

はり・平板構造に対する均質化理論の適用に関する一考察

A Consideration on Application of Homogenization Theory to Beam and Plate Structures

斉木 功*, 佐野 道德**, 中島 章典***

Isao SAIKI, Michinori SANO and Akinori NAKAJIMA

*正会員 博(工) 宇都宮大学助手 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

**学生員 宇都宮大学大学院 工学研究科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

***正会員 工博 宇都宮大学大学院教授 工学研究科情報制御システム科学専攻 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

For cellular solids, exploiting its geometrical characteristics, authors have developed macroscopic continuum-microscopic frame multi-scale analysis. The planar cellular solids is subjected to out-of-plane bending as well as membrane loading when they are employed as box gabion or geogrid. In order to take the out-of-plane bending into account, we here develop a multi-scale, i.e. macroscopic thin plate-microscopic frame, method for planar cellular solids. For future extension to a class of nonlinear multi-scale analysis, we here propose a formulation based on the generalized convergence theory. To utilize the convergence theory for fourth order differential equation that is the governing equation of beam and plate, a functional which has deflection and rotation as its independent variable is defined.

Key Words : beam, plate, fourth order differential equation, planar cellular solids, multi-scale method, out-of-plane bending

1. はじめに

平面セル構造体は、面内変形において、強い異方性、座屈による不安定化などの特徴的な力学特性を有することで知られている¹⁾。このような複雑な挙動を有する材料の構成関係を現象学的に決定することは一般的には困難である。そこで著者らは、非線形均質化理論²⁾に基づき、平面セル構造体の力学特性を代表体積要素の数値解析により非現象学的にモデル化する非線形マルチスケール解析手法を提案した³⁾。さらに、代表体積要素の解析、すなわちミクロスケール問題において、骨組要素の使用を可能とすることによって、マルチスケール解析の計算効率のさらなる改善が可能であることが示された^{4),5)}。

平面セル構造体は様々な用途に使用されているが、土木工学の分野における主な応用は鋼製組立網⁶⁾や地盤補強材⁷⁾に見られる。例えばジオテキスタイルを盛土補強に用いる場合、基本的には極限解析によって求められる作用荷重により設計を行っている⁸⁾。しかしながら、適用する構造によっては、弾性解析の必要性も指摘されている。その場合、平面セル構造体の巨視的な力学特性が必要になるが、前述のように、強い異方性や非線形性のため、現象学的なモデル化には限界がある。そこで、本研究では、微視構造の大きさに比べて厚さが薄い膜状の平面セル構造体の解析を効率よく行うためのマルチスケール解析手法の開発を目的とする。

平面セル構造体が上記のような鋼製組立網や地盤補強材として用いられる場合、面内変形に加え、面外変形をも受けることとなる。このとき、面外曲げ剛性は基本的には期待されないが、いずれにしても、面内、面外の変形を同時に考慮できる解析手法が必要となる。この場合、平面セル構造体の巨視的なモデルは、面外剛性の有無により、平板もしくは膜となる。そこで、本研究で開発するマルチスケール解析手法において、微視構造を3次元骨組、巨視構造を平板としてモデル化する。

平板の支配方程式は、はりと類似の構造を有する4階の微分方程式である。平板に対する均質化理論の適用例としては、特にセル構造体を対象としてはいないが、Kohn and Vogelius⁹⁾の漸近展開法に基づく定式化、はりに対しては京谷・寺田¹⁰⁾によるやはり漸近展開法に基づく定式化が発表されている。セル構造体、あるいは格子状構造に対する均質化理論の適用は、同じく漸近展開法に基づき、Moreau and Caillerie¹¹⁾、Tollenaere and Caillerie¹²⁾によって示されている。これらの文献では、少なくとも微視問題については全て線形問題のみを扱っている。

