voxel data is used for input data for the Eulerian finite element analysis. By using advantages of the voxel data and the Eulerian finite element method, we can save labor for mesh generation of the Eulerian finite element method and treat large deformation analysis of complicated solid material.

Key Words : voxel analysis, large deformation, Eulerian solution

1. 緒言

従来の有限要素法においては、より少ない自由度で効率的に解析を行うのが課題であった。しかし最近の計算機性能とそれを取り巻く環境は飛躍的に進歩しており、自由度を少なくするという要求は薄れている。有限要素法における近年の課題は、解析モデルの3次元化と大規模化による形状モデリングおよびメッシュ作成の効率化である。

そのような背景において登場したのがボクセル解析¹⁾である。ボクセル解析は、物体形状をすべて同一の立方体要素を用いてモデリングを行う解析法である。当初は複合材料のようなスケールの小さな複雑形状に対して適用されたものであり²⁾³⁾、最近では商用のボクセル解析コード⁴⁾もすでに発売されている。ボクセル解析においては、要素分割の容易さやデジタルデータとの相性の良さなど様々な利点がある。しかしながら、ボクセル解析法は現状では線形解析に留まっており、大変形が絡むような幾何学的非線形問題を扱うことができないのが欠点である。

オイラー型有限要素法⁵⁾では、計算格子が空間に固定されその格子を越えて物体が変形する。計算格子が歪むことがないから極めて大きな変形の取り扱いが可能である。それに対して、これまでの固体解析のほとんどが、物体の変形に追従して計算メッシュが移動するラグランジェ型有限要素法であった。このラグラン

ジェ型有限要素法は、極めて大変形になるとメッシュの健全性が損なわれるという問題がある。

このようにオイラー型有限要素法における計算格子の制御方法は、固体・構造解析において一般的なラグランジェ型有限要素法と異なるわけであるが、その解法が有限要素法に基礎をおいていることに違いはない。しかし固定格子を用いて要素分割を意識させないという観点から、オイラー型解法は広義のメッシュフリー法又はボクセル解析法とも捉えることが可能である。

本研究では、オイラー型解法を用いることによって、ボクセル解析法を大変形解析にも適用できるように拡張することを目的とする。

2. ボクセル解析法

従来の有限要素解析は、境界を滑らかに近似し要素の大きさを積極的に制御して解析自由度を少なくするものである。これに対して、ボクセル解析法は、図-1のように全ての要素を同一のボクセルとする代わりに、非常に細かいメッシュ分割を行い形状を近似する解析法である。ボクセル解析法は境界が滑らかでなく、解析自由度が増えたとしても、解析モデル作成の容易さを優先した方法である。ボクセル解析が注目を浴びるようになってきた背景には、3次元化に伴う解析モデルの複雑化と、解析モデル生成の能力不足、計算機能力の向上が挙げられる。

ボクセル解析法は、解析モデルの要素分割を確実に

[†] Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

行うことができる。また、要素は直方体なので、四面体要素よりも精度が良い。さらに、要素の付加や削除が容易なため、設計モデルの変更に容易に対応でき、指定された強度や剛性を満足させるのに個々のボクセルが必要かどうか順に判定することで、最適設計⁶⁾も可能である。また、ボクセルモデルは、CAD (Computer Aided Design) や医療現場などで用いられる CT スキャンなどの連続断面画像からも作成可能である。したがって、形状モデリングにおいては多くのデジタルデータを用いることができる。

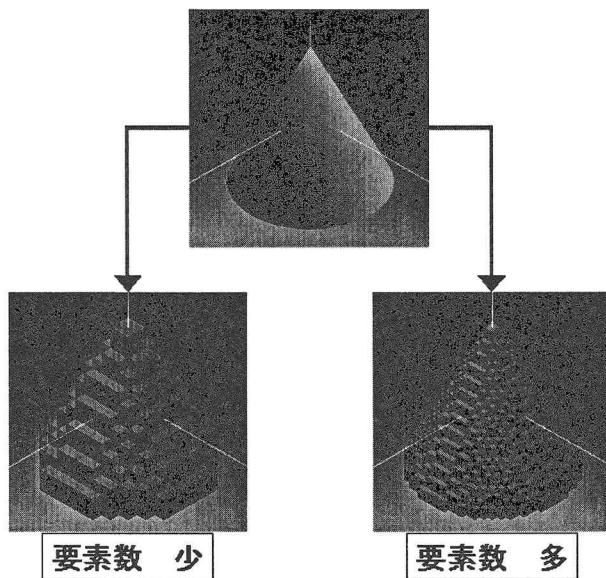


図-1 ボクセル解析におけるモデルリング

3. オイラー型有限要素法

本研究で用いるオイラー型解法を概説する⁵⁾。まずラグランジェ記述での支配方程式は一般的に次のように表現できる。

$$\dot{\phi} = f \quad (1)$$

ここで、 ϕ は任意の関数、 f は外力項である。上付きの $\cdot$ は物質時間導関数である。

それに対して、オイラー記述での支配方程式は、空間時間導関数によって表現される。式(1)で用いられている物質時間導関数と空間時間導関数 $\partial/\partial t$ の関係は以下のようである。

