

回転自由度を有する関口・菊池要素と Cook 要素の比較

Comparison of Sekiguchi-Kikuchi's element with vertex rotations and a Cook's element

松原仁*・伊良波繁雄**・富山潤***・山城建樹*・入部綱清*

Hitoshi MATSUBARA, Shigeo IRAHA, Jun TOMIYAMA,
Tateki YAMASHIRO and Tsunakiyo IRIBE

*学生会員 修士(工学) 琉球大学大学院 理工学研究科 (〒 903-0129 沖縄県中頭郡西原町字千原 1 番地)

**正会員 博士(工学) 琉球大学教授 工学部環境建設工学科 (〒 903-0129 沖縄県中頭郡西原町字千原 1 番地)

***正会員 博士(工学) 琉球大学助手 工学部環境建設工学科 (〒 903-0129 沖縄県中頭郡西原町字千原 1 番地)

In two-dimensional problems, the utility of the membrane element with vertex rotations has been discussed and proved by a lot of researchers. Sekiguchi, Kikuchi and Cook developed the element with vertex rotations by different approaches. However, in this paper, the displacement field of those two elements is proven to be the same as mathematical meaning. Moreover, this proof is confirmed by the numerical examples. The problem of Cook's element which required long time to construction of element stiffness matrix is solved by this interesting fact.

Key Words : *Finite element with vertex rotations, Cook's element, Sekiguchi and Kikuchi's element, Displacement field*

1. はじめに

近年の計算機性能の発展に伴い、有限要素法、差分法、境界要素法やメッシュレス法の数値計算技術が、固体力学、流体力学、熱伝導問題、破壊力学などのさまざまな工学分野の諸問題に適用されている^{1),2),3)}。これらの数値計算技術は、実構造物の設計に必要な応力、変位等の物理量を実験で求める際に生じるコスト的な問題や、労力、技術的な面の問題点を解消できるツールとして期待されている。

これらの数値解析手法のうち、有限要素法で使用される要素に関しては数多く研究されており、高精度な解を得るための要素も数多く提案されている^{1),4),5),6),7)}。一般に変位仮定による有限要素法で高精度な解を得るためには、要素の頂点以外に、各辺の間に節点をいくつか設けて要素の変位場を高次に仮定することが行なわれる^{1),2)}。一方で、要素の頂点の自由度に並進方向変位だけでなく、回転自由度を加えることによって、解析精度を向上させる方法も提案されている^{5),6),7)}。要素節点に回転角を加える手法の一つに、中間節点を有する二次要素の辺中央節点変位をその節点を挟む頂点の並進方向変位と回転角を用いて変換・消去し、要素の頂点のみに並進方向変位と回転角を有する平面三角形要素を導く手法がある⁶⁾。筆者らは 6 節点アイソパラメトリック三角形要素を利用して、三角形頂点のみに

並進方向変位と回転角を有する平面三角形要素を導いた⁸⁾。そして、その要素を矢川らによって提案されたフリーメッシュ法³⁾に適用し、二次元応力解析⁸⁾やフレッシュコンクリートの流動解析⁹⁾で良好な結果を得ている。一方、回転自由度を有する要素を導く方法としては、先に述べた二次要素の辺中央節点変位を利用した方法とは別に、関口、菊池が提案した回転角を含む変位場を用いる方法もある⁷⁾。関口、菊池は、回転自由度を四辺形要素の節点変位の自由度に加えることによって、その解析精度は飛躍的に向上し、特に面内の曲げ挙動に対して極めて有効な結果をもたらすことを報告している⁷⁾。この手法は一般に使用されている 1 次要素の形状関数を用いて要素頂点の回転角を定義するため、容易に定式化が可能である。また、Hughes, Brezzi は回転自由度の数学的・物理的な意味について考察しており、修正された変分原理を用い独立に回転場を導入する手法を紹介している¹⁰⁾。

本論文では、関口、菊池の回転角を有する変位場を用いる方法と辺中央節点変位を頂点の変位で変換・消去する方法の両方法で導いた回転自由度を有する要素の回転角の導入仮定が全く異なるにもかかわらず、その変位場は三角形平面要素では等価であり、四辺形要素では長方形のとき一致するという興味深い事実を証明する。数値解析例として、これらの要素の変位と応力についての精度的な問題と特長を検討した。

† Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

2. 回転自由度を有する平面三角形要素

本章では、Cook が用いた手法⁶⁾によって定義される回転自由度を有する三角形要素と、関口、菊池⁷⁾が提案する回転自由度を有する変位場を用いた三角形要素を定式化する。

2.1 中間節点変位を頂点変位で変換・消去した平面三角形要素

ここでは Cook⁶⁾が用いた手法に習い、図-1 に示す二次の三角形要素 (T6:6-nodes Triangular element) を利用して、T6 の中間節点変位を頂点変位で変換・消去した回転自由度を有する要素 (TDc:3-nodes Triangle element with Drilling dofs) を導く。T6 の変位場 (u^{T6}, v^{T6}) は、形状関数 ($N_i^{T6} : i = 1, 2, \dots, 6$) を用いて、

$$\begin{cases} u^{T6} = \sum_{i=1}^6 u_i N_i^{T6} \\ v^{T6} = \sum_{i=1}^6 v_i N_i^{T6} \end{cases} \quad (1)$$

と表すことができる¹⁾。ここに、 u_i, v_i は節点変位を表し、 N_i^{T6} は面積座標 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ を用いて¹⁾、

$$\begin{cases} N_1^{T6} = \zeta_1(2\zeta_1 - 1) \\ N_2^{T6} = \zeta_2(2\zeta_2 - 1) \\ N_3^{T6} = \zeta_3(2\zeta_3 - 1) \\ N_4^{T6} = 4\zeta_1\zeta_2 \\ N_5^{T6} = 4\zeta_2\zeta_3 \\ N_6^{T6} = 4\zeta_3\zeta_1 \end{cases} \quad (2)$$

