

自由水面を有する非定常浸透流問題の HPM による解析法について

Numerical Method for Unsteady Seepage Flow Problems with Phreatic Surface Using HPM

大木裕久*, 竹内則雄**, 草深守人**

Hirohisa OHKI, Norio TAKEUCHI and Morito KUSABUKA

*学生会員, 修(工), 法政大学大学院, 工学研究科建設工学専攻 (〒184-8584 東京都小金井市梶野町 3-7-2)

**正会員, 工博, 法政大学教授, 工学部都市環境デザイン工学科 (〒184-8584 東京都小金井市梶野町 3-7-2)

This paper presents the development of numerical method for unsteady seepage flow problems with phreatic surface. This method is new discrete procedure that applied the concept of hybrid model. Also, present method introduced the general weighting residual procedure with the subsidiary conditions. Compatibility of the potential on the intersection boundary is approximately introduced using penalty function instead of the Lagrange multiplier. In each element, we assume linear potential field with the head and the hydraulic gradient. The element node does not need to have the degree of freedom and is used only for recognition of the domain shape. In this study, we tried to analysis the unsteady seepage flow problems with phreatic surface to compare the experiment.

Key Words: *unsteady seepage flow, penalty method, weighted residual procedure*

1. はじめに

複雑な地層を有する 3 次元地盤の部分領域 (例えば FEM では要素) の再分割は容易でない。また、浸透流問題の場合、自由表面を扱うことも多い。FEM では、飽和—不飽和の概念を用いてこれを表現する方法¹⁾²⁾や収束計算を通して要素分割を変更する方法³⁾などが用いられている。特に、後者の方法では、要素分割が収束過程において、再分割されるため、扁平な要素にならないような工夫が必要である。

また、FVM による浸透流問題の解析法⁴⁾では、Shi⁵⁾が提案しているマニホールド法(MM)と同様に、水頭場と物理領域、すなわち積分領域を別々に考えることができるため、自由表面を物理領域と考慮して取り扱うことが可能である。ただし、要素形状はポテンシャル場によって限定されるため、任意形状の要素を用いることはできない。以上のように、3 次元地盤の要素への分割や、自由表面のための要素再分割といった 2 つの問題は、いずれも、領域全体を小さな部分領域に分割する際に生ずる。FEM の場合、この部分領域の形状は全水頭 (以下水頭) の内挿関数によって決定されるため、任意形状に分割することはできない。

一方、著者らは、ハイブリッド型変位モデルの考え方に着目して、Lagrange の未定乗数にバネの考え方を導入し、バネ定数としてペナルティを用いて、部分領域境界

上での変位の連続性を近似的に導入した新しい離散化モデルであるハイブリッド型ペナルティ法⁶⁾ (HPM : Hybrid-type Penalty Method) を開発した。この方法では、部分領域毎に独立な変位場を仮定し、自由度として部分領域内の変位とひずみを用いている。したがって、部分領域の形状は任意であり、節点に自由度を設ける必要はなく、領域形状を認識するためだけに節点が用いられている。この方法を浸透流問題に適用できれば、部分領域の形状を気にせずに全領域を細分できる。

そこで、本研究では、著者ら⁷⁾が提案したハイブリッド型のモデルの考え方を浸透流問題に適用し、部分領域に分割した地盤部分の分割形状を変更することなく、収束過程で求めた浸潤面を新たな積分領域と考え浸透流解析を行う手法を用いて、刻々と自由水面が変化する非定常浸透流問題の解析手法を提案し、非定常流模型実験と本手法により得られる解の特性について検討する。

はじめに、水頭 (ポテンシャル) の連続性を付帯条件として、これをペナルティにより一般的な重み付き残差方程式に導入した定式化を示す。続いて、水頭をテラ—展開し、1 次項までで水頭場を表現して離散化方程式を誘導する。このとき、水頭場は部分領域毎に独立に設定するため、任意形状の部分領域を用いることができる。さらに、非定常問題の場合、時間積分が必要となるため、その考え方を示す。最後に非定常流模型実験と本手法により得られる解の特性について検討する。なお、本論文

では、部分領域の形状が基底関数に依存する場合を要素と呼び、著者らが開発したモデルのように水頭場に関係なく任意形状とできる場合を部分領域と呼ぶ。

2. 支配方程式と重み付き残差方程式

非定常浸透流の支配方程式が次式で与えられる。

$$(\text{連続方程式}) \quad S \frac{\partial h}{\partial t} = L^t v + f \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$(\text{流速-動水勾配関係}) \quad v = -k d \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$(\text{動水勾配-水頭関係}) \quad d = L h \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