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad (2)$$

$\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ はそれぞれ物質点の位置ベクトル及び速度ベクトルである。また右辺第2項は移流項と呼ばれる。

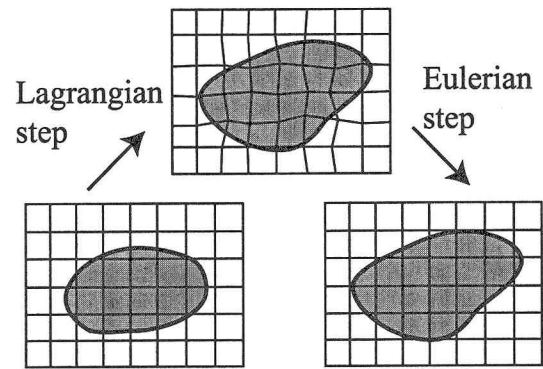


図-2 operator split 法によるオイラー型解法

式(1)(2)より、オイラー記述での支配方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = f \quad (3)$$

オイラー記述での支配方程式(3)を、operator split 法⁷⁾で解く事を考える。operator split 法では、式(3)を以下の2つに分離する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f \quad (4)$$

$$\frac{\partial^* \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (5)$$

式(4)は時間を進めるラグランジェ型ステップであり、式(5)は時間を止めたオイラー型ステップである。式(5)は時間を止めているので、 ϕ の空間時間導関数である左辺第1項は厳密には存在しないが、静的な扱いの擬似的な空間時間導関数として*をつけて記してある。

図-2はoperator split 法の概念を図示したものである。まず式(4)に対応した時間を進めるラグランジェ型ステップにおいて、計算格子を変形させて物体を変形させる。式(4)を一般的なラグランジェ記述での支配方程式(1)と比べると時間導関数の種類が違うが、オイラー型解法では計算格子が固定されているので、この時間導関数の種類の差異は無視できる。次に式(5)に対応した時間を止めたオイラー型ステップにおいて、移流方程式を解くことにより歪んだ計算格子を元の位置に引き戻す操作を行う。このような操作をそれぞれの時間ステップでくり返ししながら計算を進めていくことにより、計算格子を固定したオイラー型解法が可能となる。

3.1 ラグランジェ型ステップ

ラグランジェ型ステップにおいては、通常の動的陽解法⁷⁾をそのまま用いる。3次元8節点アイソパラメ

トリック要素で離散化する。離散化された方程式は次のようになる。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{F}^{int} = \mathbf{F}^{ext} \quad (6)$$

ここで $\mathbf{M}$ は質量マトリクスであるが、動的陽解法においては一般的に対角化された集中質量マトリクスが用いられる。 $\mathbf{F}^{int}$ と $\mathbf{F}^{ext}$ はそれぞれ、内力及び外力ベクトルである。中央差分法により解を進め、大変形にも対応できるように Jaumann 速度による応力積分⁸⁾を実行する。

3.2 オイラー型ステップ

operator split 法でのオイラー型ステップは、移流方程式を解くことに帰着される。本研究では移流方程式の解法として MUSCL 法⁹⁾を採用する。まず格子内の諸量を移流させた後、節点の速度に質量を乗じた運動量として移流させる。

3.3 物体境界面の表現

オイラー型有限要素法において、材料の境界面を定義するために、流体分野で広く用いられている、Volume of Fluid (VOF) 法¹⁰⁾を適用する。この方法は、要素内に 0 から 1 の密度関数を用い、図-3 に示すように要素内の材料含有率を定義し、これらを移流させることで境界面を追跡するものである。

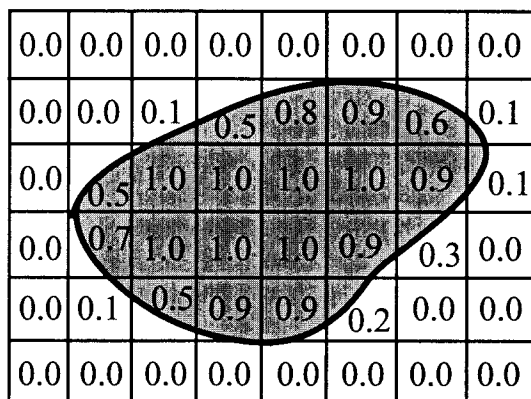


図-3 オイラー型有限要素法における物体境界面の表現

4. 大変形ボクセル解析への拡張

4.1 V-CAD(ボリウム CAD)

本研究では、CAD からボクセルデータを作成するツールとして V-CAD¹¹⁾を使用した。

V-CAD (ボリウム CAD) は 2001 年度から、理化学研究所の「ものづくり情報技術統合化研究プログラ

ム」によって研究・開発されているソフトウェアである。このプロジェクトでは、ボクセルの考えを基盤とした、設計解析統合システムの開発を行っている。

V-CAD は物体形状をボクセルに分割して表現し、個々のボクセルに座標データを持たせることで、ボクセル要素の位置と相互の繋がりを明らかにしている。さらに物理的な属性も入れることで、より実物に近いものを表現できる。全てのボクセルが番地と属性を有しているため、何か形を足す、あるいは一部に穴を開けるなど、切ったり貼ったりの処理を繰り返しても位相情報が頑健なのでデータが崩れないのが特徴である。