と表せる。また、T6 の要素剛性マトリックス ($[k^{T6}]$) は面積座標を用いて、以下のように表せる¹⁾。

$$[k^{T6}] = t \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} [B^{T6}]^T [D] [B^{T6}] \det[J] d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (3)$$

ここに、 t は要素の厚さ、 $[B^{T6}]$ は T6 の変位 - ひずみマトリックス、上添え字 T は転置を表し、 $[D]$ は応力 - ひずみマトリックス、 $[J]$ はヤコビアンマトリックスである。ここで、T6 の中間節点変位を頂点の並進方向変位と回転角で近似する。頂点 i の x および y 軸の並進方向変位をそれぞれ u_i, v_i 、頂点 j の x および y 軸の並進方向変位をそれぞれ u_j, v_j とすると、図-2 に示す ij 辺の中央にある節点 m の x および y 軸の並進方向変位 (u_m, v_m) は微小変位を仮定するとそれぞれ次式のようになる。

$$\begin{cases} u_m = \frac{u_i + u_j}{2} + v'_m \cos \theta \\ v_m = \frac{v_i + v_j}{2} + v'_m \sin \theta \end{cases} \quad (4)$$

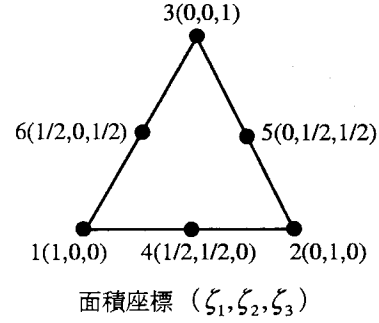


図-1 中間節点を有する二次の三角形要素

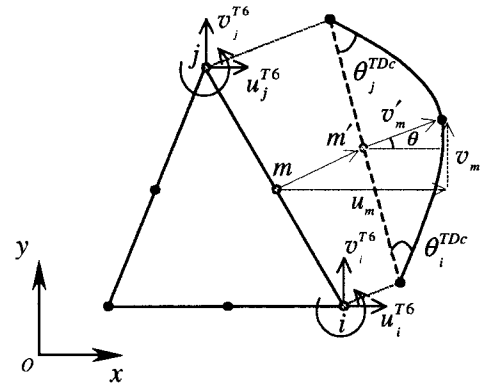


図-2 三角形要素の中間節点の変換・消去

式 (4) の右辺第 1 項は i, j 頂点の並進方向変位の平均値、 ij 辺の長さを l とすると、 $\cos \theta = (y_j - y_i)/l$, $\sin \theta = -(x_j - x_i)/l$ である。また、 v'_m は図-2 に示すような i, j 点の回転に伴う節点 m の変位である。 v'_m は次のように求めることができる。節点 i を原点として ij 方向を x^* とすると、 ij 辺上の変位は 3 次式で近似すると、

$$v' = -(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \theta_i^{TDc} - (-\xi^2 + \xi^3) \theta_j^{TDc} \quad (5)$$

となる。ここで、 $\xi = l/x^*$ 、 $\theta_i^{TDc}, \theta_j^{TDc}$ はそれぞれ i, j 節点の回転角である。よって、節点 m 点は ij 辺の中央にあるので、 $\xi = 1/2$ を代入すると、

$$v'_m = \frac{l}{8} (\theta_j^{TDc} - \theta_i^{TDc}) \quad (6)$$

となる。よって、 ij 辺上の中間節点 m の x および y 軸の並進方向変位 (u_m, v_m) はそれぞれ、

$$\begin{cases} u_m = \frac{u_i + u_j}{2} + \frac{y_j - y_i}{8} (\theta_j^{TDc} - \theta_i^{TDc}) \\ v_m = \frac{v_i + v_j}{2} - \frac{x_j - x_i}{8} (\theta_j^{TDc} - \theta_i^{TDc}) \end{cases} \quad (7)$$

と近似することができる。式 (7) を三角形要素の全ての辺に適用すると二次の三角形要素 (T6) の節点変位は

次式のようにになる。

$$\{u^{T6}\} = [T^{TDc}]\{u^{TDc}\} \quad (8)$$

ここに、 $\{u^{TDc}\}$ は T6 の中間節点変位を頂点の並進方向変位と回転角で変換・消去することによって得られた回転自由度を有する三角形要素 (TDc) の回転自由度を含む変位である。また $[T^{TDc}]$ は、

$$[T^{TDc}] = \begin{bmatrix} [e_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [e_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [e_1] & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{12}] & [e_{1/2}] & [t_{21}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{23}] & [e_{1/2}] & [t_{32}] \\ [e_{1/2}] & [t_{13}] & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{31}] \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[e_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [e_{1/2}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} (y_i - y_j)/8 \\ (x_j - x_i)/8 \end{bmatrix}$$

である。式 (9) で、 i, j は局所節点番号で 1 から 3 の値をとる。よって、TDc の要素剛性マトリックスは式 (3) を用いて以下の式で表すことができる。

$$[k^{TDc}] = [T^{TDc}]^T [k^{T6}] [T^{TDc}] \quad (10)$$

2.2 回転角を有する変位場から導かれた平面三角形要素

関口、菊池は、四辺形要素の変位場に回転角を導入し回転自由度を有する四辺形要素 (QDs: Sekiguchi's 4-nodes Quadrilateral element with Drilling dofs.) を導いた⁵⁾。ここでは、関口、菊池の仮定に基づく回転自由度を有する三角形要素 (TDs: Sekiguchi's Triangular element with Drilling dofs.) を導く。関口、菊池が仮定した変位場 (u^{TDs}, v^{TDs}) を三角形要素で示すと x および y 方向についてそれぞれ次式のようにになる。

$$\begin{cases} u^{TDs} = \sum_{i=1}^3 (u_i - (y - y_i)\theta_i^{TDs}) N_i^{T3} \\ v^{TDs} = \sum_{i=1}^3 (v_i + (x - x_i)\theta_i^{TDs}) N_i^{T3} \end{cases} \quad (11)$$