4階の微分方程式に漸近展開法を適用する場合、2階微分方程式に対するそれと異なり、漸近展開した変位の第3項までを考慮しなければならないため¹⁰⁾、定式化が煩雑となる。また、非線形問題への拡張を考慮すると、非線形問題に対する収束性の保証および形式的で簡潔な定式化が可能となるといった利点から、一般化収束論による定式化が望ましい。そこで、本研究では、

† Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

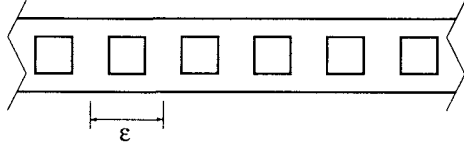


図-1 周期微視構造を有するはり

一般化変分原理により、たわみとたわみ角をそれぞれ独立変数とした汎関数を定義し、一般化収束論によるマルチスケール解析の定式化を示す。最終的な目的は、非線形マルチスケール解析の構築であるが、一般化収束論を用いた場合、定式化において線形問題、非線形問題の区別はほとんどない。したがって、本論文では、一般化収束論による定式化を焦点として、1) Bernoulli-Euler はりの線形問題、2) 微視構造を3次元骨組、巨視構造を Kirchhoff-Love の平板とする線形問題、に対する具体的な定式化を示す。また、Bernoulli-Euler はりや Kirchhoff-Love の平板といった基礎的な構造モデルの適用限界については、ここで詳しく議論するまでもないが、本論文で示す定式化を他のはり、板モデルに適用するにあたって、本質的な困難はないと考える。

最後に、2種類の具体的な平面セル構造体の微視構造を骨組要素によりモデル化し、巨視的な平板の曲げ剛性を試算する。

2. 一般化収束論によるはりの2変数境界値問題の定式化

図-1に示すような大きさ ϵ の微視構造が周期的に配置された Bernoulli-Euler はりの線形問題に対する均質化理論の適用について述べる。本論文では、一般化収束論に基づく定式化を目的とするが、最終的に導かれる2変数境界値問題が漸近展開法に基づく定式化と等価であることを示すため、京谷・寺田¹⁰⁾の漸近展開法による定式化の概要を付録Iに示した。

はりの境界値問題と等価な変分問題は、以下の汎関数

$$\pi := \int W \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - \int q w dx \quad (1)$$

を停留させる問題となる。ここに、 W はひずみエネルギー関数であり、曲げモーメント-曲率関係

$$M = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)} \quad (2)$$

を規定するものとする。

一般化 (Γ -) 収束論²⁾によると、パラメタ ϵ を持つ非凸汎関数 $\pi(v)$ は $\epsilon \rightarrow 0$ において、均質化汎関数

$$\pi^H(w) := \int W^H(\nabla_x w^0) dx \quad (3)$$

に Γ -収束する。ただし W^H は

$$W^H(\nabla_x w^0) := \inf_N \inf_{w^1} \langle W(\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1) \rangle \quad (4)$$

により定義される均質化ひずみエネルギーである。また同時に、 ∇w は $\epsilon \rightarrow 0$ において $\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1$ に収束することが知られている。ここに、 N は代表体積要素に含まれるべき単位周期構造の数、 $\langle \bullet \rangle$ は

$$\langle \bullet \rangle := \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet dY \quad (5)$$

で定義される Y における体積平均、 Y は N 個の単位周期構造 (ユニットセル) で構成される代表体積要素の領域、 w^0 はマクロスケール変位、 w^1 は代表体積要素 Y における周期性 (Y 周期性) を有するミクロスケール変位、 ∇ は勾配を取る演算子であり、この節で取り扱っている1次元場においては、 x に関する微分となる。非凸均質化理論における単位周期構造の数については、著者らの文献³⁾に譲り、ここでは線形問題のみを扱うので $N \equiv 1$ となり、すなわち代表体積要素と単位周期構造は同一のものとなる。