V-CAD の形状表現法について、図-4 の 2 次元モデルで説明する。ここでは、3 種類の属性が存在する。物体を含まない空のボクセルと、物体で満たされたボクセルと、物体と空間が混在するボクセルである。それぞれ、空間 (属性 1) ボクセル、内部 (属性 2) ボクセル、境界 (属性 1 + 属性 2) ボクセルと呼ぶことにする。境界ボクセルは 2 種類の属性と、それを仕切る面の情報を有している。これらの情報が V-CAD データとして出力される。

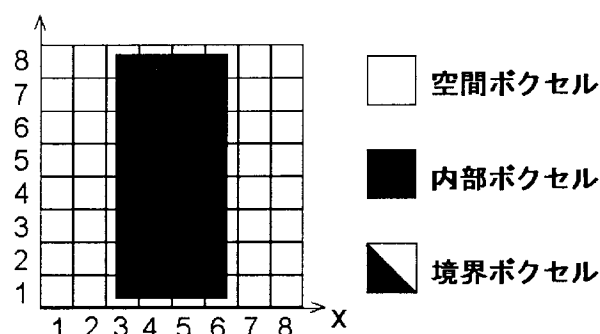


図-4 V-CAD による形状表現法

4.2 オイラー型有限要素法へのデータの受け渡し

V-CAD はオイラー型有限要素法と同様に物体を含む空間全体を分割している。ボクセルの位置情報は V-CAD では座標値で保存されているのに対し、オイラー型有限要素法では X, Y, Z の昇順で番号が振られている。ここで以下の式 (7) のような数列処理を行えば、オイラー型有限要素法への形状データの受け渡しが行える。

$$N(p, q, r) = p + i \cdot (q - 1) + (i \times j) \cdot (r - 1) \quad (7)$$

ここで、 $N(p, q, r)$ はオイラー型有限要素法でのボクセル番号、 (p, q, r) は V-CAD でのボクセル座標、 i は X 方向の分割数、 j は Y 方向の分割数である。

前節で示したとおり、オイラー型有限要素法はVOF法により各要素で0から1の密度関数を用いて物体形状を表現している。したがって、V-CADの境界ボクセルの概念をオイラー型有限要素法に導入することは可能である。しかし、V-CADデータ中の境界ボクセルの情報量は莫大であるため、本研究では境界ボクセルは材料で満たされたボクセルとして扱った。したがって、オイラー型有限要素法で形状再現した場合、物体形状は図-5のように実際より少し大きくなる。

解析の流れは、3次元サーフェス・ソリッドCAD¹²⁾の形状データをIGES形式で出力し、V-CADで読み込む。そして、式(7)を用いてV-CADデータから必要なボクセル情報のみを抜き出し、オイラー型有限要素法で形状を再現できる様にデータ変換を行う。これをもとにオイラー型有限要素法の入力データを作成する。

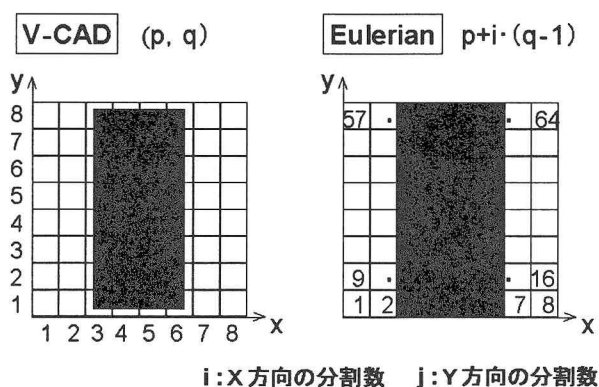


図-5 V-CAD とオイラー型有限要素法のデータ

5. 解析結果

5.1 ベンチマークテスト

本研究で使用するオイラー型有限要素解析コードの精度を検証するために、ベンチマークモデルとして有名なテイラーバーを扱った。

図-6に解析モデルを示す。材料モデルはバイリニア硬化型の J_2 流れ則を使用し、弾性係数218GPa, 降伏応力0.2GPa, ポアソン比0.28, 硬化係数2.18GPa, 密度7800kg/m³とした。300m/sの初速度を物体に一樣に与えた。図-7に解析に用いたラグランジェメッシュとオイラーメッシュを示す。オイラーメッシュにおいて、黒い部分は材料含有率100パーセントを示し、白い部分は空間で、材料含有率0パーセントを示す。

