

界面要素を用いた 3 次元有限被覆法

Three-dimensional finite cover method with interface elements

車谷麻緒*・寺田賢二郎**

Mao KURUMATANI and Kenjiro TERADA

*学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 Ph.D. 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

We propose a three-dimensional analysis method for evaluating elastic-plastic behavior of heterogeneous media by finite cover method (FCM) with interface elements. The installation of interface elements is to enhance the approximation in external displacement boundaries or material interfaces. Then, the performance of interface elements is examined for the degrees of weight function and the approximation at external boundaries and material interfaces. Finally, we realize the capabilities of the FCM with interface elements to characterize the elastic-plastic mechanical behavior of three-dimensional meso-structures of materials.

Key Words : 3D-FCM, Interface elements, Generalized elements, Augmented Lagrangian Method, Elastoplasticity

1. はじめに

1990 年代中頃、要素による束縛からの解放を目指して Element Free Galerkin 法¹⁾に代表される要素のない節点のみによる解析手法の開発が全盛期をむかえた。しかしながら、節点のみの近似には領域積分や境界条件の扱いが煩雑であるといったデメリットが多く、特に 3 次元問題への対応に対しては課題を残した。近年では再び要素が有する技術的資産の重要性が再認識され、要素を用いた近似、特に PU 条件 (Partition of Unity)²⁾を有限要素近似に導入した解析手法が注目を集めている。このような解析手法は、しばしば有限要素法 (以下、FEM) の一般化あるいは一般化有限要素法と総称され、有限被覆法 (Finite Cover Method, 以下 FCM)^{3),4)}や X-FEM⁵⁾, GFEM⁶⁾などはその代表である。これらの手法は、解析対象の形状にとらわれることなく自由に近似領域 (要素) を構成することが可能であることから、しばしばメッシュフリー法に分類されることがある。

一般化有限要素法のひとつである FCM では、PU 条件を満たす重み関数 (近似関数) を定義する数学領域と解析対象領域である物理領域を独立に定義できることから、FEM でいうところの要素内に物理境界が位置することを許容している。したがって、任意の解析対象領域を定型の数学メッシュで覆う場合や、異種材料界面が要素内を横切る場合には、部分的にしか物理領域を持たない特殊な要素 (以降、「一般化要素」と呼ぶ)^{7),8)}が物理境界に配置されることになる。

一般に有限要素では、節点値を操作することで境界条件を容易に満足させることが可能である。これに対して、一般化要素では有限要素に対応する節点と物理境界が一致するとは限らないため、変位の基本境界や異種材料界面において、当然その特性に対応した境界条件・連続条件の付加に対する処理が必要となる。従来一般化有限要素法、すなわち上述の FCM や GFEM

などに関する研究では、ペナルティ法による処理を採用した報告が大勢を占め、詳細な検討がなされていない。また、ペナルティ法を採用した場合、反復法による連立方程式の求解に支障を与えたり、不連続な応力分布を発現するといった問題が報告されている⁹⁾。

そこで本研究では、FCM の変位境界・異種材料界面を内在する一般化要素について、力学的に妥当な境界条件・連続条件の処理方法を提案する。具体的には、一般化要素に界面要素の技術を導入し、その適用性に関する詳細な検討を行い、一般化要素に対する境界条件・連続条件の処理が可能な界面要素を用いた FCM への拡張を図る。この界面要素を用いた FCM は、立方体の定型メッシュを用いた 3 次元メッシュ生成を前提としており、以下の特徴を有する。

- 変位境界を含む一般化要素に界面要素を導入することで、解析自由度の存在しない物理境界に変位の拘束条件を満足させることができる。
- 異種材料界面を含む一般化要素に界面要素を導入することで、解析自由度の存在しない物理境界に各物理量の連続条件を満足させることができる。

以降、本論文では界面要素を用いた FCM の定式化を述べたのち、3 次元問題を対象として、界面要素に設定する基底関数の次数の決定に関する検討を行うとともにその近似性能を数値的に検証する。そして、複雑な幾何学的特性を有する 3 次元非均質体微視構造に対する弾塑性数値解析例を示し、本研究で拡張した界面要素を用いた FCM の有効性を例示する。

2. 界面要素を用いた有限被覆法

本節では、Shi¹⁰⁾により一般化有限要素法のひとつとして提案された Manifold 法を前身とする有限被覆法 (以下、FCM) の定式化を示す。まず、FCM の近似の考え方を概説し、本研究で対象とする一般化要素^{7),8)}と FCM

[†] Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

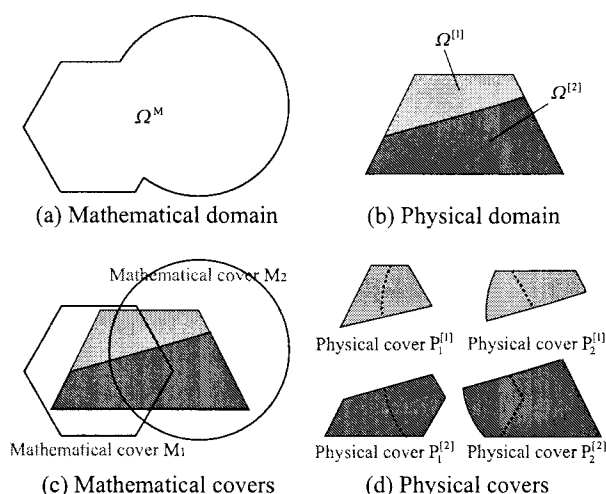


図-1 数学被覆と物理被覆

に設定される界面要素を定義する．次に，界面要素を用いた FCM の基礎となる Hybrid 型変分原理^{11),9)} について概説し，弱形式のつり合い方程式を与える．

2.1 FCM の概説

(1) 被覆と要素の定義

FEM では，解析対象を要素という部分領域に分割し，各々に対して節点値による補間近似を導入する．そして，要素ごとに得られた剛性方程式を，要素の結合情報から再び全体系への連立代数方程式に組み立てなおすという方法論をとる．これに対し，FCM では，解析対象と支配方程式の分割と再構築という点では FEM と同様であるが，「近似関数が定義される数学的部分領域 (数学領域)」と「支配方程式が満たされるべき物理的部分領域 (物理領域)」を分離して考えるという点で FEM とは大きく異なる．

数学領域 Ω^M とは近似基底関数の定義域であり，解析対象である物理領域全体を覆い尽くすように設定され，「数学被覆」と呼ばれる部分領域が重なり合うことによって形成されている (図-1(a)(c))．そして，物理領域全体は数学被覆と物理領域の共通領域である「物理被覆」と呼ばれる部分領域が重なり合うことで形成される．この物理被覆 $P_i^{[a]}$ は数学被覆 M_i と物理領域 $\Omega^{[a]}$ の共通領域として定義される (図-1(b)(d))．