一般化収束論は、ひずみエネルギーに変位の1階の導関数のみが含まれる場合は問題なく適用が可能であるが、2階の導関数が含まれる場合の適用性は自明ではない。そこで、一般化変分原理を用いて、はりの境界値問題を以下の汎関数 Π

$$\begin{aligned} \Pi := & \int W \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx - \int q w dx \\ & - \int Q \left(\frac{dw}{dx} + \theta \right) dx \end{aligned} \quad (6)$$

の停留問題に変換しておく。この汎関数の独立変数は θ , w , Q であり、 Q は未定定数である。前述の汎関数 (1) との違いは、ひずみエネルギーの独立変数をたわみ角 θ とし、たわみ w とたわみ角 θ の関係を Lagrange 未定定数法により規定している点である。この汎関数 Π に対する均質化汎関数 Π^H は

$$\begin{aligned} \Pi^H = & \int W \left(\frac{d\theta^0}{dx} + \frac{d\theta^1}{dy} \right) dx - \int q w^0 dx \\ & - \int Q \left(\frac{dw^0}{dx} + \frac{dw^1}{dy} + \theta^0 \right) dx \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここに、 θ^0 , θ^1 はマクロ、ミクロスケールたわみ角、 w^0 , w^1 はマクロ、ミクロスケールたわみであり、 θ^1 および w^1 は Y 周期性を有する。この均質化汎関数の停留条件は

$$\begin{aligned} \delta \Pi^H = & \int \left\langle M^0 \left(\frac{d\delta\theta^0}{dx} + \frac{d\delta\theta^1}{dy} \right) \right\rangle dx \\ & - \int q \delta w^0 dx - \int \left\langle \delta Q^0 \left(\frac{dw^0}{dx} + \frac{dw^1}{dy} + \theta^0 \right) \right\rangle dx \\ & - \int \left\langle Q^0 \left(\frac{d\delta w^0}{dx} + \frac{d\delta w^1}{dy} + \delta\theta^0 \right) \right\rangle dx \\ = & 0 \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここに、 M^0 は

$$M^0 = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\theta^0}{dx} + \frac{d\theta^1}{dy} \right)} \quad (9)$$

なる全曲率 $\frac{d\theta^0}{dx} + \frac{d\theta^1}{dy}$ に対する曲げモーメントである。式 (8) を各独立変数の変分について整理すると

$$\int \left\langle M^0 \frac{d\delta\theta^0}{dx} - Q^0 \delta\theta^0 \right\rangle dx = 0 \quad (10)$$

$$\int \left\langle q \delta w^0 + Q^0 \frac{d\delta w^0}{dx} \right\rangle dx = 0 \quad (11)$$

$$\int \left\langle \delta Q^0 \left(\frac{dw^0}{dx} + \frac{dw^1}{dy} + \theta^0 \right) \right\rangle dx = 0 \quad (12)$$

$$\int \left\langle M^0 \frac{d\delta\theta^1}{dy} \right\rangle dx = 0 \quad (13)$$

$$\int \left\langle Q^0 \frac{d\delta w^1}{dy} \right\rangle dx = 0 \quad (14)$$

を得る。式 (10)–(12) より

$$\begin{aligned} & \int \left\langle M^0 \frac{d\delta\theta^0}{dx} - Q^0 \delta\theta^0 \right\rangle dx \\ &= \int \widetilde{M} \frac{d\delta\theta^0}{dx} - Q^0 \delta\theta^0 dx \\ &= \left[\widetilde{M} \delta\theta^0 \right]_0^\ell - \int \left(\frac{d\widetilde{M}}{dx} + Q^0 \right) \delta\theta^0 dx = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int \left\langle q \delta w^0 + Q^0 \frac{d\delta w^0}{dx} \right\rangle dx \\ &= \left[Q^0 \delta w^0 \right]_0^\ell + \int \left(q - \frac{dQ^0}{dx} \right) \delta w^0 dx = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \int \left\langle \delta Q^0 \left(\frac{dw^0}{dx} + \frac{dw^1}{dy} + \theta^0 \right) \right\rangle dx \\ &= \int \delta Q^0 \left(\frac{dw^0}{dx} + \theta^0 \right) dx + \int \delta Q^0 [w^1]_0^Y dx \\ &= \int \delta Q^0 \left(\frac{dw^0}{dx} + \theta^0 \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