ここに、 u_i, v_i はそれぞれ三角形頂点の x および y 軸の並進方向変位、 x, y は要素内の任意点座標、 x_i, y_i は三角形要素の頂点座標、 θ_i^{TDs} は i 頂点の回転角、 N_i^{T3} は一般に使用されている定ひずみ三角形要素 (T3: 3-nodes Triangular element) の形状関数 ($[N_i^{T3}]$) である¹⁾。よって、式 (11) を微分するとこの要素のひずみ - 変位マトリックス ($[B^{TDs}]$) を得ることができ、次式のように表すことができる。

$$[B^{TDs}] = [B_1^s \ B_2^s \ B_3^s]$$

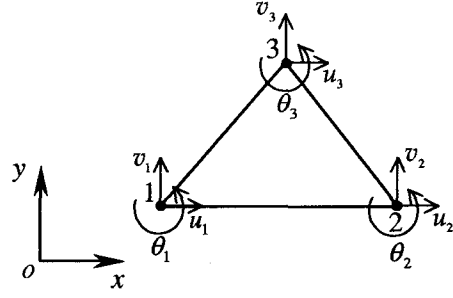


図-3 回転角を有する変位場から導かれた三角形要素

$$B_i^s = \begin{bmatrix} dX_i & 0 & -\hat{y}dX_i \\ 0 & dY_i & \hat{x}dY_i \\ dY_i & dX_i & \hat{x}dX_i - \hat{y}dY_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに、 dX_i, dY_i はそれぞれ $\partial N_i^{T3}/\partial x, \partial N_i^{T3}/\partial y$ であり、 $\hat{x}, \hat{y}$ はそれぞれ $x - x_i, y - y_i$ である。よって、式 (12) を用いると式 (3) と同様に TDs の要素剛性マトリックス (k^{TDs}) は次式のように簡単に求めることができる。

$$[k^{TDs}] = t \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} [B^{TDs}]^T [D] [B^{TDs}] \det[J] d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (13)$$

式 (13) より、要素 TDs の剛性マトリックスは一般に用いられる要素剛性マトリックスの導き方となんら変わらなく導くことができるのが特長である。図-3 に関口、菊池の仮定に基づいた三角形要素 TDs を示す。

3. 回転自由度を有する平面四辺形要素

本章では、2 章で示した回転自由度を有する二種類の三角形要素に習い、回転自由度を有する二種類の四辺形要素を定式化する。

3.1 中間節点変位を頂点変位で変換・消去した平面四辺形要素

ここでは、2.1 節同様に中間節点変位を変換・消去した平面四辺形要素 (QDc: Quadrilateral element with Drilling dofs.) を定式化する。QDc では、図-4 に示す中間節点を有する二次の四辺形要素 (Q8: 8-node Quadritetral element) を利用する。Q8 の変位場 (u^{Q8}, v^{Q8}) は

x および y 方向について次式で表わすことができる。

$$\begin{cases} u^{Q8} = \sum_{i=1}^8 u_i N_i^{Q8} \\ v^{Q8} = \sum_{i=1}^8 v_i N_i^{Q8} \end{cases} \quad (14)$$

ここで、 u_i, v_i はそれぞれ四辺形要素頂点の x および y 軸の並進方向変位、 N_i^{Q8} は要素 Q8 の形状関数であり自然座標 (ξ, η) を用いて次式のように表すことができる¹⁾。

$$\begin{cases} N_1^{Q8} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \\ N_2^{Q8} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \\ N_3^{Q8} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \\ N_4^{Q8} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \\ N_5^{Q8} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_6^{Q8} = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_7^{Q8} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_8^{Q8} = \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta^2) \end{cases} \quad (15)$$

よって、要素 Q8 の要素剛性マトリックス $[k^{Q8}]$ を利用して式 (10) 同様に QDc の要素剛性マトリックス $[k^{QDc}]$ を示すと、

$$[k^{QDc}] = [T^{QDc}][k^{Q8}][T^{QDc}] \quad (16)$$

となる。ここで、 $[T^{QDc}]$ は図-5 に示すように、Q8 の中間節点を変換・消去するための変換マトリックスであり、式 (9) に示した $[e_1], [e_{1/2}], [t_{ij}]$ を用いて次式のように表すことができる。

$$[T^{QDc}] = \begin{bmatrix} [e_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [e_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{12}] & [e_{1/2}] & [t_{21}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{23}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{14}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [e_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{32}] & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{34}] & [e_{1/2}] & [t_{43}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{41}] \end{bmatrix} \quad (17)$$