一方，図-2に示されるような数学被覆により解析領域全体が覆われていることを想定すると，同図中の [I] は M_8, M_9, M_{13}, M_{14} の 4 つの数学被覆の共通領域となる．本研究ではこのような数学被覆同士の共通領域を「数学要素」と定義し，同様に，物理被覆同士の共通領域を「物理要素」と定義することとする．このとき，通常の FEM の節点に付加される解析自由度は，数学被覆ごとに定義されることになる．

以上のような定義に従って解析領域を要素分割すると，典型的な FCM のメッシュは図-3のようになる．一般に物理要素と数学要素が一致する場合は FEM と同一の要素になるが，物理境界付近においては，FCM では部分的に物理領域 (物理要素) を有する数学要素が生成

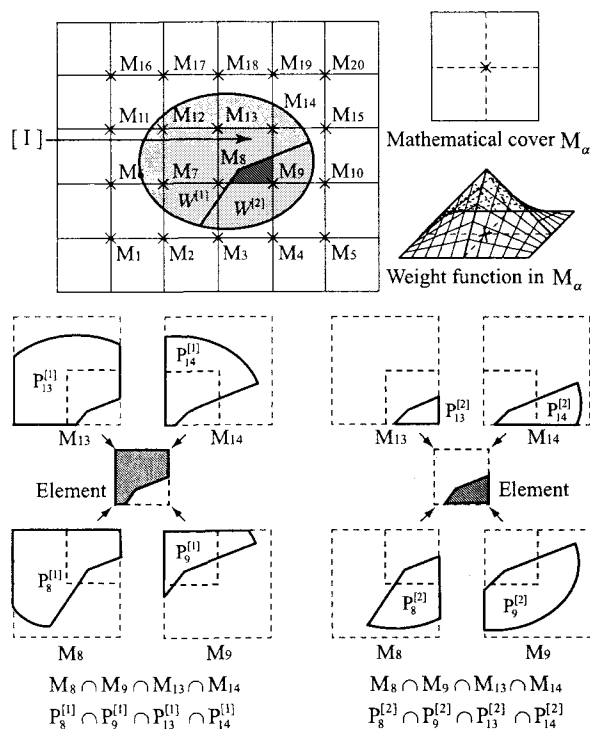


図-2 FCM における要素と重み関数例

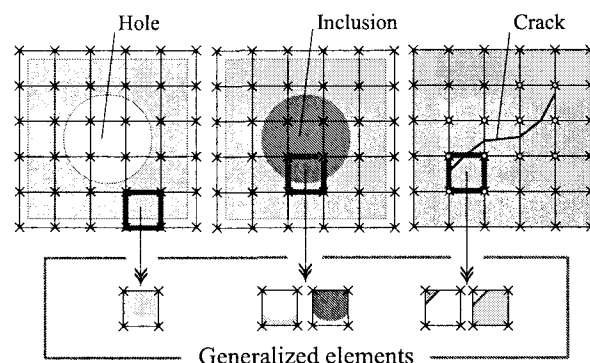


図-3 典型的な FCM のメッシュ形態と一般化要素

される．本研究では，このような物理境界付近の特殊な要素を「一般化要素」と呼ぶこととする．

(2) 関数の定義

FCM では，変位を規定するために次のような 2 つの関数を定義する．

$w_i(x, y)$: 重み関数

$u_i(x, y)$: 被覆関数

重み関数は，実際の物理形状とは無関係に数学領域内で定義され，数学被覆内では値を持つが，数学被覆外では零となるようなものである．すなわち，重み関数は数学被覆を M_i とすると以下のように表される．

$$w_i(x, y) \geq 0 \quad (x, y) \in M_i$$

$$w_i(x, y) = 0 \quad (x, y) \notin M_i$$

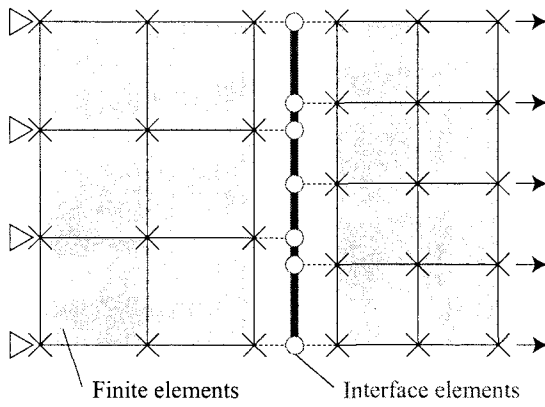


図-4 FEMにおける界面要素の適用例

また、この重み関数 w_i は、次式で表される Partition of Unity (PU) の条件を満足するように設定される。

$$\sum_{x,y \in M_i} w_i(x,y) = 1 \quad (1)$$

一方、被覆関数 u_i は物理量を規定する関数であり、数学被覆 M_i と物理領域 $\Omega^{[a]}$ との共通領域である物理被覆 $P_i^{[a]}$ ごとに定義され、以下のように表される。

$$\begin{aligned} u_i(x,y) &\neq 0 & (x,y) \in P_i^{[a]} \\ u_i(x,y) &= 0 & (x,y) \notin P_i^{[a]} \end{aligned}$$

そして、上記の重み関数 w_i と被覆関数 u_i を用いて、変位 $u(x,y)$ は以下のように近似される。

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{N_M} w_i(x,y) u_i(x,y) \quad (2)$$

ここで、 N_M は定義する数学被覆の総数を示す。

なお、FCM は FEM の一般化手法と捉えることができるので、FCM におけるひずみや応力の算出方法は FEM と同一である。

2.2 界面要素を用いた FCM

(1) FCM における界面要素

FEM においては、従来、以下のような分野で界面要素が用いられてきた。

- 不整合メッシュの連結問題¹²⁾
- 接触問題¹³⁾
- 領域分割に基づく並列計算¹⁴⁾

これらの共通点は、例えば図-4に示されるように、別々に生成された有限要素モデルが存在すること、そしてそれらを界面要素を用いることで、物理的に矛盾のない結果を導くことである。

一方 FCM では、例えば図-5に示されるような二相構造を考えた際、FEM のように節点が物理境界（異種材料界面）に存在するとは限らないため、材料別に被覆層¹⁵⁾という概念を定義し、個別の基底を用いて解析空間の離散化を行うことになる。すなわち、材料別に独立した離散化モデル作成し、それらを最終的には連成

させて解析することを意味している。これは、上述の FEM における界面要素の導入意義と同等であり、非均質な構造に対して界面要素を用いることで物理的に矛盾のない解析が行えるものと期待される。

図-5を参照し、界面要素を用いた FCM¹⁶⁾の適用性は以下のようにまとめられる。

- 物理境界に解析自由度が存在するとは限らない FCM に対して、界面要素を用いることにより変位の基本境界条件を満足させる。
- 異種材料界面に解析自由度が存在するとは限らない FCM に対して、界面要素を用いることにより変位の適合条件および応力の連続条件を満足させる。