ここで、 S は貯留係数であり、 f 、 h は湧水率、水頭である。また、 v 、 d 、 k は、それぞれダルシー流速（以下流速）、動水勾配、透水係数を表している。 Ω は境界 $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_q$ で囲まれた領域、もしくは体積である。ただし、 Γ_h は水頭が与えられる境界、 Γ_q は境界を通して領域から流入出する流量が与えられる境界で、それぞれ、以下の条件を満たしている。

$$q = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (4)$$

$$h = \bar{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (5)$$

ここで、上付の $\bar{\cdot}$ は既知量を表しており、 q は境界における単位面積あたりの法線方向に対する流量で、

$$q = n v \quad (6)$$

と表される。ただし、 n は境界における外向き法線ベクトルである。いま、2次元問題での係数は次のようになる。

$$L^t = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad k = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \quad v = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad n = [n_x, n_y]$$

ここで、 k_x, k_y は x および y 方向の透水係数、 d_x, d_y は x および y 方向の動水勾配であり、 u, v は x および y 方向の流速、 n_x, n_y は法線ベクトルの方向余弦である。なお、本研究では、浸出面を有しないダムの中の浸透流を対象としており、現時点では、第三種境界は考えていない。

式(1)に境界条件式(5)を満たす任意の重み δh を乗じて領域 Ω について積分すると以下の関係が得られる。

$$\int_{\Omega} \delta h \left(S \frac{\partial h}{\partial t} - L^t v - f \right) d\Omega = 0 \quad (7)$$

ただし、 $\delta h = 0 \quad \text{on } \Gamma_h$

これにガウスの発散定理を用いると、次のような領域 Ω に関する重み付き残差方程式が得られる。

$$\int_{\Omega} \delta h \left(S \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} [L \delta h]^t v d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta h n v d\Gamma = 0 \quad (8)$$

いま、図-1に示すように、領域 Ω は閉境界 $\Gamma^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)}$ から構成されているものとする。すなわち、

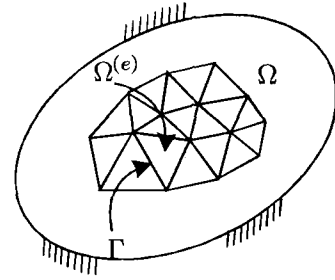


図-1 領域 Ω と部分領域 $\Omega^{(e)}$

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \emptyset \quad (r \neq q) \quad (9)$$

このとき、式(8)の重み付き残差方程式は、式(6)の関係をを用い、離散領域に対して以下のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta h \left(S \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} [L \delta h]^t v d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega \right) - \int_{\Gamma_q} \delta h n v d\Gamma = 0 \quad (10)$$

驚津⁸⁾は、要素境界における変位の連続性を少し弱め、Lagrangeの未定乗数を用いて付帯条件を変分原理に導入したモデルをハイブリッド型と呼んでいる。本論文においても、このハイブリッド型の考え方をを用いて、部分領域境界において水頭の連続性を弱め、この付帯条件を、ペナルティを用いて重み付き残差方程式に導入する。

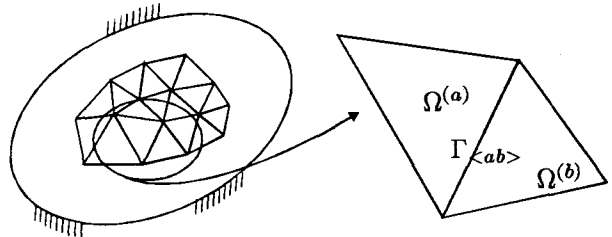


図-2 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$

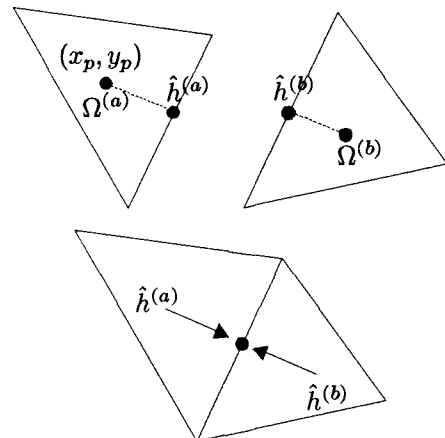


図-3 共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上における $\hat{h}^{(a)}$ と $\hat{h}^{(b)}$

いま、図-2 に示すような隣接する 2 つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ を考える。このとき、2 つの部分領域における共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ 、すなわち、

$$\Gamma_{<ab>} = \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (11)$$

において、図-3 に示される付帯条件

$$h_{<ab>}^{(a)} = h_{<ab>}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (12)$$

を隣接する部分領域の共通な境界で Lagrange の未定乗数 λ を用いて、

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda (h^{(a)} - h^{(b)}) d\Gamma \quad (13)$$