図-8はラグランジェ型有限要素法とオイラー型有限要素法で得られた解析結果であり、50 μ s後の変形図と相当塑性ひずみの分布を示したものである。オイラー

型有限要素法での解析結果は、材料含有率50パーセントでの等値面を示している。また図-6に示した端点PのX方向の変位をラグランジェ型有限要素法とオイラー型有限要素法において、0.8 μ s毎に書き出したのが図-9である。

図-8から分かるように、ラグランジェ型有限要素法とオイラー型有限要素法での解析結果において、相当塑性ひずみの分布に多少の差異はあるがほぼ等しい解析結果を得ることができた。また図-9においては、両解析においてP点の変位の差異はほとんど無いことが分かる。したがって、本研究で使用するオイラー型有限要素解析コードの正当性が確認できる。

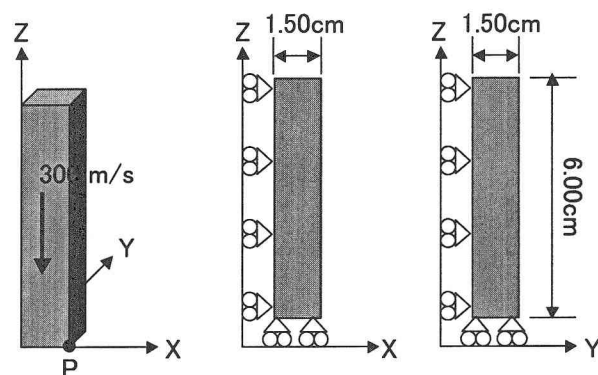


図-6 ベンチマークモデル

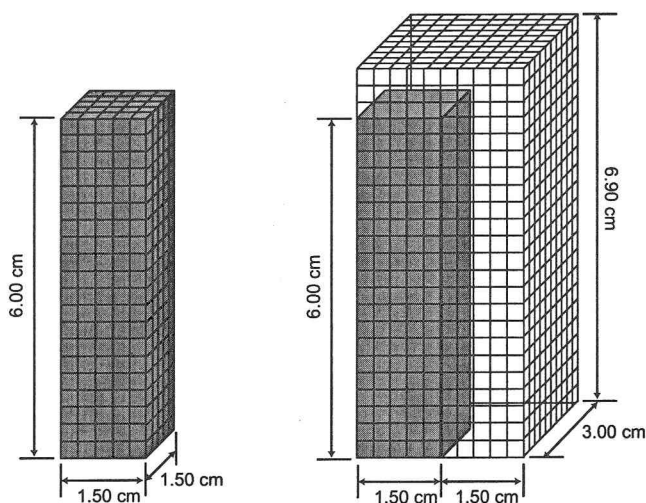


図-7 ラグランジェメッシュ(左) とオイラーメッシュ(右)