なお、本研究では Lagrange 未定乗数法に基づく界面要素を採用する。

(2) 支配方程式と構成式

図-6に示されるような2つの異なる材料から成る構造体の静的つり合い問題を考える。この問題の支配方程式は次のように与えられる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{[1,2]} + \bar{\mathbf{b}}^{[1,2]} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{[1,2]} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{[1,2]} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u}^{[1,2]} + (\nabla \mathbf{u}^{[1,2]})^T \} \quad \text{in } \Omega^{[1,2]} \quad (4)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{u}$ はそれぞれ Cauchy 応力、微小ひずみ、変位ベクトルであり、 $\bar{\mathbf{b}}$ は物体力を示している。また、 $(\cdot)^{[1,2]}$ はそれぞれの領域内 ($\Omega^{[1]}$ あるいは $\Omega^{[2]}$) で定義される物理量であることを意味している。そして、次に示す変位境界での基本境界条件と異種材料界面における連続条件に対して界面要素を導入して満足させる必要がある。

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (5)$$

$$\mathbf{t} := \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (6)$$

$$\mathbf{u}^{[1]} = \mathbf{u}^{[2]} \quad \text{on } \Gamma^{[1-2]} \quad (7)$$

$$\mathbf{t}^{[1]} = -\mathbf{t}^{[2]} \quad \text{on } \Gamma^{[1-2]} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{t}$ は外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ で規定される面における単位面積当たりの表面力、 $\Gamma^{[1-2]}$ は図-6に示される各境界である。

また、本研究では $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ を関連付ける材料構成則には、線形の等方硬化則のみを仮定した J_2 塑性理論を適用し、次式で与えられる降伏関数を用いる。

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) := \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| - \left(H\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y \right) \quad (9)$$

ここで、 α は等方硬化に関する内部変数、 H は等方硬化係数、 σ_Y は初期降伏応力である。

(3) Hybrid 型変分原理と弱形式のつり合い方程式

図-6の系において、全ポテンシャルエネルギーは次式により与えられる。

$$\Pi_P = \int_{\Omega^{[1,2]}} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (10)$$

FCM では、数学被覆と物理被覆は独立に定義されるため、物理境界上に FEM における節点のような解析自由度が存在するとは限らない。従って、式 (5), (7) の幾何

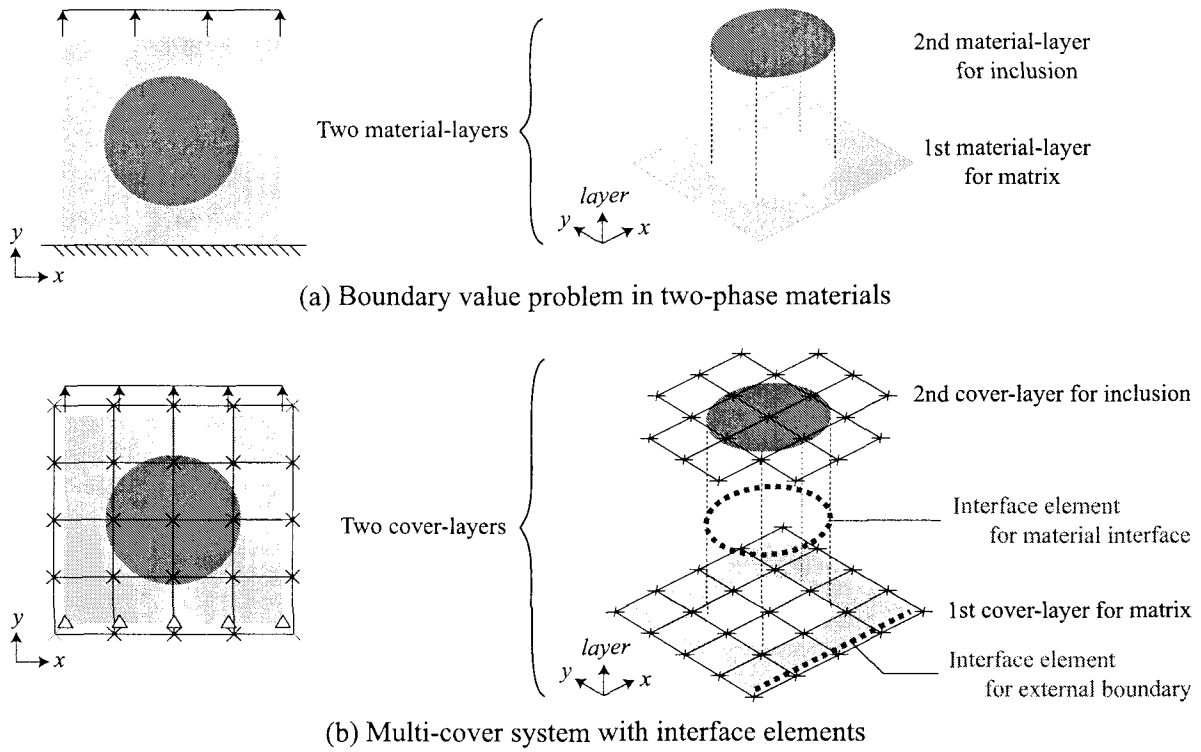


図-5 FCM における多相材料問題の定義と被覆層・界面要素の詳細

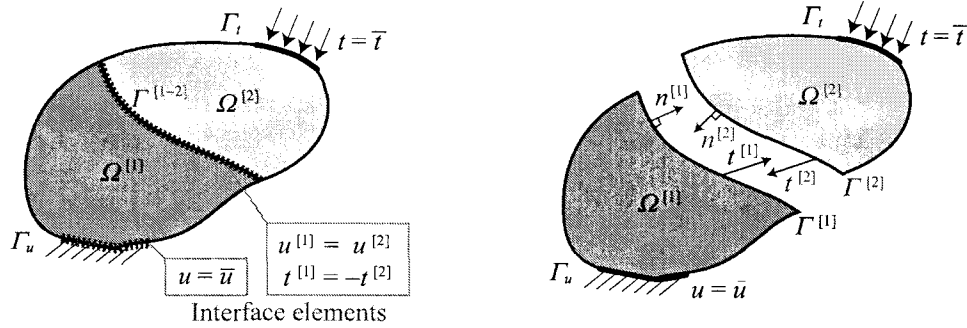


図-6 二相材料の物理問題と界面要素

学的境界条件を付帯拘束条件として加えなければならない。この付帯条件は、Lagrange 未定乗数 λ を導入することで取り除くことができ、エネルギー汎関数は次のように修正される。

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Hp}}(\mathbf{u}, \lambda) = & \Pi_{\text{p}} - \int_{\Gamma_u} \lambda \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma^{[1-2]}} \lambda \cdot (\mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[2]}) d\Gamma \quad (11) \end{aligned}$$