と表し、重み付き残差方程式(10)に導入する。ここで、 $h_{<ab>}^{(a)}$ ならびに $h_{<ab>}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の水頭を表している。ただし、

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda (h^{(a)} - h^{(b)}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{<ab>}} \delta \lambda (h^{(a)} - h^{(b)}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda (\delta h^{(a)} - \delta h^{(b)}) d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

いま、隣接する 2 つの部分領域境界辺の数を N とすると、重み付き残差方程式は次のように表すことができる。ここで、停留解における Lagrange の未定乗数 λ の物理的意味は、 $\Gamma_{<ab>}$ 上の流量を意味する。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta h S \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t v d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega \right) \\ & + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma^{(s)}} \lambda (h_{<s>}^{(s)} - h_{<s>}^{(s)}) d\Gamma \right) - \int_{\Gamma_q} \delta h v d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

竹内ら⁹⁾は、構造の問題において、Lagrange の未定乗数とその物理的意味を考慮して、ペナルティと相対変位の積で表した。本論文においてもこれと同様、 λ が流量に対応するという点を考慮し、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(a)}$ における、境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の流量を次のように表すこととする。

$$\lambda_{<ab>} = P \phi_{<ab>} \quad (16)$$

ここで、 P はペナルティを表している。また $\phi_{<ab>}$ は境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対的な水頭を表しており、次の関係がある。

$$\phi_{<ab>} = \hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)} \quad (17)$$

したがって、式(13)(17)を用いて次のように書く。

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda_{<ab>} (\hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)}) d\Gamma \\ &= \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda_{<ab>} \phi_{<ab>} d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

さらに、式(16)の関係を代入すると以下のようになる。

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \phi_{<ab>} \cdot P \cdot \phi_{<ab>} d\Gamma \quad (19)$$

したがって、式(15)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta h S \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t v d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta h v d\Gamma \right) \\ & - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \phi P \phi d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

また、左辺第 4 項は文献(7)の書き方にしたがって、便宜上、領域の和の $()$ 内にいれておく。この式に、式(2)(3)の関係を代入すれば、最終的に以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta h S \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h]^t k L h d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega - \int_{\Gamma_q} \delta h v d\Gamma \right) \\ & - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \phi P \phi d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

3. 部分領域毎に独立な線形水頭場

いま、2 次元状態の場合、水頭 $h(x, y)$ が部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の点 (x_p, y_p) について n 回連続微分可能であれば、テーラ一展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} h(x, y) &= h(x_p, y_p) \\ &+ \frac{1}{1!} \left\{ (x - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial}{\partial y} \right\} h(x_p, y_p) \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ (x - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^2 h(x_p, y_p) + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left\{ (x - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^{(n-1)} h(x_p, y_p) \\ &+ R_n \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 R_n は剰余項であり、以下のようになる。

$$R_n = \frac{1}{n!} \left\{ (x - x_p) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^n h(\theta_x, \theta_y) \quad (23)$$

($0 \leq \theta \leq 1$)

h が C^l 級の関数であるとして、式(22)における 1 階の微分までを考慮すると、水頭 $h(x, y)$ は、次のように表すことができる。

$$h^{(e)} = h_p + (x - x_p) \frac{\partial h_p}{\partial x} + (y - y_p) \frac{\partial h_p}{\partial y} \quad (24)$$

ただし、 $h^{(e)}$ は部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の水頭 $h(x, y)$ を、 h_p は部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の点 (x_p, y_p) における水頭を表している。式(24)の右辺第 2 項、第 3 項の偏微分は動水勾配を表しており、式(3)の関係をj用いて次のように表す事ができる。

$$h^{(e)} = h_p + (x - x_p) d_x + (y - y_p) d_y \quad (25)$$

式(25)は線形の水頭場を表しており、これを各部分領域毎に独立に設定する。いま、部分領域 $\Omega^{(e)}$ について、水頭の式(25)を、簡単に

$$h^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{H}^{(e)} \quad (26)$$

と表す。式(26)におけるそれぞれの係数は、2次元平面問題の場合、次のとおりである。ここで、上付の(e)は部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関するものであることを意味する。

$$\mathbf{H}^{(e)} = [h_p, d_x, d_y]^t \quad (27)$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = [1, (x - x_p), (y - y_p)] \quad (28)$$

このように、本論文で用いる水頭場は、部分領域内における任意点の水頭に加え、直接、動水勾配を自由度として扱う。また、各部分領域内の任意点におけるパラメータを用いて部分領域内水頭場を表しているため、従来のFEMやFVMとは異なり、節点において水頭を共有しない。すなわち、節点は領域形状を認識するために用いるものであって、従来のFEMのように自由度を設けるためのものではないため、部分領域の形状は特に限定されず、任意の形状を部分領域として用いることが可能になる。