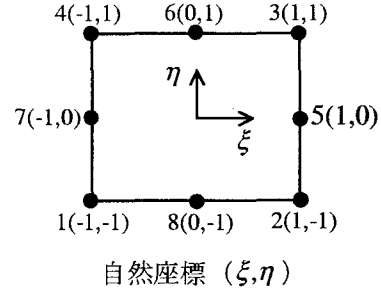


図-4 中間節点を有する四辺形要素

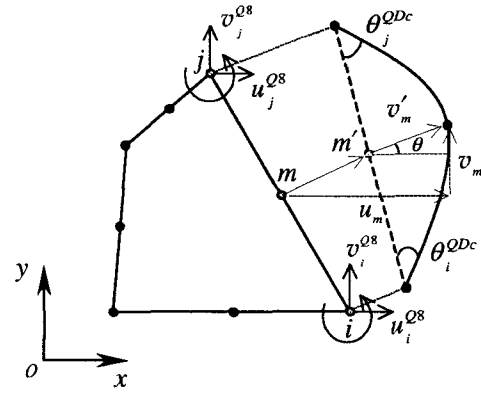


図-5 四辺形要素の中間節点の変換・消去

3.2 回転角を有する変位場から導かれた平面四辺形要素

1 次平面四辺形要素の変位場に回転角を導入した回転自由度を有する四辺形要素 (QDs) は、文献 (7) で関口、菊池により定式化がなされているが、ここでは簡単に示す。

図-6 に示す要素 QDs の変位場 (u^{QDs}, v^{QDs}) は、式 (11) と同様に x および y 方向の変位場について次式で表すことができる。

$$\begin{cases} u^{QDs} = \sum_{i=1}^4 \{ u_i - (y - y_i) \theta_i^{QDs} \} N_i^{Q4} \\ v^{QDs} = \sum_{i=1}^4 \{ v_i + (x - x_i) \theta_i^{QDs} \} N_i^{Q4} \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 u_i, v_i はそれぞれ四辺形要素の i 節点の x および y 軸の並進方向変位、 θ_i^{QDs} は i 節点の回転角、 x, y は要素内部の任意節点座標、 x_i, y_i は四辺形要素の頂点座標、 N_i^{Q4} は一般に使用されている 4 節点四辺形要素 (Q4) の形状関数であり、自然座標系 ξ, η を用いて次式

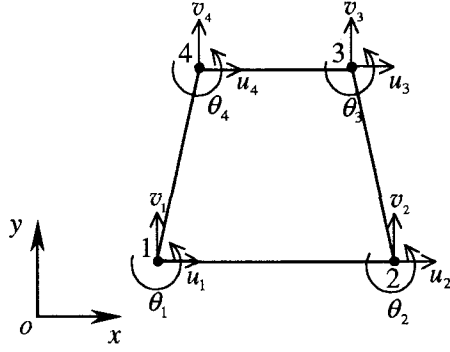


図-6 回転角を変位場を含む四辺形要素

で表される¹⁾。

$$\begin{cases} N_1^{Q4} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2^{Q4} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3^{Q4} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4^{Q4} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases} \quad (19)$$

三角形要素の変位場の式 (11) と四辺形要素の変位場の式 (18) を比較すると、要素の節点数と形状関数のみが違っているだけでその他の項は全て等しい。よって、要素 QDs のひずみ-変位マトリックス $[B_i^{QDs}]$ は式 (12) で示した B_i^s を参考にすると、

$$[B^{QDs}] = [B_1^s \quad B_2^s \quad B_3^s \quad B_4^s] \quad (20)$$

と表すことができる。よって、QDs の要素剛性マトリックス $[k^{QDs}]$ は自然座標を用いて、

$$[k^{QDs}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^{QDs}]^T [D] [B^{QDs}] \det[J] d\xi d\eta \quad (21)$$

で表せる。

4. 二種類の回転自由度を有する平面要素の同一性

本章では、第2章と第3章で定式化した二次要素の中間節点を頂点の並進方向変位と回転角で変換・消去した要素と、回転角を有する変位場から導かれた回転自由度を有する要素の変位場の関係を明らかにする。

4.1 平面三角形要素

平面三角形要素 TDc は二次要素の中間節点を変換・消去して得られる要素であるが、ここでは直接 TDc の

変位場 (u^{TDc}, v^{TDc}) を求め、関口、菊池の回転角を有する変位場式 (11) と比較する。

TDc では要素 T6 の中間節点変位を式 (7) で近似する。よって、式 (1) の中間節点に関する x および y 方向の変位 (式 (1) の i が 4~6 : 図-1 に局所節点番号を示してある) は式 (7) を用いてそれぞれ次式のように表すことができる。

$$\begin{cases} u_4 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{y_2 - y_1}{8}(\theta_1^{TDc} - \theta_2^{TDc}) \\ u_5 = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) - \frac{y_3 - y_2}{8}(\theta_2^{TDc} - \theta_3^{TDc}) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_3 + u_1) - \frac{y_1 - y_3}{8}(\theta_3^{TDc} - \theta_1^{TDc}) \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} v_4 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{x_2 - x_1}{8}(\theta_1^{TDc} - \theta_2^{TDc}) \\ v_5 = \frac{1}{2}(v_2 + v_3) + \frac{x_3 - x_2}{8}(\theta_2^{TDc} - \theta_3^{TDc}) \\ v_6 = \frac{1}{2}(v_3 + v_1) + \frac{x_1 - x_3}{8}(\theta_3^{TDc} - \theta_1^{TDc}) \end{cases} \quad (23)$$

よって、式 (1) に式 (22) および式 (23) を代入することにより、TDc の変位場を求めることができる。ここで、面積座標と全体座標との関係式は、

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

であるから¹⁾、 x 方向変位 u^{TDc} は式 (1) と式 (22) および式 (24) より、

$$\begin{aligned} u^{TDc} &= (2\zeta_1 - 1)\zeta_1 u_1 + (2\zeta_2 - 1)\zeta_2 u_2 \\ &\quad + (2\zeta_3 - 1)\zeta_3 u_3 \\ &\quad + 4\zeta_1 \zeta_2 \left\{ \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{y_2 - y_1}{8}(\theta_1^{TDc} - \theta_2^{TDc}) \right\} \\ &\quad + 4\zeta_2 \zeta_3 \left\{ \frac{1}{2}(u_2 + u_3) - \frac{y_3 - y_2}{8}(\theta_2^{TDc} - \theta_3^{TDc}) \right\} \\ &\quad + 4\zeta_3 \zeta_1 \left\{ \frac{1}{2}(u_3 + u_1) - \frac{y_1 - y_3}{8}(\theta_3^{TDc} - \theta_1^{TDc}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ u_i - (y - y_i) \theta_i^{TDc} / 2 \right\} \zeta_i \end{aligned} \quad (25)$$