5.2 衝突解析

図-10に示すような形状の弾塑性材料の衝突解析を行った。図-10はCADで作成したモデルをV-CADで取り込み、ボクセル分割したものである。空間を284

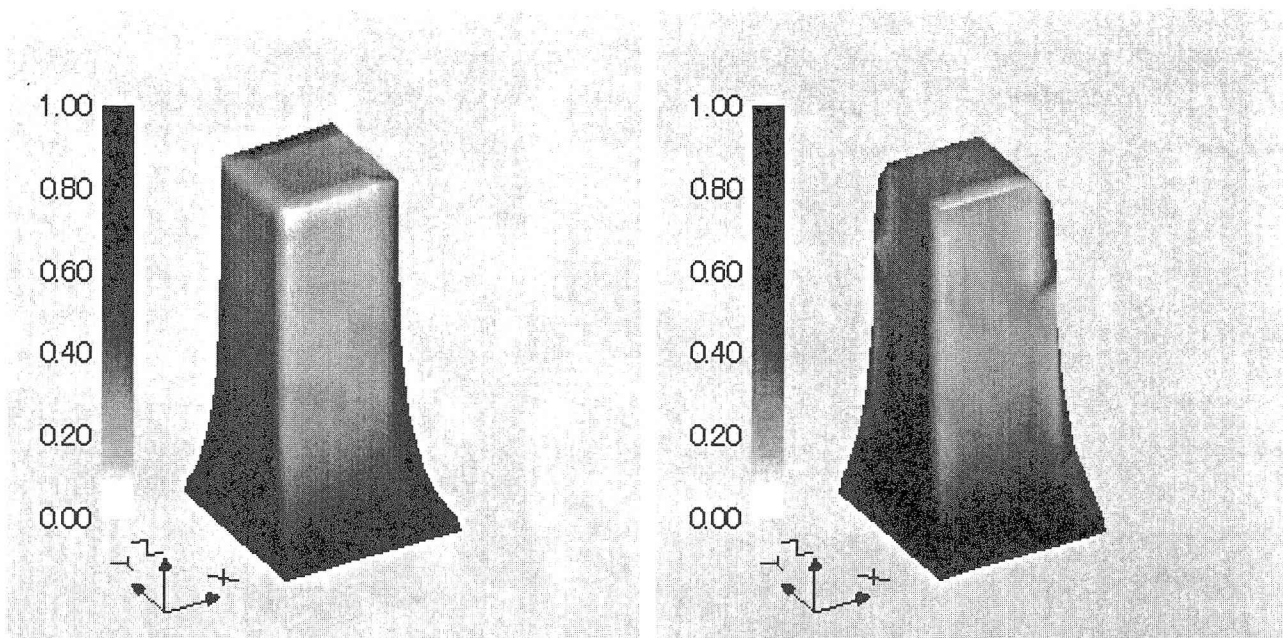


図-8 50 μ s 後の相当塑性ひずみ分布図 (左: ラグランジェ 右: オイラー)

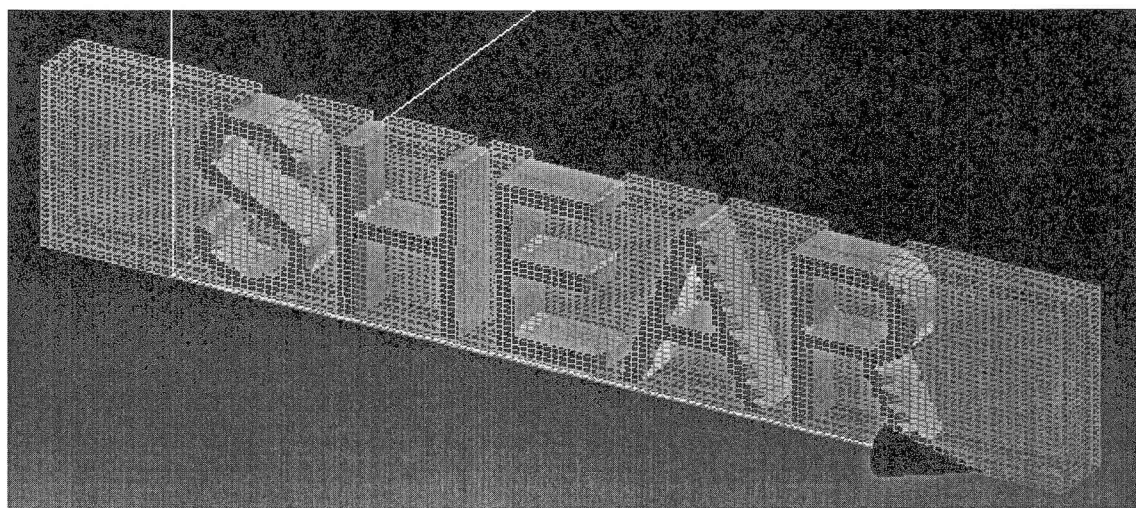


図-12 せん断解析モデル (V-CAD)

$\times 120 \times 118\text{mm}^3$ に設定し、この空間を $32 \times 16 \times 16$ 分割した。全要素数は 8192 要素で、これをオイラー型有限要素法での入力データとした。構成式はバイリニア硬化型の J_2 流れ則による弾塑性材料を用いた。材料定数は上記のベンチマークと同様とした。300m/s の速度を物体に与えて、衝突解析を行った。

図-11 は材料含有率 50 % で等値面を取ったときの変形図である。このようにボクセルデータをオイラー型有限要素解析に受け渡すことによって、これまで線形

解析に留まっていたボクセル解析を非線形解析に拡張することができる。

5.3 せん断解析

衝突解析においては、計算メッシュの回転の影響は顕著でなかった。そこで、回転の影響が大きいせん断解析を行った。解析を行った形状は図-12 のようなモデルである。図-12 は CAD で作成したモデルを V-CAD で取り込み、ボクセル分割したものである。空間を 630

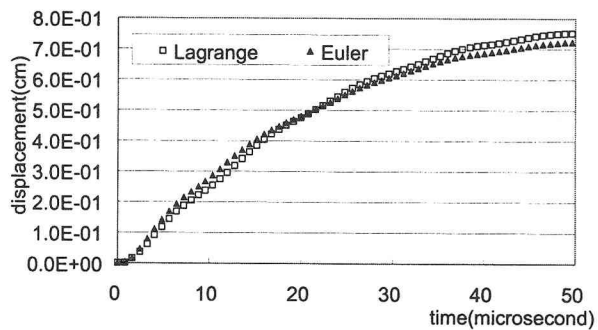


図-9 点 P の変位比較

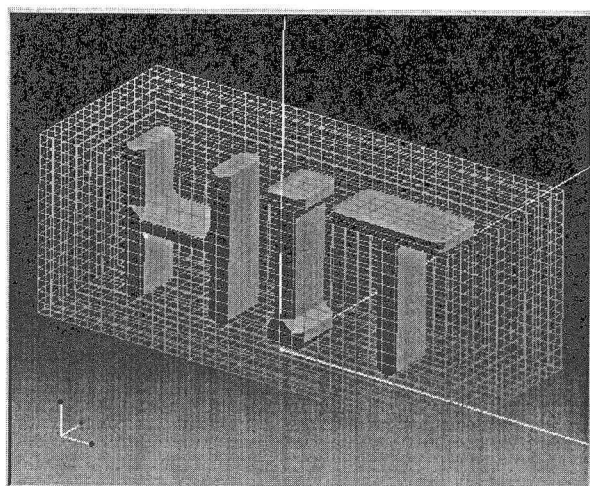


図-10 衝突解析モデル (V-CAD)