上式の停留条件により、次式に示す弱形式のついで

方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{[1,2]}} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma^{[1]}} \delta \mathbf{u}^{[1]} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma + \int_{\Gamma^{[2]}} \delta \mathbf{u}^{[2]} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma \\ & = \int_{\Omega^{[1,2]}} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (12) \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma^{[1-2]}} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[2]}) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (13)$$

ここで、 $\delta(\bullet)$ は変数 $(\bullet)$ の変分量である。上式の停留解において Lagrange 未定乗数 λ は、次式のように物理境界面 Γ_u , $\Gamma^{[1-2]}$ 上での表面力という物理的な意味を有していることが知られている。

$$\begin{aligned} \lambda &= \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_u \\ \lambda &= \mathbf{t}^{[1]} = -\mathbf{t}^{[2]} & \text{on } \Gamma^{[1-2]} \end{aligned}$$

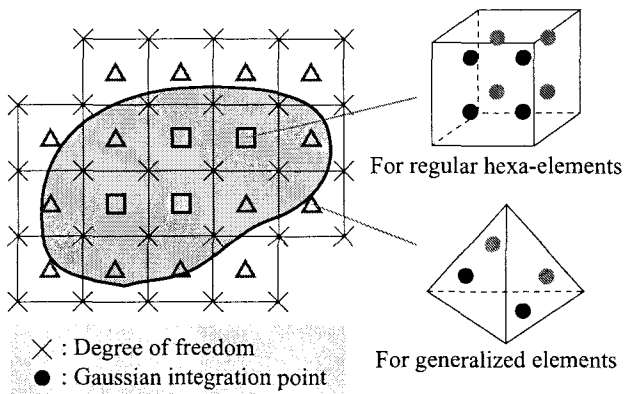


図-7 FCMにおけるガウス積分法の相違

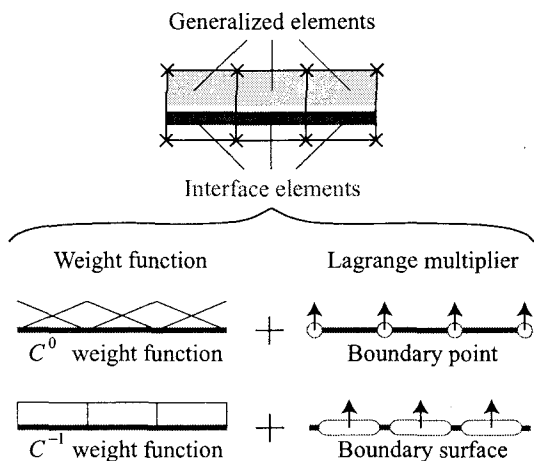


図-8 FCMにおける界面要素の概念図

本研究では、未知変数である u と λ の両方を独立変数とし、Augmented Lagrangian 法¹⁹⁾を用いて反復的に解くことで、界面要素 (物理境界) での適合条件を近似的に満足させる。

2.3 インプリメンテーション

(1) 数値積分法

一般に、FEMの数値積分法では1次の六面体要素に対して自然座標に基づく8点ガウス積分法を用いる。これに対し、図-7に示されるように、FCMでは支配方程式を満足させる物理領域 (物理要素)、すなわち積分領域は任意形状を成しているため、FEMのような8点ガウス積分法をすべての要素に対して適用することができない。そのため、本研究では同図に示されるように、数学要素と物理要素が一致する有限要素と等価な立方体要素に対してのみ通常のガウス積分法を適用し、物理境界近傍での一般化要素に対しては物理要素を四面体に分割し、体積座標を用いた四面体のガウス積分法を適用する。また、界面要素や分布荷重に対する面積分については、物理境界面を三角形に分割し面積座標を用いた三角形のガウス積分法を適用する。

弾塑性問題においては、ガウス積分点が応力評価点となることから、このガウス積分法の相違がもたらす

表-1 3種類の界面要素

	Weight	Lagrange multiplier
Type -0	C^0 continuity	Boundary point
Type -1	C^{-1} continuity	Boundary surface

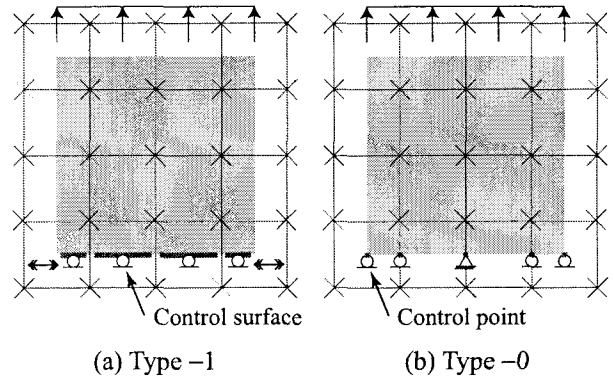


図-9 一軸状態を表現する境界条件の相違

近似精度への影響を知る必要がある。この点に関して著者らは、平面問題におけるガウス積分点の相違が全体の近似精度に与える影響は無視できるほど小さいことを確認している²⁰⁾。

(2) 基底関数

本研究では、変位を規定するための数学被覆に設定される重み関数にPU条件を満足し C^0 連続性を有する関数を使用する (C^0 -PU)。具体的には、FEMでいうところの3次元8節点六面体要素にあたるトライリニア型の形状関数を用いる。

一方、このような C^0 連続な変位場に対応する界面要素のLagrange未定乗数の基底次数や評価位置については明確な規定がない。そこで本研究では、まずLagrange未定乗数の基底関数に関して、図-8に示されるような変位と同様の C^0 および C^{-1} 連続な基底を設定する。次に、各々の基底関数に対応したLagrange未定乗数の評価位置を図-8に示されるような物理境界面ごとに定義される場合と物理境界面を構成する点ごとに定義される場合を設定する。そして、これらを組み合わせた表-1に示す2種類の界面要素を対象とし、最良の界面要素を決定することを検討する。以下に、これら2種類の界面要素の特徴を簡単にまとめておく。

- **Type -0** : Lagrange未定乗数は物理境界面を構成する点ごとに定義され、変位と同様に区分的な線形関数により近似される。
- **Type -1** : Lagrange未定乗数は物理境界面ごとに定義され、定数で近似される。