4. 離散化方程式の誘導

離散化方程式は、式(21)に対して、式(26)で示す線形の水頭場の関係を代入することによって得られる。ただし、重み $\delta h^{(e)}$ は次のように表されるものとする。

$$\delta h^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{H}^{(e)} \quad (29)$$

いま、式(3)の動水勾配は、式(26)より次のように表される。

$$\begin{aligned} Lh^{(e)} &= \mathbf{LN}^{(e)} \mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{H}^{(e)} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} [1, (x - x_p), (y - y_p)] \begin{Bmatrix} h_p \\ d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_p \\ d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $\mathbf{B}^{(e)}$ は、

$$\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{LN}^{(e)} \quad (31)$$

であり、2次元問題の場合、

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

である。同様に、重みについても以下のように表す。

$$L\delta h^{(e)} = \mathbf{LN}^{(e)} \delta \mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \delta \mathbf{H}^{(e)} \quad (33)$$

以上より、式(21)の左辺第1項は次のように表せる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta h S \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega = (\delta \mathbf{H}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t S \mathbf{N}^{(e)} d\Omega \frac{d\mathbf{H}^{(e)}}{dt} \quad (34)$$

いま、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を $\mathbf{H}$ とすると、部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $\mathbf{H}^{(e)}$ は以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{H} \quad (35)$$

ここで $\mathbf{A}^{(e)}$ は、全部分領域の自由度と着目部分領域の自由度を関係付ける行列である。また、 $\mathbf{H}^{(1)}$ についてそれぞれマトリックスを求めると以下のように表される。式(35)を $\mathbf{H}^{(1)}$ について整理すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ d_x^{(1)} \\ d_y^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ d_x^{(1)} \\ d_y^{(1)} \\ h^{(2)} \\ d_x^{(2)} \\ d_y^{(2)} \\ h^{(3)} \\ d_x^{(3)} \\ d_y^{(3)} \\ h^{(4)} \\ d_x^{(4)} \\ d_y^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

式(35)のように、全部分領域の自由度と着目部分領域の自由度を関係付ける行列 $\mathbf{A}^{(e)}$ を用いることによって、重みについても同様に、

$$\delta \mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \delta \mathbf{H} \quad (37)$$

とすると、式(34)は次のように整理することができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta h S \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega = \delta \mathbf{H}^t \mathbf{M}^{(e)} \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \delta \mathbf{H}^t \mathbf{M} \mathbf{H} \quad (38)$$

ここで、 $\mathbf{M}^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{M}^{(e)} = (\mathbf{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathbf{A}^{(e)} \quad (39)$$

同様に、式(21)における左辺第2項は、式(30)(33)を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta h] \mathbf{k} L d\Omega &= (\delta \mathbf{H}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathbf{H}^{(e)} \\ &= \delta \mathbf{H}^t \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{H} \end{aligned} \quad (40)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= (\mathbf{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathbf{A}^{(e)} \\ &= (\mathbf{A}^{(e)})^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_x & 0 \\ 0 & 0 & k_y \end{bmatrix} \Delta^{(e)} \Omega \mathbf{A}^{(e)} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 $\Delta^{(e)}$ は部分領域の面積を表している。
また、左辺第3項は、以下のように表すことができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta h f d\Omega = (\delta H^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (B^{(e)})^t f d\Omega = -\delta H^t Q^{(e)} \quad (42)$$

ここで、 $Q^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$Q^{(e)} = -(\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (N^{(e)})^t f d\Omega \quad (43)$$

また、左辺第4項は以下のように表すことができる。

$$\int_{\Gamma_q} \delta h q d\Gamma = \delta H^{(t)} (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (N^{(e)})^t q d\Gamma \quad (44)$$

一方、部分領域境界面に関する項を整理するにあたり、
相対水頭 $\phi_{<ab>}$ を次のように表す。

$$\phi_{<ab>} = \hat{h}^{(a)} - \hat{h}^{(b)} = B_{<ab>} H_{<ab>} \quad (45)$$

ここで、 $B_{<ab>}$ 、 $H_{<ab>}$ は以下のとおりである。

$$B_{<ab>} = [N^{(a)}, N^{(b)}] \quad (46)$$

$$H_{<ab>} = [H^{(a)}, H^{(b)}]^t \quad (47)$$

ただし、上記の(a),(b)は、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ に関する
量を表している。これらの関係を用いると、式(21)の左
辺第5項は、

$$\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \phi P \phi d\Gamma = \delta H_{<ab>}^t \int_{\Gamma_{<ab>}} B_{<ab>}^t P B_{<ab>} d\Gamma H_{<ab>} \quad (48)$$