となる。同様に、 y 方向変位は式 (1), (23), (24) より、

$$v^{TDc} = \sum_{i=1}^3 \left\{ v_i + (x - x_i) \theta_i^{TDc} / 2 \right\} \zeta_i \quad (26)$$

である。ここで、式 (11) と式 (25), (26) を比較すると、 $N_i^{T3} = \zeta_i$ であることから、式 (11) と式 (25), (26) は回転角項の係数値 (式 (11) では 1, 式 (25), (26) では $\frac{1}{2}$) が異なるだけで、変位場は等価である。即ち、全く異なる仮定の上で成り立っている TDc と TDs の変位場は、回転項の係数だけが異なっているという極めて興味深い事実が証明できた。

本証明の妥当性を明らかにするために、第5章の数値解析例でも両者の並進方向変位が等しくなることを示す。

4.2 平面四辺形要素

前節同様に平面四辺形要素 QDc は二次要素の中間節点を変換・消去して得られる要素であるが、ここでは直接 QDc の変位場 (u^{QDc}, v^{QDc}) を求め、開口、菊池の回転角を有する変位場式 (18) と比較する。

QDc 要素においても Q8 の中間節点変位を式 (7) で近似する。よって、式 (14) の中間節点に関する x および y 方向の変位 (式 (14) の i が 5~8 : 図-4 に局所節点番号を示してある) は式 (7) を用いてそれぞれ次式のように表すことができる。

$$\begin{cases} u_5 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{y_2 - y_1}{8}(\theta_1^{QDc} - \theta_2^{QDc}) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) - \frac{y_3 - y_2}{8}(\theta_2^{QDc} - \theta_3^{QDc}) \\ u_7 = \frac{1}{2}(u_3 + u_4) - \frac{y_4 - y_3}{8}(\theta_3^{QDc} - \theta_4^{QDc}) \\ u_8 = \frac{1}{2}(u_4 + u_1) - \frac{y_1 - y_4}{8}(\theta_4^{QDc} - \theta_1^{QDc}) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} v_5 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{x_2 - x_1}{8}(\theta_1^{QDc} - \theta_2^{QDc}) \\ v_6 = \frac{1}{2}(v_2 + v_3) + \frac{x_3 - x_2}{8}(\theta_2^{QDc} - \theta_3^{QDc}) \\ v_7 = \frac{1}{2}(v_3 + v_4) + \frac{x_4 - x_3}{8}(\theta_3^{QDc} - \theta_4^{QDc}) \\ v_8 = \frac{1}{2}(v_4 + v_1) + \frac{x_1 - x_4}{8}(\theta_4^{QDc} - \theta_1^{QDc}) \end{cases} \quad (28)$$

よって、式 (14) に式 (27) および式 (28) を代入することにより、QDc の変位場を求めることができる。ここで、式 (14) に式 (27) および式 (28) を代入するにあたり、式が煩雑になるのを防ぐため、局所節点番号 1 に関する項のみを抜き出すと、

$$\begin{aligned} u^{QDc} &= \frac{1}{4}u_1(1-\xi)(1-\eta) \\ &+ \frac{1}{16}\theta_1^{QDc}(1-\xi)(1-\eta)\{(1+\xi)y_1 + (1+\eta)y_1 \\ &- (1+\xi)y_2 - (1+\eta)y_4\} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} v^{QDc} &= \frac{1}{4}v_1(1-\xi)(1-\eta) \\ &+ \frac{1}{16}\theta_1^{QDc}(1-\xi)(1-\eta)\{-(1+\xi)x_1 - (1+\eta)x_1 \\ &+ (1+\xi)x_2 + (1+\eta)x_4\} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。

ここでは、図-7(a) のような任意形状の四辺形に対して、議論するのは困難であるので、長方形要素 (図-7(b)) の変位場を求める。長方形要素の局所節点番号を

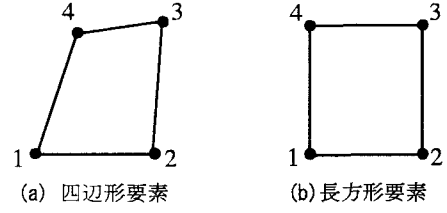


図-7 四辺形要素と長方形要素

図-7(b) のように 1,2,3,4 と仮定し、節点座標を式 (31) のように仮定する。

$$\begin{cases} x_1 = x_4, & x_2 = x_3 \\ y_1 = y_2, & y_3 = y_4 \end{cases} \quad (31)$$

長方形内部の任意点の座標は要素重心に座標系の原点をとれば、以下で表せる¹⁾。

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\{(1-\xi)x_1 + (1+\xi)x_2\} \\ y = \frac{1}{2}\{(1-\eta)y_1 + (1+\eta)y_4\} \end{cases} \quad (32)$$

式 (31)、式 (32) を式 (29) と式 (30) に代入すると、

$$\begin{cases} u^{QDc} = \frac{1}{4}u_1(1-\xi)(1-\eta) \\ \quad - \frac{1}{8}\theta_1^{QDc}(1-\xi)(1-\eta)(y - y_1) \\ v^{QDc} = \frac{1}{4}v_1(1-\xi)(1-\eta) \\ \quad + \frac{1}{8}\theta_1^{QDc}(1-\xi)(1-\eta)(x - x_1) \end{cases} \quad (33)$$