× 35 × 105mm³ に設定し、この空間を 128 × 4 × 32 分割した。全要素数は 16384 要素で、これをオイラー型有限要素法での入力データとした。構成式及び材料定数はベンチマークモデルと同様である。

図-13 は材料含有率 50 % で等値面を取ったときの変形図である。このように、回転を有するような大変形解析にもボクセル解析法を拡張することができた

5.4 複雑な構造を持つ形状のモデリング

大腿骨のデジタルデータを、V-CAD で取り込んだ。取り込んだモデルが含まれるように空間を 95 × 175 × 200 mm³ に設定して、この空間を 32 × 64 × 64 分割した (図-14)。全要素数は 131072 要素である。要素を抽出する際に、境界セル 7748 要素と物体内部セル 16505 要素に分けて取り出した。この内部セル 16505 要素からそれぞれ 25 %、35 % 要素を間引くことで骨内部の骨梁構造を表現した (図-15)。内部セル数はそれぞれ

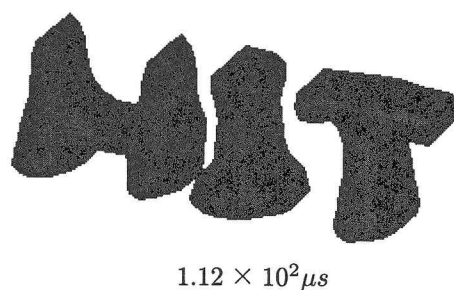
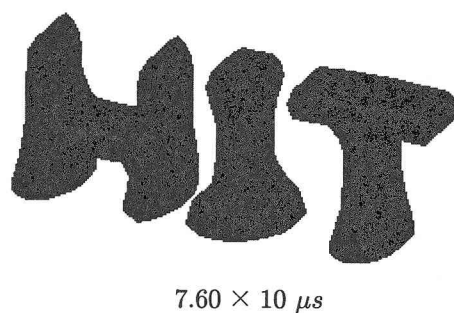
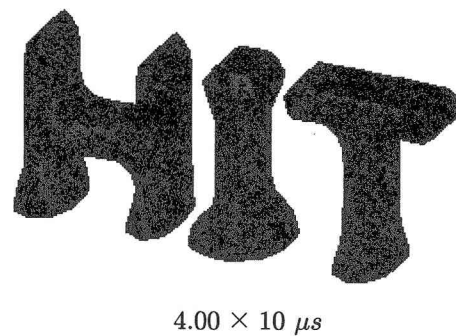
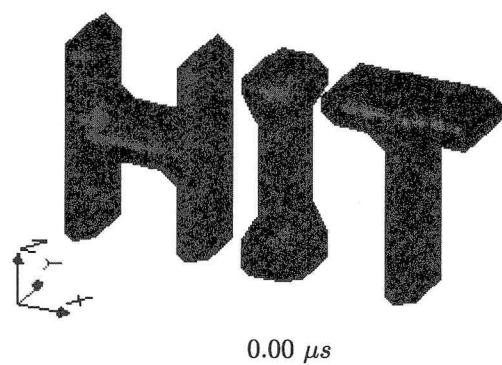


図-11 衝突解析の変形図

12379, 10728 要素となった。これらにそれぞれ境界セル 7748 要素を加えることで、外見は同じで内部構造が異なる 2 種類の骨モデルを作成した。

従来のメッシュ生成法であれば、解析モデルが変更されるたびにメッシュの切り直しとなる。オイラー型有限要素法は、構造メッシュに物体が存在するか否かで形状を再現しているので、ボクセル解析法と同様に