いま、式(35)と同様に、全部分領域における自由度を
並べた1次元配列を H とすると、部分領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$
に関する自由度 $H_{<ab>}$ は、以下のように関係付けられる。

$$H_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} H \quad (49)$$

ここで、 $\mathcal{M}_{<ab>}$ は、全部分領域における自由度と着
目している部分領域境界面に関する自由度を関係付け
る行列である。同様に重みについても

$$\delta H_{<ab>} = \mathcal{M}_{<ab>} \delta H \quad (50)$$

とする。これらの関係より、式(48)は次のように書く
ことができる。

$$\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \phi P \phi d\Gamma = \delta H_{<ab>}^t \int_{\Gamma_{<ab>}} B_{<ab>}^t P B_{<ab>} d\Gamma H_{<ab>} = \delta H^t K_{<s>} H \quad (51)$$

ここで、 $K_{<s>}$ は以下のとおりである。

$$K_{<s>} = \mathcal{M}_{<s>}^t \int_{\Gamma_{<s>}} B_{<s>}^t P B_{<s>} d\Gamma \mathcal{M}_{<s>} \quad (52)$$

以上より空間に関して離散化された方程式が次のよ
うに求められる。

$$M \dot{H} + K H = Q \quad (53)$$

ただし、 M 、 K および Q は次のとおりである。

$$M = \sum_{e=1}^M M^{(e)} \quad (54)$$

$$K = \sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \quad (55)$$

$$Q = \sum_{e=1}^M Q^{(e)} \quad (56)$$

このように、本モデルの離散化方程式は、式(53)に示
す時間に関する常微分方程式に帰着した。左辺の係数行
列 K は、各要素の係数行列と要素境界面に関する付帯条
件との関係、ならびに、流速に関する境界条件を組み合わ
せることによって得られる。なお、係数行列 K において、
要素境界面に関する積分が含まれるが、積分点を境界面
の1点（平面問題の場合、中点）により解析を行う。

5. 時間積分

式(53)で離散化方程式の誘導を行ったが、この式は、
時間に関する1階の常微分方程式になっているため、時
間に関する離散化をする必要がある。ここでは、差分近
似を用いて時間に関する離散化を行う。

差分近似には、前進差分法（オイラー法）、後退差分
法と中央差分法がある。これら3つの関係は水頭 H を次
のように考えることで一般化することができる。

$$H = \frac{1}{2}(1-\gamma)H^n + \frac{1}{2}(1+\gamma)H^{n+1} \quad (57)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{\Delta t}(H^{n+1} - H^n)$$

ここで、 γ は最適化パラメータで、 $\gamma = -1$ のとき、前進
差分法、 $\gamma = 1$ のとき後退差分法を表しており、 $\gamma = 0$ の
ときがクランク・ニコルソン法となる。

式(57)の関係を式(53)に適用し、時間に関する離散化を
行うと次式が得られる。

$$\left[\frac{2}{\Delta t} M + (1+\gamma)K \right] H^{n+1} = 2Q + \left[\frac{2}{\Delta t} M - (1-\gamma)K \right] H^n \quad (58)$$

式(58)における γ の値によって様々な公式が考えられ、
ここでは本研究で用いたクランク・ニコルソン法を示す。

$$\left[\frac{2}{\Delta t} M + K \right] H^{n+1} = 2Q + \left[\frac{2}{\Delta t} M - K \right] H^n \quad (59)$$

式(57)より理解できるように、クランク・ニコルソン法

は陰解法であり、放物型の微分方程式の解析に広く利用されている。

6. 自由水面の取り扱い

ダムなどの堤体内部における浸透問題の場合、浸潤面が生ずる。この問題の解析手法としては様々な方法が考えられ、Smith と Griffiths¹⁰⁾が FEM で行っている反復的手法によって、定常状態における浸潤面を取り扱う方法があるが、この方法では、部分領域が扁平になりやすく、また、領域形状が複雑であり、地層境界がいくつもある場合や、トンネル等の空洞がある場合には領域の再分割が困難となり、汎用性に欠けることである。

一方、本モデルは、任意多角形を部分領域として用いることが出来るため、初期領域分割を再分割せずに、圧力水頭が 0 となる位置に応じて、積分領域を変更することが可能である。本論文では、この方法を積分領域法と呼ぶ。以下に、ここで提案する積分領域法の概略を示す。なお、収束計算を各時間ステップ毎に行う。