次に、変位境界での界面要素について考える。変位境界に対して、上記の2種類の界面要素の適用を考えた場合、以下の特徴を挙げることができる。

- **Type -1** では、FEMで一般に行われるような節点値による境界の処理が行えず、一軸状態の境界条件

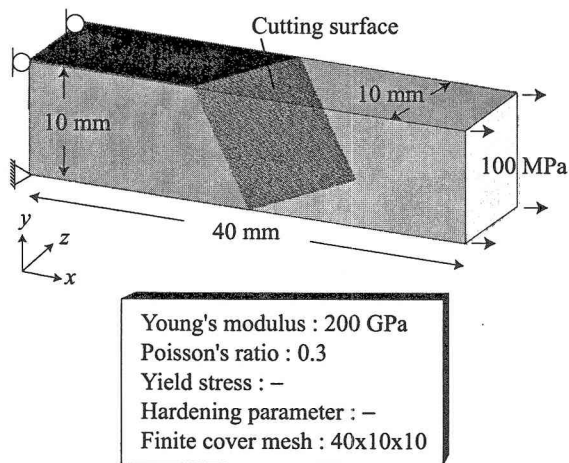


図-10 2領域に分割された3次元梁モデル

を表現しようとする並進を許容してしまい、一様ひずみ・応力状態を再現することが困難である(図-9(a)を参照)。

- Type-0 では、FEM で一般に行われるような境界上の点拘束が可能となる^{7,8)}(図-9(b)を参照)。
- 変位の基本境界では、材料界面のような場合とは異なり応力の連続性を陽に課す必要がなく、変位のみの拘束を考えればよい。

以上のような考察に基づき、本研究では変位境界の界面要素に対して Type-0 の適用を図る。

最後に、異種材料界面での基底関数の次数について考える。異種材料界面では、変位境界とは異なり、2つの材料の物理的な相互作用や連成を正確に捉えなければならない。すなわち、物理的に妥当な連続条件を表現可能な界面要素を選定する必要がある。次節においては、特に異種材料界面での界面要素の決定とその近似性能について数値的に検証する。

3. 界面要素の近似性能

本節では、簡単な例題を用いて、特に異種材料界面における一般化要素^{7,8)}に界面要素を導入し、その種類と近似性能に関する検討を行う。導入する界面要素は、前節の図-8と表-1で示した2種類とする。なお、1次の重み関数を定義する数学被覆にはすべて立方体から成る定型被覆を用いる。

3.1 検証A：一軸引張り問題

(1) 解析対象

図-10に示されるように、 x 方向に一樣な引張り荷重を受ける1種類の材料からなる梁状構造物を考える。この構造の中央付近に人為的な切断面を設けて、界面要素を導入する。ここでの目的は、前節で挙げた2種類の界面要素が単純な一軸応力状態をいかに表現しうるかを検討することにある。検討に際し、次のような2つの解析モデルを設定する。

- **Model A-0**: 基本境界に Type-0, 切断面に Type-0 の界面要素を設定する。

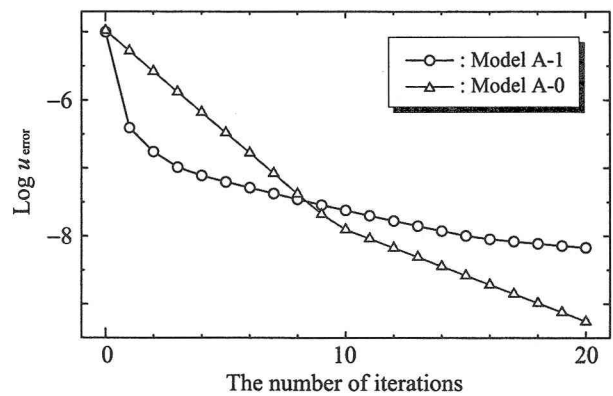
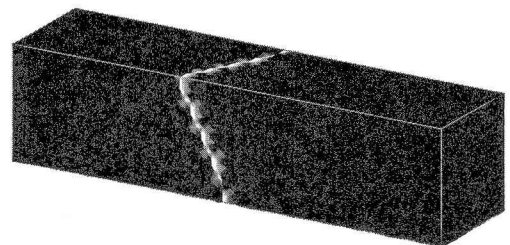
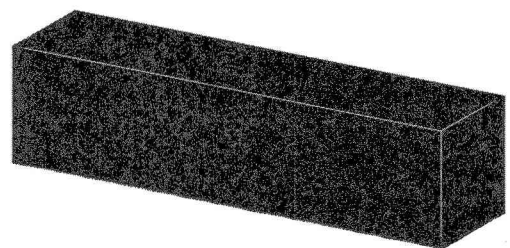


図-11 切断面における界面要素の収束特性



(a) Model A-0



(a) Model A-1

50 110

図-12 解析結果： x 方向応力分布 (MPa)

- **Model A-1**: 基本境界に Type-0, 切断面に Type-1 の界面要素を設定する。

以上のような解析条件下で、材料構成則には線形弾性体を仮定し、材料パラメータや定型の有限被覆メッシュ分割数は同図の通りとする。

(2) 解析結果と考察

はじめに、切断面における界面要素の収束特性を検討する。Augmented Lagrangian 法¹⁹⁾による収束計算時の反復回数と全界面要素における最大相対変位 u_{error} の関係を図-11に示す。この図に示されるように、Model A-0のほうがModel A-1よりも収束特性が良好であることがわかる。すなわち、界面要素別にはType-0のほうがType-1よりも収束特性が優れていることとなる。

次に、解析結果として x 方向応力分布を図-12に示す。この図に示されるように、Model A-0(図-12(a))では、切断面付近においてのみ応力伝達の滑らかさが極めて悪い。従って、Type-0の界面要素は収束性には優れ

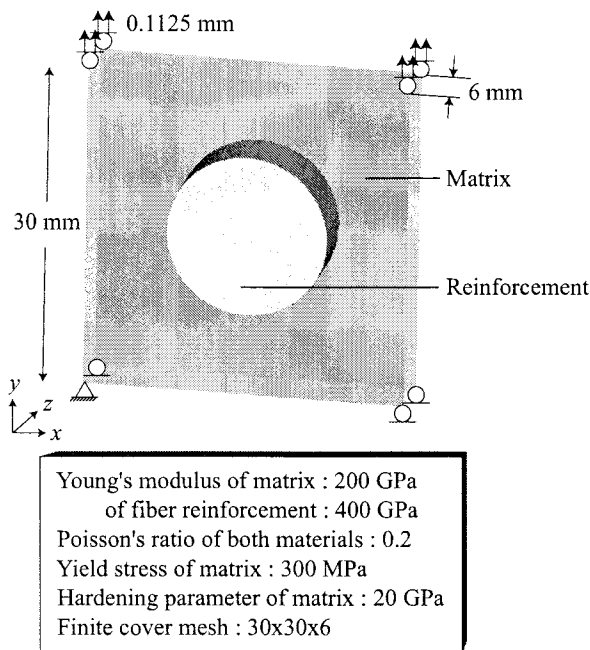


図-13 円柱形補強部材を有する二相材料問題

るものの、切断面での物理量の連続性を適切に表せないことから、材料界面での界面要素としては不適格であると結論づけられる。

これに対して、Model A-1(図-12(b))では、切断面付近での応力伝達が非常に滑らかであり、想定した一軸応力状態をほぼ正確に表現できている。従って、収束性が悪いものの、材料界面での界面要素としては適格であると考えられる。