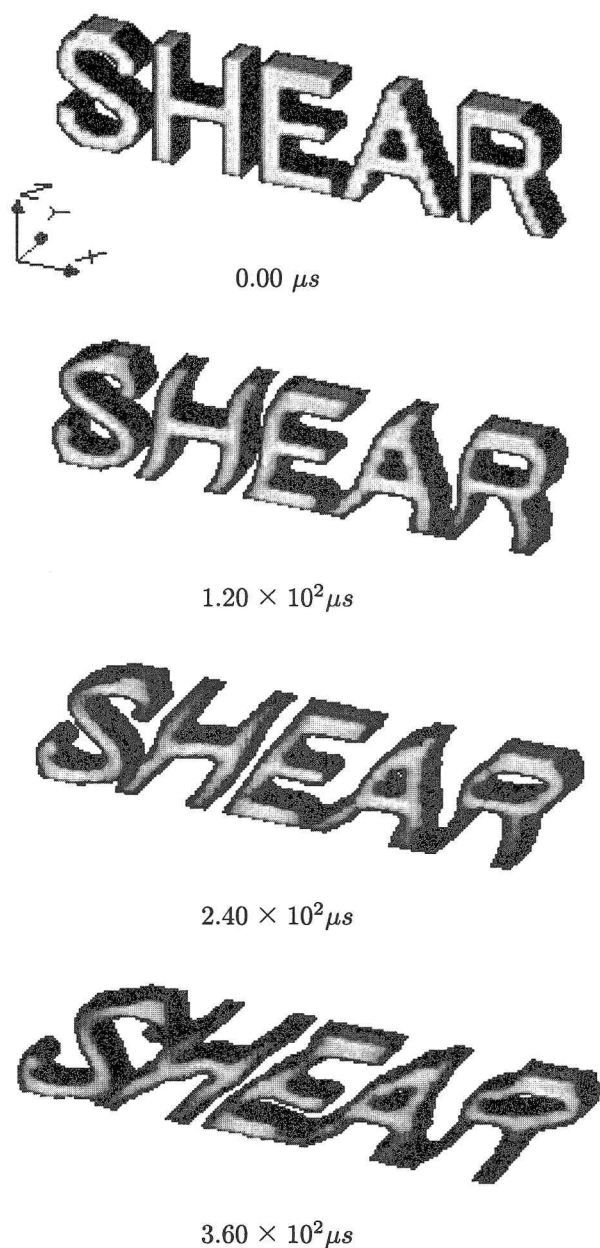


図-13 せん断解析の変形図

要素付加・削除が容易に行える。この利点を生かせば、モデルの変化に即座に対応でき、この例のような異なる内部構造を持つ複雑な解析モデルの作成も容易となる。CAD データからこの解析モデル作成まで計算機によりほぼ自動化された。なお、要素を間引く際には一様乱数を用いた。実物の骨梁構造はこのような一様乱数で表現できるような単純なものではない。また、骨梁を再現するには、この例で用いたボクセルサイズは大きすぎるということを付け加えておく。

内部セル 25 % を間引いたモデルで、弾性解析を行った。材料はすべて皮質骨で構成されているものとし、弾

性係数 12GPa, ポアソン比 0.3, 密度 2600kg/m³ とした。下断面を完全固定し、大腿骨頭上部に 20m/s の速度を与えた。図-16 に 100 μs 後の Mises の応力分布を示す。オイラー型有限要素法は特別な方法なしに自由境界面の生成が可能であるので、将来的には骨折などのシミュレーションも期待できる。しかし、オイラー型有限要素法を用いてこのような大規模な解析を行うには、計算機の並列化などの処理が必要である。

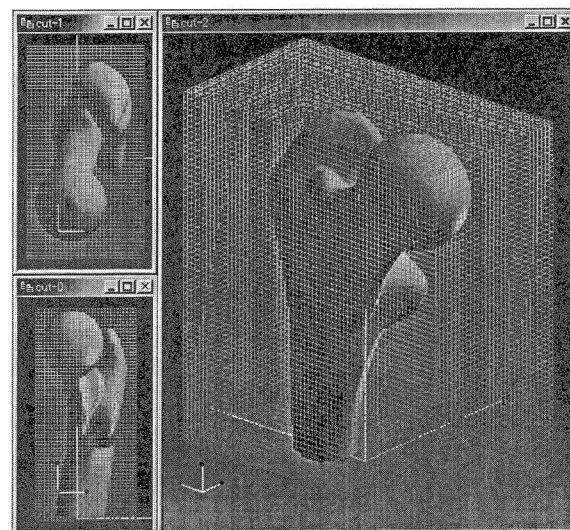


図-14 大腿骨解析モデル (V-CAD)