- ①境界を水頭が与えられる境界、流出がない境界に分けて考え、浸潤面の初期値を与えて水頭を求める。

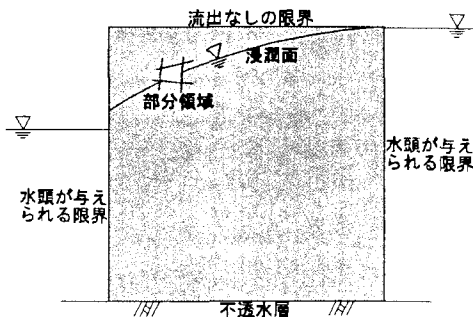


図-5 境界条件と新しい積分領域

- ②図-5に示すように、全部分領域から1つの部分領域を取り出す。図-6は取り出した一つの部分領域を示した図である。この部分領域で圧力水頭が 0 となる位置を求める。

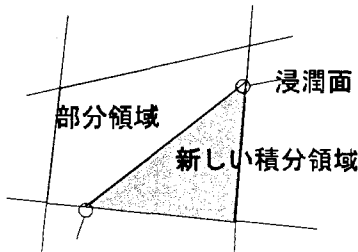


図-6 圧力水頭=0

いま、部分領域境界に関係する節点の水頭を h 、位置を z とすれば、圧力水頭 h_p は次のように計算される。

$$h_p = h - z \quad (60)$$

浸潤面がこの部分領域境界を横切る条件は、境界に係する 2 つの節点における圧力水頭 h_{p1}, h_{p2} が以下の条件を満たした場合である。

$$h_{p1} \times h_{p2} \leq 0 \quad (61)$$

この条件を満たす部分領域については、図-6のように、新しい積分領域を用いて次の計算を行う。また、部分領域については、その部分領域は浸潤面の上側にあるので、次の計算では、その部分領域は無視する。一方、すべてが正であれば浸潤面の下側にあるので、部分領域を有効とみなして解析する。

領域分割法を用いる場合は移動可能節点に関する情報を入力データとして与える必要があるが、この方法では全ての領域境界について上記の判断を行うため、新しい積分領域を求めるための特別なデータを必要としない。

- ③②で求めた位置各部分領域毎に連ねて図-6のように浸潤面を求め、これをあらたな積分領域（濃い編み掛け部分）と考える。これを全領域について照査し、図-7の初期分割に対して、図-8の網掛け部分のように、新しい積分領域を求め、再計算を行う。このとき、領域分割は、図-8に示すように、初期分割をそのまま用いる。

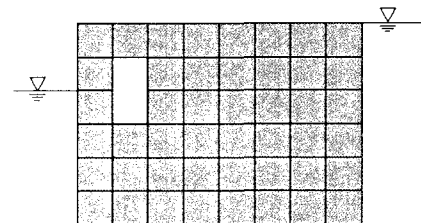


図-7 初期分割

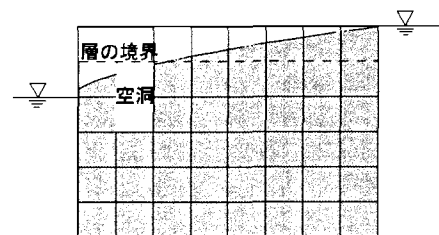


図-8 新しい積分領域

- ④②と③を移動量が十分小さくなるまで繰り返す。この方法によれば、始めの領域分割がそのまま利用できるため、図-8に示すように、地層境界や空洞が存在しても解析が可能である。また、応力解析との連成を考える場合にも、応力解析用の領域分割を初期分割として浸潤面を求めることができる。

7. 検証実験ならびに数値解析結果

7.1 検証実験による結果

本実験では、時間変化に伴い土中を流れる地下水がどのような変化をし、流れているかを把握することを目的とし、非定常模型実験を行い、本研究で提案した解析手法の精度を検証する。模型実験装置の仕組みを以下に述べる。写真-1 は本研究に用いた実験供試体である。

- ①実験に用いる水を水道の蛇口から直接ホースで供給し、流量調節水槽に水を送る。この流量調節水槽には、蛇口から越流水層に水を供給するホース、模型実験装置本体に内蔵された越流水槽に水を送り込むホース、越流水槽から越流された水を排水溝に流すホースの3本が取り付けられている。
- ②流量調節水槽に貯まった水をホースを通して模型実験装置本体に内蔵された越流装置に水を送り、この越流水槽で水を定水位にさせる。このとき越流された水は、模型実験装置本体の側面に取り付けられたホースにより、排水溝に水を流す。
- ③その後、定水位になった瞬間、フィルター（止水壁）を取り外し、標準砂を引き詰めた模型実験装置本体の内部に一気に通水させる。このとき同時にデジタルカメラの撮影を開始し、時間刻みの水面形状を計測する。