また、両モデルに対して変位境界における Type -0 の界面要素は、適切に機能している。

3.2 検証 B：二相材料の境界値問題

(1) 解析対象

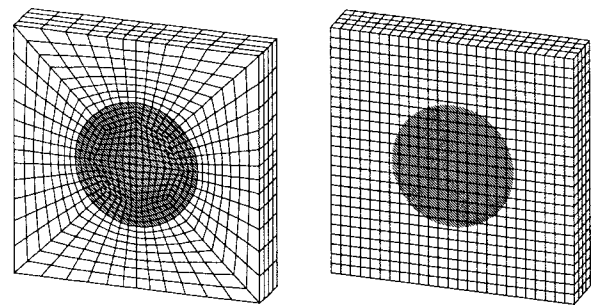
次に、図-13に示されるような二相材料の境界値問題を考える。この構造は、弾塑性体の矩形母材と線形弾性体の円柱形状補強部材で構成されている。前小節と同様に、2種類の界面要素を用いた2つの解析モデルを設定する。

- **Model B-0**: 基本境界に Type -0, 切断面に Type -0 の界面要素を設定する。
- **Model B-1**: 基本境界に Type -0, 切断面に Type -1 の界面要素を設定する。

同図に示される材料パラメータや定型の有限被覆メッシュを設定し、y 軸方向天端面に強制変位を与える。また、参照解として変位法に基づく1次の六面体要素による有限要素モデルを用いる。図-14に、FEM と FCM それぞれのメッシュ形態を示しておく。

(2) 解析結果と考察

解析結果として、Model B-0 と B-1 および有限要素モデルに対する von-Mises 応力分布と相当塑性ひずみ分布を図-15に示す。この図に示されるように、Model B-0 では異種材料界面付近の応力分布において人為的な振



(A) Finite element mesh 720x4 (B) Finite cover mesh 30x30x6

図-14 FEM と FCM の離散化モデル

動が現れており、それに伴い塑性ひずみ分布にも少なからず悪影響が及んでいる。すなわち、異種材料界面における Type -0 の界面要素は複合材料問題や接触問題において、重要な要因である界面での力学挙動を正確に評価できないことがわかる。

これに対して Model B-1 では、Model B-0 でみたような応力振動が現れることはなく、滑らかな応力分布がシミュレートされており、応力分布・塑性ひずみ分布ともに有限要素モデルと同様の結果が得られている。

また、前小節と同様、変位境界における Type -0 の界面要素は、境界条件を適切に表現している。

4. 数値解析例

前節で行った検討結果から、本研究で FCM における一般化要素^{7,8)}に導入する界面要素は、適切な基底関数の次数を選定することによって物理的に妥当な解析が行えることが確認された。本節では、より実際の例題を設定して界面要素を用いた FCM の有効性を例示する。なお、複雑な3次元構造に対する形状モデリングおよびメッシュ生成法には、文献²⁰⁾で紹介されている手法を適用する。また、前節の界面要素に関する検討結果から、変位境界の界面要素には Type -0 を、異種材料界面の界面要素には Type -1 を設定する。以下の数値解析例において、定型からなる有限被覆メッシュには全て標準的な1次の8節点六面体(立方体)要素を用い、構成材料の弾塑性挙動は線形の等方硬化則のみを仮定した J_2 塑性理論に従うものとする。

4.1 解析モデル

図-16に示されるように、母材内に補強部材を有する構造 (Model C-1) とボイド (Model C-2) や介在物 (Model C-3) がランダムかつ多数介在するような3次元微視構造を想定する。ちなみに、Model C-2, C-3 については立方体の解析領域内にボイドおよび介在球がそれぞれ52個内在している。このような微視構造を模擬した解析対象に対する解析条件には、同図中に示される材料パラメータや定型の有限被覆メッシュを設定し、強制変位による引張り力を与えて弾塑性解析を行う。なお、Model C-1, C-3 については母材を弾塑性体、補強部材・介在物を線形弾性体と仮定する。

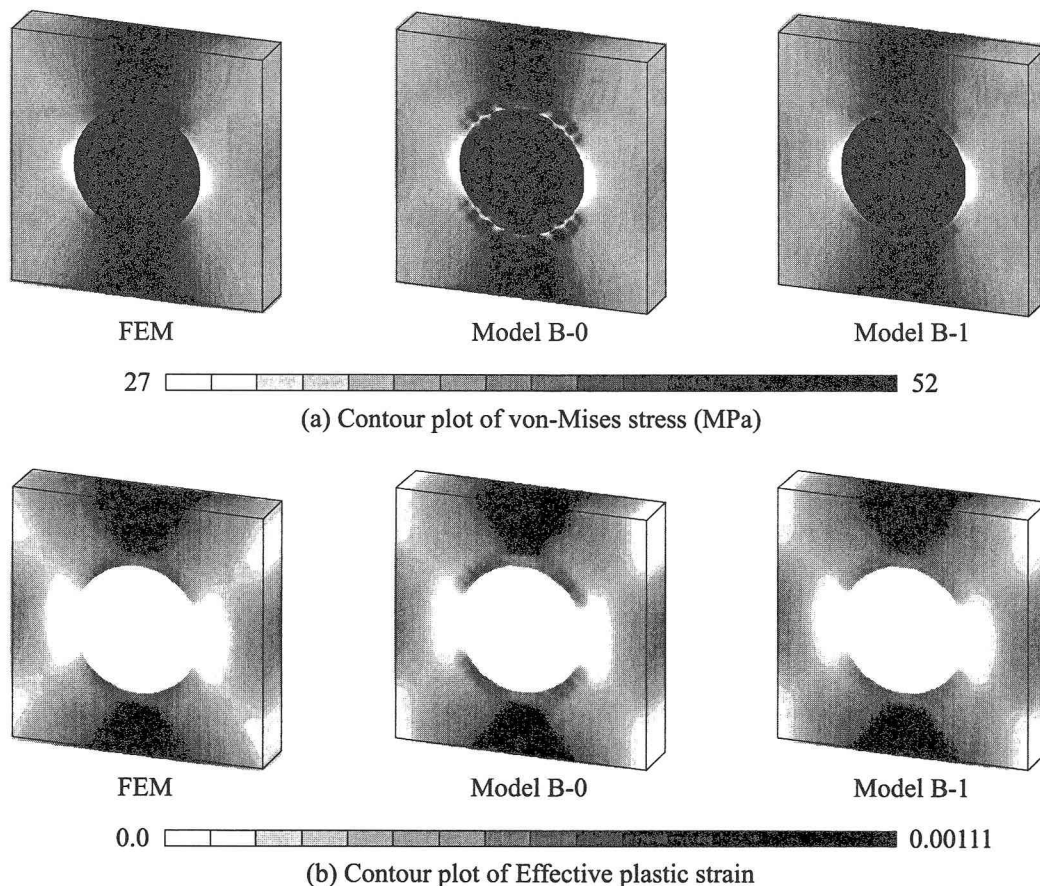


図-15 解析結果：(a) von-Mises 応力分布 (MPa), (b) 相当塑性ひずみ分布

4.2 解析結果

これらのモデルに対する解析結果として、相当塑性ひずみ分布の進展過程をそれぞれ図-17に示す。これらの解析結果は解析領域内の断面が見やすくなるように立方体領域を一つの頂点から中心に向けてくり貫いた状態で表されている。