が得られる。式 (17) の誘導には w^1 の Y 周期性を用いた。ここに $\widetilde{M}$ はマクロ (平均) モーメントであり、

$$\widetilde{M} := \langle M^0 \rangle \quad (18)$$

により定義した。これらより、元の問題の境界条件と

$$\frac{d\widetilde{M}}{dx} = -Q^0, \quad \frac{dQ^0}{dx} = q, \quad \frac{dw^0}{dx} = -\theta^0 \quad (19)$$

すなわち

$$\frac{d^2 \widetilde{M}}{dx^2} = q \quad (20)$$

によりマクロスケール問題が定義される。ひずみエネルギー関数 W が

$$W \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \quad (21)$$

と与えられていれば、マクロスケール釣合式 (20) は

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\langle EI \left(\frac{d^2 w^0}{dx^2} - \frac{d\theta^1}{dy} \right) \right\rangle = q \quad (22)$$

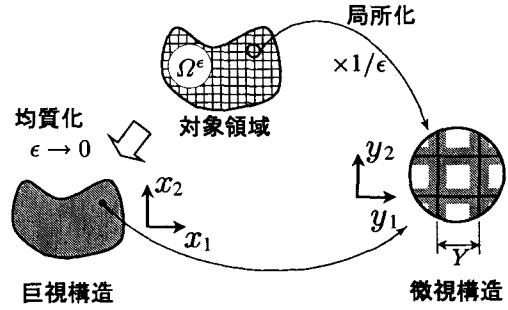


図-2 平面セル構造体

と表される。同様に、式 (13) がミクロスケール釣合式となるが、ひずみエネルギー関数が式 (21) の場合、ミクロスケール釣合式は

$$\left\langle EI \left(\frac{d\theta^0}{dx} + \frac{d\theta^1}{dy} \right) \frac{d\delta\theta^1}{dy} \right\rangle = 0 \quad (23)$$

すなわち

$$\frac{d^2}{dy^2} \left\{ EI \left(\frac{d^2 w^0}{dx^2} - \frac{d\theta^1}{dy} \right) \right\} = 0 \quad (24)$$

と表される。なお、式 (14) は Q^0 が y の関数ではないため、自動的に満たされる。ここで、ミクロスケールたわみ w^1 は式 (7) により定義される均質化汎関数 Π^H の独立変数となっているが、マクロおよびミクロスケール釣合式のいずれにも影響を及ぼさないことに注意されたい。

3. 一般化収束論による平板の2変数境界値問題の定式化

図-2に示すような大きさ ϵY ($\epsilon \ll 1$) の平面骨組が面内に周期的に配置された構造物を解析対象とする。図中、 Y として示された領域が $1/\epsilon$ を乗じることにより拡大された微視構造であり、もとの対象領域ではこの微視構造の大きさが ϵY となる。この平面構造は、Kirchhoff の仮定に従う薄肉平板¹³⁾と仮定し、中立面を含む領域を Ω 、その境界を $\partial\Omega$ とする。この解析対象に対し、前節で示した一般化収束論による2変数境界値問題の定式化を基礎として、平板の2変数境界値問題を導く。

前節と同様に、面外たわみ w とたわみ角 θ の関係

$$\theta = -\nabla w \quad (25)$$

を拘束条件とし、Lagrange 未定数法により、この拘束条件を組み込んだ汎関数 Π

$$\Pi := \int_{\Omega} W(\nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} q w d\Omega - \int_{\Omega} Q \cdot (\nabla w + \theta) d\Omega \quad (26)$$