写真-1 実験供試体

実験では、流出側水頭を 0 cm に固定し、流入側水頭を 5 cm, 10 cm, 15 cm の 3 ケースの実験を行い、9 本の溝の水面形状を数分間隔で計測した。初期水頭が 5 cm と小さい場合は、動水勾配が小さくなるため、拡散的な水移動が大きくなり、やがて水面移動速度よりも先へと移動し、地盤が乾燥状態 ($S_r = 0$) から湿潤状態 ($0 < S_r < 100$) に変化した地盤に浸透水が流れてくるので、水面移動速度が速くなり、やがて同時に水が浸透してきたものと考えられる。また、不透水境界に水道ができているとも考えられる。時間が経過して、不透水境界で水道をつくり、初期の流線が水道の流線にすりよっていき、最終的には浸潤線と沿うようになり、水頭差がなくなるにつれて水面移動速度が速くなり、ほぼ同時に水が浸透してしまっ

たものと考えられる。

一方、初期水頭が 15 cm と大きい場合は、動水勾配が大きく拡散的な水移動よりも、鉛直方向の水移動が大きくなり毛管水帯に水が奪われるのと同じくらいの速度で鉛直方向の速度と初期地盤の乾燥に近い状態で常に水が浸透しているため、一定の間隔で水が浸透している。ただ、流速が速くなる分、短時間で下流側に到達してしまい水面形を細かく追うことが不可能となる。時間により刻々と変化する水面形を知る場合はある程度の流速を持つような水頭で、堤体幅も十分に長くないとはならないということが明らかになった。本実験装置における非定常流実験は、3 ケース行ったうちの水頭が 10 cm 程度ならば浸潤面を追うことができるものと考えられる。

7.2 数値解析結果

本研究に用いる解析モデルを図-9 に示す。HPM では領域分割の影響を受けないため、任意の分割を用いることができるが、本研究での領域形状は、 2.0×2.0 [cm] の 4 節点正方形を用いる。解析領域は、幅 144 [cm]、高さ 10 [cm] とし、上流側 10 [cm] の水頭を与える。ただし、幅は 48 [cm] までを比較対照とする。これは、本手法は、浸出面を不透水境界として扱っているため、解析幅を十分長く取り、浸出点を与えないようにし、比較対照は模型実験同様の幅 48 [cm] までとする。透水係数とペナルティ関数は、それぞれ $k = 0.07$ [cm/sec]、 $P = 1 \times 10^5$ を用いる。

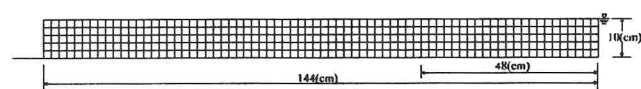


図-9 解析モデル図および領域分割図

はじめに、貯留係数 S の相違により浸透現象に及ぼす影響について検討を行った。図-10 は S を 0.04~0.07 まで変えて、48 秒後の水面高さを計算したものである。全体でみた計算結果にほとんど差異は生じていないが、上流側から 8 cm~18 cm の間で若干のずれが生じた。また、 $S = 0.04$ と $S = 0.07$ では最大 1.46% のずれがあった。貯留係数 S が大きくなるほど浸潤面の上昇は小さくなり、位相が遅れる傾向を示し、貯留係数 S の値に応じて浸潤面の進展速度が異なることがわかる。

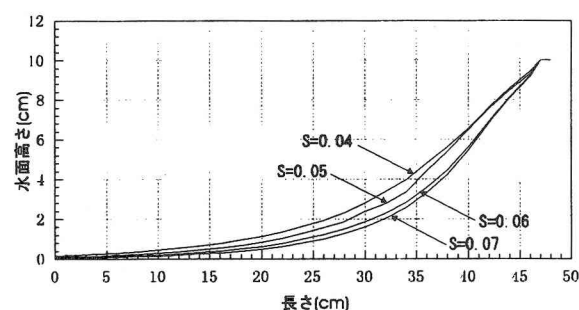


図-10 貯留係数の相違による影響

実験では、不飽和領域の働きの影響が、浸潤面上側は不飽和領域 ($0 < S_r < 100$) (ただし、 S_r は飽和度) となっている。それに対して本解析手法は、浸潤面より上側は、不飽和領域の働きの考慮をせず乾燥状態 ($S_r = 0$) と仮定している。しかし、本研究では炉乾燥状態 (飽和度が 0% に近い) の砂を使用し、中密程度の詰め具合 ($e=0.65$) であるため、貯留係数を $S=0.4$ と仮定した。図-11 は 1200 秒後の浸潤面に関して HPM と実験値を示したものである。両ケースともほぼ一致し、同時刻で同じ浸潤面を得ることができるものと思われる。