まず、Model C-1 では、定型メッシュと界面要素の効果を融合させることで、補強部材どうしが交わる領域付近において、幾何学および力学的な特性を十分に捉えた解析結果が得られている。次に、ボイドモデル C-2 では、各ボイドから斜め方向に応力が集中し塑性変形が卓越しており、また介在物モデル C-3 では、荷重載荷方向に介在物同士をつなぐ領域で応力が集中することにより塑性変形が卓越するといった、ボイドおよび介在物それぞれがもたらす弾塑性応答を十分にシミュレートできており、力学的な洞察と合致した結果が得られている。特に、介在球モデル C-3 に限って言えば、異種材料界面での各物理的連続性を明確に表現できない一般化要素の不具合を界面要素が補っており、その恩恵を享受した結果が得られている。

本節での数値解析結果を総括して、本研究で構築した3次元FCMは、定型立方体メッシュと界面要素を用いることで、材料内部の微視領域の構造解析において十分な精度を発揮し、メッシュの存在を意識することなく弾塑性応答を容易に解析可能である。

5. おわりに

本研究では、FCMに界面要素を導入することで、物理境界とメッシュが整合しない一般化要素^{7,8)}に対して、境界条件・連続条件の処理が可能な枠組みを構築した。また、 C^0 連続な変位場を仮定した際のFCMにおける界面要素の導入にあたり、特に力学的に重要な異種材料界面における界面要素に定義される基底関数の次数やその近似性能について数値的に検討を行った。そして最後に、複雑な幾何学的特性を有する3次元微視構造を対象に、界面要素を用いたFCMの有効性を例示した。以下に、本研究の成果と数値解析結果から得られた知見を簡単にまとめる。

- 変位の基本境界条件を満足させる界面要素に C^0 連続な基底関数 (Type-0) を適用することで、FEMと同じような境界変位の制御が可能となる。
- 異種材料界面での適合条件を満足させる界面要素に C^0 連続な基底関数 (Type-0) を適用すると、人工的な応力振動が発現してしまい、FEMとの一致も当然得られず、一軸状態すら正確に表現できない。
- 異種材料界面での適合条件を満足させる界面要素に C^{-1} 連続な基底関数 (Type-1) を適用すると、滑らかな物理量の伝達が行われ、一軸状態も再現することができ、標準的なFEMとの結果とも定性的にも定量的にもほぼ一致する。

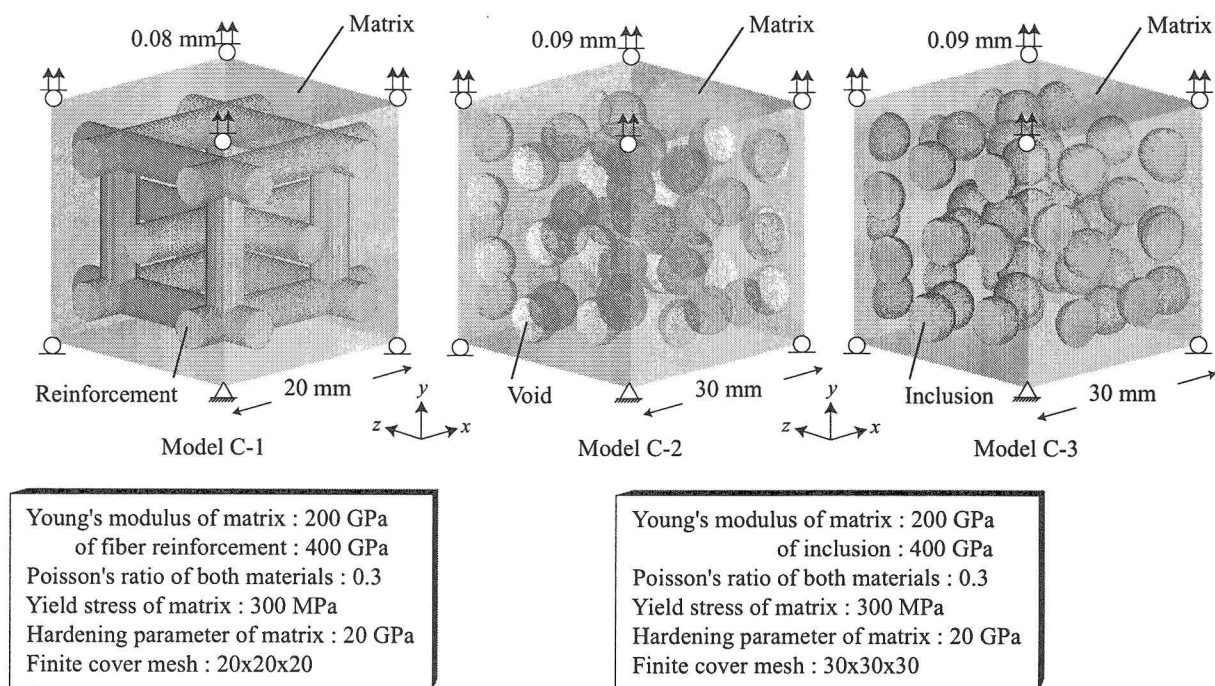


図-16 微視構造を模擬した複雑な幾何形状を有する3種類の3次元解析対象 (Model C-1, C-2, C-3)

- 界面要素を用いた FCM は、適切な FCM のモデリング (メッシュ生成) 技術を併用することで、非均質体微視構造を対象とした 3 次元弾塑性解析に有効な解析手法となる。

本研究で開発した 3 次元 FCM は、その特徴である一般化要素のメリットを利用し、境界条件の付加などによる一般化要素のデメリットを界面要素で補うことで完成したことを強調しておく。

最後に、今後の課題や展望を述べておく。

- 本論文では、主に材料界面での界面要素を中心に検討を行ったが、変位境界での界面要素の検討を、境界が異形状の場合も含めて詳細に行う必要がある。
- 異種材料界面での非線形性を評価可能な理論を導入する。
- 強不連続面の発生による破壊挙動の追跡が可能な枠組みを構築する。

謝辞

本研究では、解析モデルの生成・可視化を行うに当たり、(株) くいんと (代表取締役社長：石井恵三氏) の協力を得て、VOXELCON ソフトウェアを活用させていただきました。ここに記して感謝いたします。

参考文献

- 1) Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. : Element free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 2) Babuška, I., Melenk, J.M. : The partition of unity method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.40, pp.727-758, 1997.
- 3) 大坪英臣, 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 中西克嘉: 被覆単位

で精度をコントロールするマニフォールド法 (FCM), 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.399-402, 1997.