を定義すると、平板の境界値問題はこの汎関数を停留させる問題となる。ここに、 W はひずみエネルギー関数であり、曲げモーメント-曲率関係

$$M = \frac{\partial W}{\partial \nabla \theta} \quad (27)$$

を規定するものとする。この汎関数の独立変数は θ , w , Q であり, Q は未定定数である。この汎関数 Π の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限, すなわち均質化汎関数 Π^H は

$$\begin{aligned} \Pi^H = & \int_{\Omega} W(\nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1) d\Omega - \int_{\Omega} q w^0 d\Omega \\ & - \int_{\Omega} Q \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \theta^0) d\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

となる。このとき, 曲率 $\nabla \theta$ は

$$\nabla \theta \rightarrow \nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1 \quad (29)$$

と収束することが一般化収束論により保証される。この均質化汎関数の停留条件は

$$\begin{aligned} \delta \Pi^H = & \int_{\Omega} \langle M^0 : (\nabla_x \delta \theta^0 + \nabla_y \delta \theta^1) \rangle d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w^0 d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \langle \delta Q^0 (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \theta^0) \rangle d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \langle Q^0 (\nabla_x \delta w^0 + \nabla_y \delta w^1 + \delta \theta^0) \rangle d\Omega \\ = & 0 \end{aligned} \quad (30)$$

となる。ここに, M^0 は全曲率 $\nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1$ に対する曲げモーメントである。上式を各独立変数の変分について整理すると

$$\int_{\Omega} \langle M^0 : \nabla_x \delta \theta^0 - Q^0 \cdot \delta \theta^0 \rangle d\Omega = 0 \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} \langle q \delta w^0 + Q^0 \cdot \nabla_x w^0 \rangle d\Omega = 0 \quad (32)$$

$$\int_{\Omega} \langle \delta Q^0 \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \theta^0) \rangle d\Omega = 0 \quad (33)$$

$$\int_{\Omega} \langle M^0 : \nabla_y \delta \theta^1 \rangle d\Omega = 0 \quad (34)$$

$$\int_{\Omega} \langle Q^0 \cdot \nabla_y \delta w^1 \rangle d\Omega = 0 \quad (35)$$

を得る。式 (31)–(33) より

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle M^0 : \nabla_x \delta \theta^0 - Q^0 \cdot \delta \theta^0 \rangle d\Omega \\ = & \int_{\Omega} \widetilde{M} : \nabla_x \delta \theta^0 - Q^0 \cdot \delta \theta^0 d\Omega \\ = & \int_{\partial \Omega} \delta \theta^0 \cdot n \cdot \widetilde{M} d\partial \Omega \\ & - \int_{\Omega} \left(\nabla_x \cdot \widetilde{M} + Q^0 \right) \delta \theta^0 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle q \delta w^0 + Q^0 \cdot \nabla_x w^0 \rangle d\Omega \\ = & \int_{\partial \Omega} \delta w^0 n \cdot Q^0 d\partial \Omega \\ & + \int_{\Omega} (q - \nabla_x \cdot Q^0) \delta w^0 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle \delta Q^0 \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \theta^0) \rangle d\Omega \\ = & \int_{\Omega} \delta Q^0 \cdot (\nabla_x w^0 + \theta^0) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \delta Q^0 \cdot \left(\frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} n w^1 d\partial Y \right) d\Omega \\ = & \int_{\Omega} \delta Q^0 \cdot (\nabla_x w^0 + \theta^0) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

が得られる。式 (38) の誘導には w^1 の Y 周期性を用いた。ここに, ∂Y は代表体積要素 Y の境界, n は単位外向法線ベクトル, $\widetilde{M}$ はマクロ (平均) モーメントであり,

$$\widetilde{M} := \langle M^0 \rangle \quad (39)$$

により定義した。これらより, 元の問題の境界条件と

$$\nabla_x \cdot \widetilde{M} = -Q^0, \quad \nabla_x \cdot Q^0 = q, \quad \nabla_x w^0 = -\theta^0 \quad (40)$$