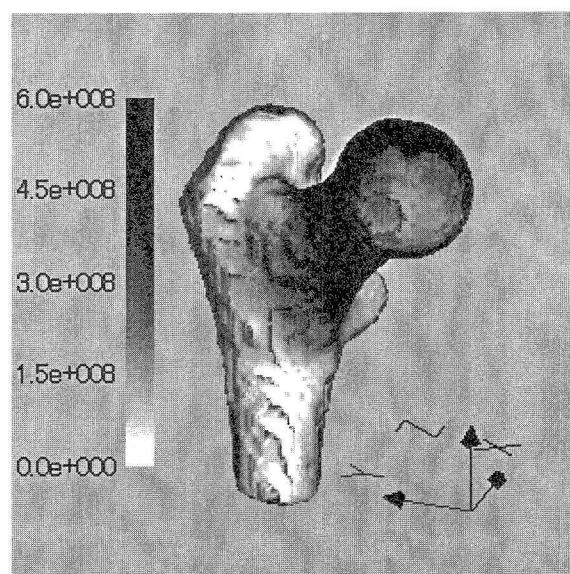


図-16 Mises 応力分布図

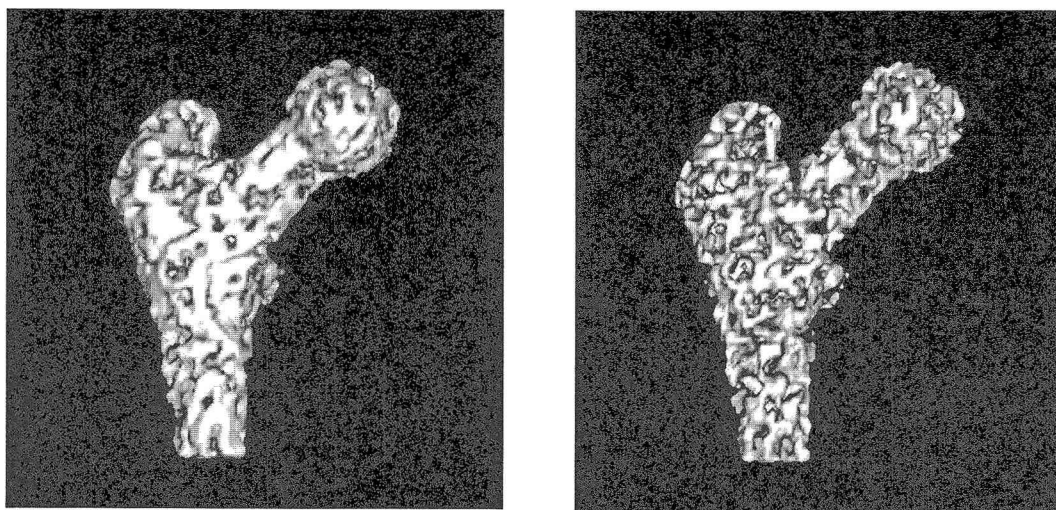


図-15 大腿骨内部構造 (左図 : 75 %, 右図 : 65 %)

6. 結言

オイラー型解法を用いることによって、ボクセル解析法を大変形解析が可能となるように拡張した。ボクセル解析とオイラー型有限要素法の利点を生かすことで、ラグランジュ型有限要素法では困難もしくは不可能な、複雑な形状の大変形解析が可能となった。

オイラー型有限要素法の特徴であるメッシュ生成の容易さと、形状入力にボクセルデータを用いることで、これまでCAEの課題であった、形状モデリングとメッシュ生成の手間を大幅に軽減した。また連続断面画像などのデジタルデータからボクセルデータを作成するのは容易であるので、オイラー型有限要素法が対応可能な形状モデリングツールはCADに限定されず、デジタルデータとの融合性が非常に良い。

オイラー型有限要素法は固体・流体・気体の相互作用が関連する現実的なシミュレーションが期待でき、大変形ボクセル解析は非線形シミュレーションの強力なツールとして期待できる。

謝辞: 本研究は文部科学省科学研究費補助金(若手研究B: 15760605)の援助を受けた。そして、著者らが所属している研究室の諸氏からの多大な協力を得た。特に、小島宏介氏(現マツダ)に負うところが大きい。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 大坪英臣, 米里直樹: ボクセル情報を用いたソリッド構造の解析法, 日本造船学会論文

集, 第182号, pp.595-600, 1997.

- 2) Hollister, S.J. and Kikuchi, N.: Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotechnology and Bioengineering*, Vol.43, No.7, pp.586-596, 1994.
- 3) Terada, K. and Kikuchi, N.: Microstructural design of composites by using the homogenization method and digital images, *Mat. Sci. Res. Int.*, Vol.2, No.2, pp.73-81, 1996.
- 4) <http://www.quint.co.jp/jp/pro/vox/index.htm>
- 5) 岡澤重信, Benson, D.J.: Eulerian ハイドロコードによる破壊解析, 応用力学論文集, Vol.6, 土木学会, pp.209-214, 2003.
- 6) 藤井大地, 鈴木克幸, 大坪英臣: ボクセル有限要素法を用いた構造物の位相最適化, 日本計算工学会論文集, Vol.2, pp.87-94, 2000.
- 7) Benson, D.J.: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 99, 235-394, 1992.
- 8) 岡澤重信, 河口篤志, 藤久保昌彦: 各種メッシュ制御における動的陽解法, 応用力学論文集, Vol.6, 土木学会, pp.151-158, 2003.
- 9) Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme IV: a new approach to numerical convection, *J. Comput. Phys.* 23, pp.276-299, 1977.
- 10) Hirt, C.W. and Nichols, B.D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of three boundaries, *J. Comput. Phys.* 39, pp.201-225, 1981.
- 11) <http://www.vcad.jp/>
- 12) 雨宮好文, 安田仁彦: CAD/CAE/CAM 入門, オーム社, 1999.

(2004年4月16日 受付)