- 4) Terada, K., Asai, M., Yamagishi, M. : Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.58, pp.1321-1346, 2003.
- 5) Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., Usui, S. : Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.56, pp.609-635, 2003.
- 6) Strouboulis, T., Copps, K., Babuška, I. : The generalized finite element method, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engng.*, Vol.190, pp.4081-4193, 2001.
- 7) Terada, K., Kurumatani, M. : Finite Cover Approximation within the Framework of FEM : *Proceedings of Computational Engineering Conference*, Vol.8, pp.47-48, 2003.
- 8) 車谷麻緒, 寺田賢二郎: 有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究: 日本計算工学会論文集, 論文番号 20030027, 2003.
- 9) 浅井光輝, 寺田賢二郎, 池田清宏, 山岸道弘: Hybrid-FCM の開発とその多相材料の界面破壊解析への適用, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.4, pp.85-94, 2001.
- 10) Shi, G.H. : Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing*, Report, No.92-1, U.S. Army Research Office, 1991.
- 11) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティ法を用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- 12) Park, K.C., Felippa, C.A., Rebel, G. : A simple algorithm for localized construction of non-matching structural inter-

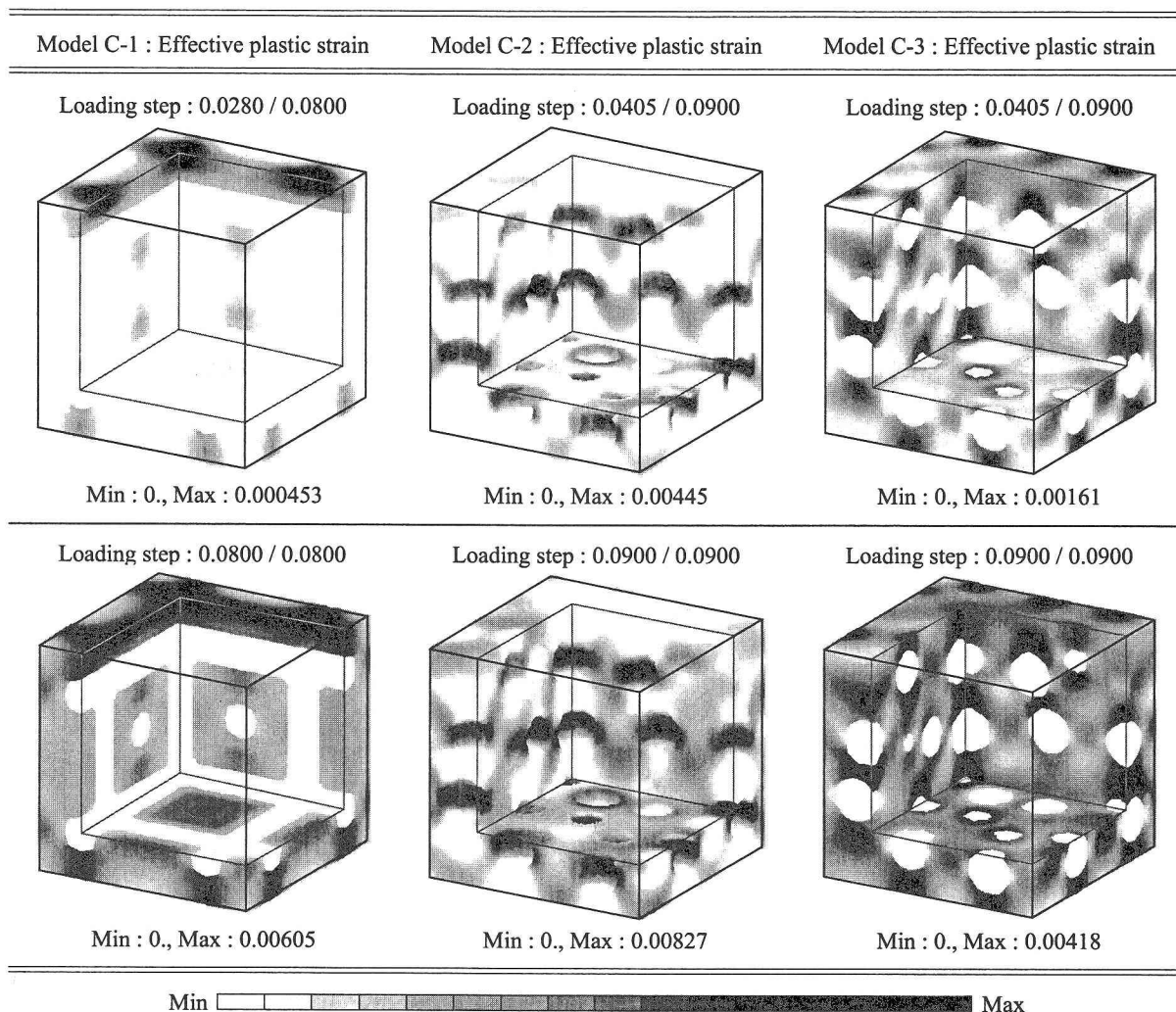


図-17 Model C-1, C-2, C-3 の弾塑性解析結果：相当塑性ひずみ分布の進展過程

- faces, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.53, pp.2117–2142, 2002.
- 13) McDevitt, T.W., Laursen, T.A. : A mortar-finite element formulation for frictional contact problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.48, pp.1525–1547, 2000.
 - 14) Farhat, C. : A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.32, pp.1205–1227, 1991.
 - 15) 山岸道弘, 浅井光輝, 寺田賢二郎 : 多重被覆を用いたイメージベース有限被覆法, 計算工学会講演論文集, Vol.7, pp.541–544, 2002.
 - 16) 車谷麻緒, 浅井光輝, 寺田賢二郎 : 界面要素を用いた有限被覆法とその弾塑性問題への適用, 計算工学講演会論文集, Vol.8, pp.101–104, 2003.
 - 17) Simo, J.C., Wriggers, P., Taylor, R.L. : A perturbed La-

- grangian formulation for the finite element solution of contact problems, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.50, pp.163–180, 1985.
- 18) Park, K.C., Felippa, C.A. : A variational principle for the formulation of partitioned structural systems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.47, pp.395–418, 2000.
 - 19) Simo, J.C., Laursen, T.A. : An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Comput. Struct.*, Vol.42, pp.97–116, 1992.
 - 20) 車谷麻緒, 浅井光輝, 寺田賢二郎 : 有限被覆法の弾塑性問題への適用とその性能評価, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.247–256, 2003.
 - 21) 石井恵三, 中里力 : イメージベースモデリング／解析システムの開発, 計算工学講演会論文集, Vol.3, pp.385–386, 1998.

(2004 年 4 月 16 日受付)