となる。よって式 (19)、式 (33) より、QDc の節点 1 に関する項は Q4 の形状関数 (N_1^{Q4}) を用いて次式で表すことができる。

$$\begin{cases} u^{QDc} = \left\{ u_1 - (y - y_1)\theta_1^{QDc}/2 \right\} N_1^{Q4} \\ v^{QDc} = \left\{ v_1 + (x - x_1)\theta_1^{QDc}/2 \right\} N_1^{Q4} \end{cases} \quad (34)$$

同様に、局所節点番号 2~4 についても長方形と仮定して求めることができ、これをまとめると次式となる。

$$\begin{cases} u^{QDc} = \sum_{i=1}^4 \left\{ u_i - (y - y_i)\theta_i^{QDc}/2 \right\} N_i^{Q4} \\ v^{QDc} = \sum_{i=1}^4 \left\{ v_i + (x - x_i)\theta_i^{QDc}/2 \right\} N_i^{Q4} \end{cases} \quad (35)$$

よって、式 (18) と式 (35) を比較すると、長方形要素のとき式 (18) と式 (35) は回転項の係数が異なるだけで、等価な変位場を有することが明らかになった。

四辺形要素については、要素形状が長方形の場合は式 (35) のように変位場を求めることができる。しかし、要素形状が任意の場合は式 (35) のような形で変位場を表すことが困難であるので、本論文では両要素を用いて数値解析を行い比較検討を行う。

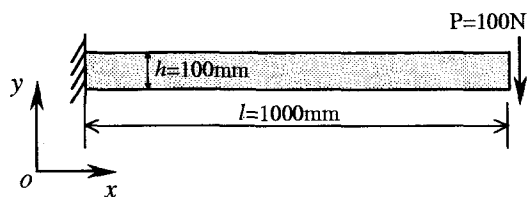


図-8 解析モデル

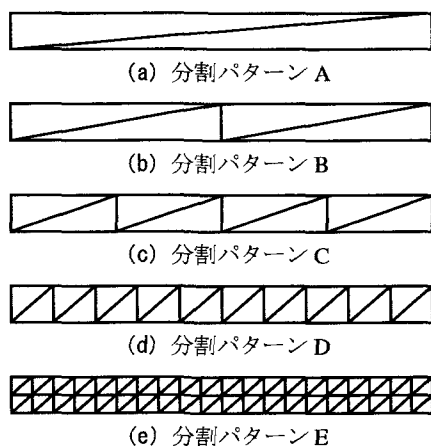


図-9 三角形要素分割パターン

5. 数値解析例

5.1 セン断力を受ける片持はりの変位精度

ここでは、図-8 に示すようなせん断力を受ける片持はりの自由端変位についての精度評価を行う。比較検討する要素を三角形要素では T3, T6, TDc および TDs とし、四辺形要素では Q4, Q8, QDc および QDs とする。使用する要素分割パターンは図-9 と図-10 に示すように、A から E のようなパターンとし、縦と横の分割数はそれぞれ 1×1 , 2×1 , 4×1 , 10×1 , 20×2 である。また、パターン E 以降の分割は要素の縦と横の比が 1:1 になるような分割を用いた。なお、ヤング率は 30000.0 N/mm^2 、ポアソン比は 0.25 である。解析を行なう際、面積積分についてはガウスの数値積分法¹⁾を用い、T6, TDc および TDs では 3 点積分、Q4, Q8, QDc および QDs では 4 点積分を用いている。図-11 と図-12 に三角形要素を用いた場合と四辺形要素を用いた場合の自由度と精度の関係を示す。ここで、図中の理論値 (v_t) とは初等はり理論から求めることのできるチモシェンコによるせん断変形を考慮した自由端の荷重方向たわみ¹⁾である。図-11、図-12

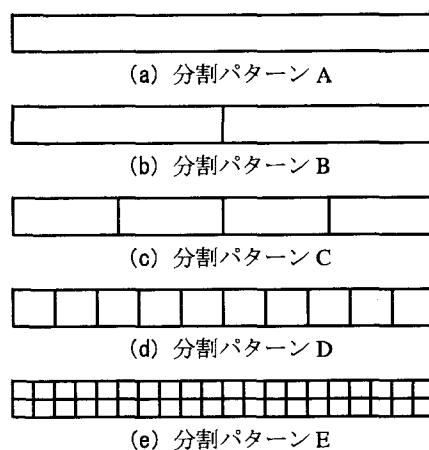


図-10 四辺形要素分割パターン

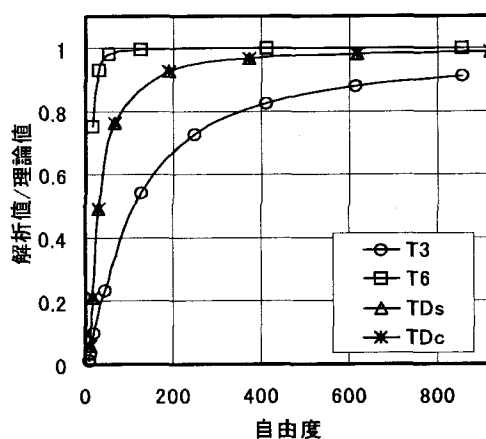


図-11 三角形要素を用いた場合の自由度と精度の関係

から、解析精度は二次要素が最も良く一次要素が最も悪い。回転自由度を有する要素はその中間の精度を有しており、二次要素に近い精度を持つことが分かる。また、図-11 の TDc と TDs、図-12 の QDc と QDs による解は全く同じ数値である。これは TDc 及び QDc の変位場の回転自由度をそれぞれ $(\theta_i^{TDc})' = \theta_i^{TDc}/2$, $(\theta_i^{QDc})' = \theta_i^{QDc}/2$ とおいて解けば TDs 及び QDs の変位場と全く同一になるからである。(四辺形要素の場合、要素分割は図-10 に示す通り全て長方形である)。