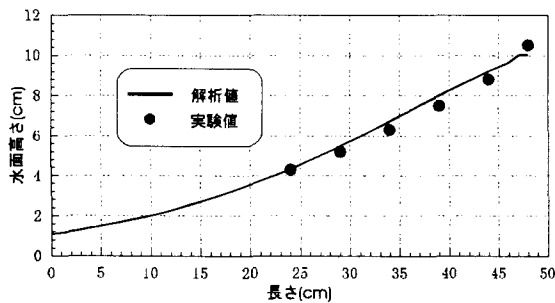


図-11 1200 秒後の解析値と実験値

8. まとめ

本研究では、時間に依存する非定常状態での土中を流れる浸透問題に対して、定常浸透流で提案した解析手法を非定常浸透流への拡張を行った。本手法は、部分領域に分割した地盤部分の分割形状を変更することなく、収束過程で求めた浸潤面を新たな積分領域と考え浸透流解析を行い、刻々と自由水面が変化する非定常浸透流問題の解析手法であり、また、非定常浸透流で必要となる時間方向の離散化には、クランク・ニコルソン法を用いた。本研究では、本手法に対しての精度を検討するために、非定常流模型実験を行い、浸潤面の形状を比較した。

実験結果は、水頭が小さい (幅 48 cm に対して上流側水頭 5 cm 以下) 場合において、動水勾配が小さくなるため、拡散的な水移動が大きくなることより、下流側付近で水面移動速度が速くなり、浸潤面を追うことが困難となった。逆に水頭が大きい (幅 48 cm に対して上流側水頭 15 cm 以上) 場合は、動水勾配が大きくなるため、水を流入してから流出されるまで時間が短くなり、細かく浸潤面を追うことが不可能となった。このように時間による浸潤面の変化を知る場合には、ある程度の水面移動速度をもつような水頭で、堤体幅も十分に長くとならなければならないということが明らかになった。

解析では、上流側 10 cm の水頭を与えた場合の実験で得られた浸潤面と HPM で得られた浸潤面の比較検討を行った。貯留係数 S の相違により浸透現象に及ぼす影響を検討するために、 S を 0.04~0.07 まで変えたところ、ほとんど差異は生じていないが、若干のずれが生じ、 $S =$

0.04 と $S = 0.07$ で最大 1.46% のずれがあった。また、 S が大きくなるほど浸潤面上昇は小さくなり位相が遅れる傾向を示し、貯留係数 S の値に応じて浸潤面の進展速度が異なることがわかった。また、HPM は浸潤面より上側を不飽和領域の影響は考慮せず乾燥状態 ($S_r = 0$) と仮定しているが、本研究では炉乾燥状態 (飽和度が 0% に近い) の砂を使用し、中密程度の詰め具合 ($e=0.65$) であるため、貯留係数を $S=0.4$ と仮定し解析を行った。その結果、両ケースともほぼ一致し、同時刻で同じ浸潤面を得ることができるものと思われる。

実用化に向けて、さらに詳細な実験や FEM 解析あるいは解析解¹¹⁾等の精度の検討を進める必要がある。また、浸出点などの第三境界を取り入れる必要がある。

参考文献

- 1) S.P. Neuman : Saturated-unsaturated seepage by finite elements, Proc. ASCE, J. Hydraul. Div. 99, (HY12), pp2233-2250, 1973
- 2) 赤井浩一, 大西有三, 西垣誠 : 有限要素法による飽和不飽和浸透流解析, 土木学会論文報告集, No.264, pp171-180, 1977
- 3) I.M. Smith and D.V. Griffiths : Programming the Finite Element Method (3rd ed.), John Wiley & Sons, 1998
- 4) 竹内則雄, 石垣智明, 武田洋, 草深守人, 佐藤一雄 : 浸透流問題における FVM と FEM の関係, 計算工学講演論文集, Vol.4, No. 1, pp153-156, 1999
- 5) G.H. Shi : Manifold method of material analysis, Transactions of 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing, Report No.92-1, U.S. Army Research Office, 1991
- 6) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄 : ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 構造工学論文集, Vol.46A, pp261-270, 2000
- 7) 竹内則雄, 大木裕久, 草深守人, 武田洋 : ペナルティ関数を用いた浸潤面を有する浸透流問題の解析手法の開発, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010019), Vol.3, pp163-170, 2001
- 8) 鷺津久一郎 : 弾性学の変分原理概論, 培風館, 1972
- 9) 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人 : ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適応した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002), Vol.3, pp53-62, 2001
- 10) I.M. Smith and D.V. Griffiths : Programming the Finite Element Method (3rd ed.), John Wiley & Sons, 1998
- 11) J. Crank : Free and Moving Boundary Problems, Oxford Science Publications, 1987

(2004 年 4 月 16 日 受付)