次に QDc と QDs に関して、要素を規則的に配置した場合(長方形要素)と不規則に配置した場合について検討する。要素分割を図-13 に示し、自由端のたわみの理論解との比較を表-1 に示す。参考までに、Q4 と Q8 による結果も同時に示した。表-1 より、規則配置の要素分割では 4.2 節で示したように QDc と QDs

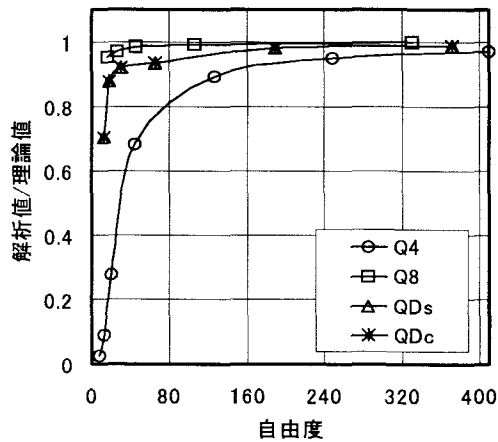


図-12 四辺形要素を用いた場合の自由度と精度の関係

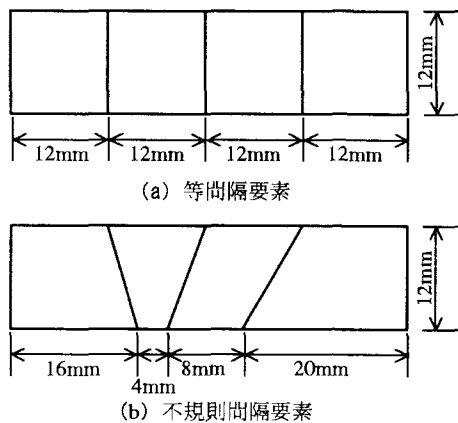


図-13 四辺形要素の規則メッシュと不規則メッシュ

表-1 規則的な要素分割と不規則な要素分割による理論値との比較

	Q4	Q8	QDs	QDc
規則要素	0.60606	0.87533	0.82083	0.82083
不規則要素	0.53201	0.86774	0.82107	0.84145
理論値	0.88987	0.88987	0.88987	0.88987

による変位解は全く同じであるが、不規則配置された要素分割では解が若干異なる。よって、QDcとQDsは長方形という特別な形状のときに等しくなることが本数値解析例から分かる。

5.2 曲げモーメントを受ける片持ちはりの応力精度

ここでは、図-14に示すような曲げモーメントを受ける片持ちはりの応力の精度を評価する。ヤング率は

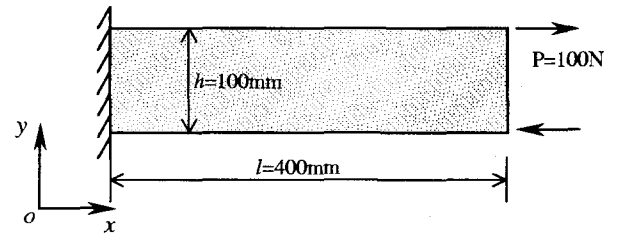


図-14 解析モデル

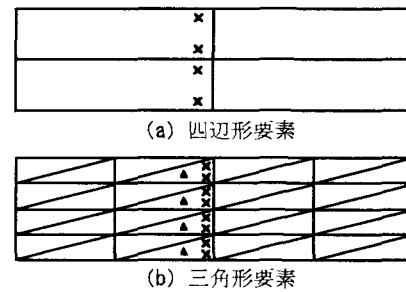


図-15 応力評価積分点

30000.0N/mm^2 、ポアソン比は0.25である。要素分割を図-15に示す。ここで、応力評価点としては四辺形要素の場合は、全ての要素で同じ積分点を用いているので、図-15(a)の×印で評価した。また、三角形要素の場合はT3ではひずみが要素内部で一定であるので代表点を図-15(b)の▲印で示す要素の重心点、T6、TDc、TDsについては図-15(b)の×印で評価した。

図-16、図-17に解析結果を示す。図中の理論値(σ_x)とははり理論から求めた値⁸⁾で、 My/I (M :曲げモーメント、 I :断面二次モーメント、 y :はり断面中央からはり軸方向に垂直に測った距離)である。なお、TDcとTDs、QDcとQDsは前節で示した通り、全く同一の解を得るので図-16、図-17では同じ記号で示している。

図-16、図-17より、二次要素と回転自由度を有する要素による解は、ほぼ理論解に一致しているが、一次要素による解は理論値には一致していない。よって、回転自由度を有する二種類の要素は三角形形状および四辺形形状のどちらの場合においても、応力の精度は一次要素よりも良いことが分かる。

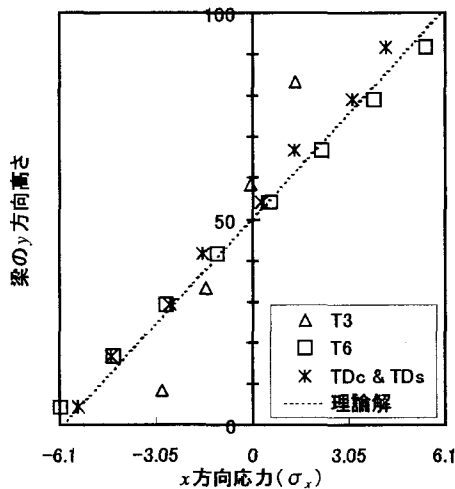


図-16 x 方向応力の分布 (三角形要素)

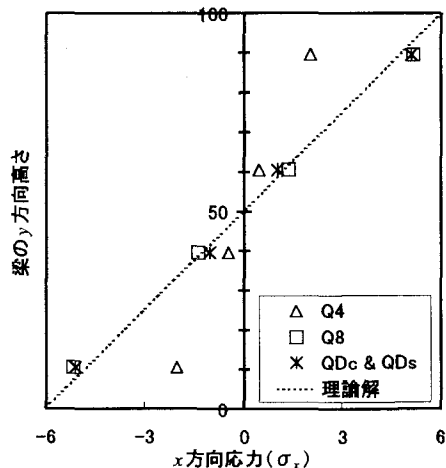


図-17 x 方向応力の分布 (四辺形要素)

6. 結論

本論文では二次要素の辺中央節点変位を変換・消去する方法と関口、菊池の回転角を有する変位場を用いる方法の両方法により得られる回転自由度を有する平面三角形要素と平面四辺形要素について検討した。本研究で得られた成果をまとめると以下のようになる。

- (1) 辺中央節点変位を頂点の並進方向変位と回転角を用いて変換・消去する方法で導かれた回転自由度を有する平面三角形要素と関口、菊池らが提案した回転角を有する変位場から導かれる回転自由度を有する平面三角形要素を定式化し、両者の変位場が回転項の係数のみが異なっており (前者は後者の $1/2$ 倍)、等価な変位場を有していることが証

明できた。

- (2) 辺中央節点変位を変換・消去する方法で導かれた回転自由度を有する平面四辺形要素の変位場と関口、菊池の回転角を有する変位場を比較すると、長方形要素の場合は、両者の変位場は回転項の係数が異なるのみで等価な変位場になっている。数値解析からも両者の並進方向変位は一致した。また、任意形状の場合は両者は異なった解になることが分かった。
- (3) 回転自由度を有する要素を用いることで、一次要素に比べると変位および応力ともに極めて良い精度を得ることができた。また、二次要素と比較すると精度は若干悪いが、回転自由度を有する要素は中間節点を有しないのでメッシュ生成の煩雑さから解放され、特にリメッシング等の処理が必要な解析等ではその労力は格段に低減できると考えられる。

これまで、二次要素の中間節点変位を頂点の並進方向で変換・消去した三角形要素や四辺形要素は多くの研究者によって研究され、さまざまな問題に適用されてきた。しかしこの要素を用いる場合、一度中間節点を有する要素の剛性マトリックスを作成し、その両側から変換マトリックスを乗じるという処理を必要とするため、要素剛性マトリックスの作成時間が問題の一つであった。しかし、本研究により関口、菊池が提案した回転自由度を有する変位場を用いれば変換マトリックスを用いることなく要素剛性マトリックスを導くことができ、三角形要素と長方形要素でそれと等価な解を得られることが明らかになった。また、回転自由度を有する要素は中間節点を有していないのでメッシュ分割の煩雑さから解放され、さらに精度的にも二次要素に近いことから二次要素よりも有効な要素であると考えられる。

回転自由度を有する要素は材料非線形問題、幾何学非線形問題等にも適用可能であり今後の適用していく予定である。

謝辞： 本研究を遂行するにあたり矢川元基教授 (東洋大学)、関口美奈子博士 (ミシガン大学) に貴重なご意見を賜りました。ここに、深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) O.C. ツェンキ-ヴィッツ著、吉識雅夫、山田嘉昭監訳：基礎工学におけるマトリックス有限要素法、培風館、1977。
- 2) 鷲津久一郎、宮本博、山田嘉昭、山本善之、河合忠彦：有限要素法ハンドブック、培風館、1993。
- 3) 矢川元基、山田知則、河合浩志：メッシュレス FEM につ

- いて, 日本機械学会講演論文集, No. 95-1, pp.210-211, 1995.
- 4) 川井忠彦監訳: ホランド/ベル 有限要素法 -応力解析への応用-, 朝倉書店, 1972.
 - 5) D. J. Allman.: A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Computer and Structures*, Vol.19, pp.1-8, 1984.
 - 6) Robert D. Cook., David S. Malkus., Micheal E. Plesha.: *Concepts and applications of finite element analysis*, Third edition, Wiley, 1989.
 - 7) M. Sekiguchi., N. Kikuchi.: Re-examination of membrane elements with drilling freedom, *Proceedings of the fifth world congress on computational mechanics*, 2002.
 - 8) 安和守史, 伊良波繁雄, 富山潤, 矢川元基: 改良アイソパラメトリック要素を用いた高精度フリーメッシュ法の二次元応力解析への適用に関する研究, 日本コンクリート工学年次論文報告集, Vol.23, No.3, pp.1-6, 2001.
 - 9) 富山潤, 伊良波繁雄, 山田義智, 松原仁, 矢川元基: フリーメッシュ法によるフレッシュコンクリートの流動解析法に関する研究, 土木学会論文集, No.746/V-61, pp.91-101, 2003.
 - 10) Thomas J.R. Hughes, F. Brezzi.: On drilling degrees of freedom, *Computer method in applied mechanics and engineering*, 72, pp.105-121, 1989.
 - 11) 鵜戸口英善, 国尾武 訳: S. チモシェンコ材料力学 (上巻), 東京図書, 1968.

(2004 年 4 月 16 日 受付)