すなわち

$$\nabla_x \nabla_x : \widetilde{M} = -q \quad (41)$$

によりマクロスケール問題が定義される。同様に, 式 (34) よりミクロスケール釣合式

$$\langle M^0 : \nabla_y \delta \theta^1 \rangle = 0 \quad (42)$$

すなわち

$$\nabla_y \nabla_y : M^0 = 0 \quad (43)$$

が得られる。なお, 式 (35) は Q^0 が y の関数ではないため, 自動的に満たされる。ミクロスケール問題 (43) は実変形 (マクロ, ミクロ両スケールでの変形の和) に起因する内力の自己釣り合い式となっており, 平面セル構造体の面内ミクロスケール問題と形式的に一致する。

実変形に起因する内力の自己釣り合い問題については, 著者らの面内ミクロスケール問題と同様に, マクロ変形 (曲率) に相当する相対変位 (ここでは回転角) を境界条件として解析を行う。式 (29) で表される全曲率をミクロスケール y により積分することにより, 代表体積要素における面内問題の実変位に相当する実回転角 λ は

$$\lambda(x, y) = \{ \nabla_x \theta^0(x) \} \cdot y + \theta^1(x, y) \quad (44)$$

と表される。ミクロたわみ角 θ^1 の Y 周期性

$$\theta^1(x, y + Y_i) = \theta^1(x, y) \quad (45)$$

より, 代表体積要素両端における相対回転角は

$$\lambda^1(x, y + Y_i) - \lambda^1(x, y) = \{ \nabla_x \theta^0(x) \} \cdot Y_i \quad (46)$$

となる。ここに, $Y_i (i = 1, 2)$ は代表体積要素の基本周期ベクトルである。このマクロ曲率に相当する相対回転角を代表体積要素に与えることで, その応答としてマクロ曲げモーメントが算出可能となる。

マクロ曲げモーメントは式 (39) で代表体積要素内の体積平均として既に与えられているが, ミクロ構造が本報告で対象としているような骨組構造の場合は, 境界積分で表された方が都合がよい。著者らの文献⁵⁾に倣い,

Gauss の発散定理を利用すると、マクロ曲げモーメント $\widetilde{\mathbf{M}}$ は

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \mathbf{y} \otimes \{ \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} d\partial Y \quad (47)$$

と表すことができる。

4. 面外変形を含む平面セル構造体のミクロスケール解析

図-3 に示す正方形セル構造体に対して行った線形ミクロスケール解析の結果を以下に示す。セルを構成する骨組を幅、高さ 1 の正方形断面の Bernoulli-Euler はりとし、基本周期ベクトルを $\mathbf{Y}_1 = \{50, 0\}$, $\mathbf{Y}_2 = \{0, 50\}$, Young 率を 1, 要素数は単位周期構造あたり 20 とした。ここで、マクロ曲げモーメントとマクロ曲率の関係を

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{M}_{11} \\ \widetilde{M}_{22} \\ \widetilde{M}_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^H \cdot \begin{Bmatrix} (\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{11} \\ (\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{22} \\ (\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{12} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

と関係付けるマトリクス $\mathbf{D}^H$ を均質化曲げ剛性と定義する。この均質化曲げ剛性は、マクロ曲率の各成分が

$$\begin{Bmatrix} (\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{11} \\ (\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{22} \\ (\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

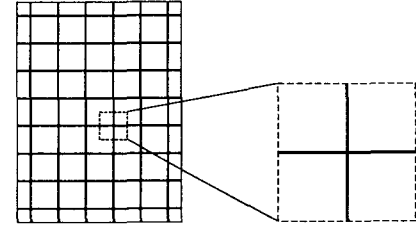
となるような 3 つの基本モードに対する曲げモーメントとして求めることができ、この正方形セルに対するそれは

$$\mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 1.68 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.68 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.84 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad (50)$$

となった。この均質化曲げ剛性には、一様断面、一定板厚の平板の曲げ剛性に見られるような構成材料の Poisson 比は含まれていない。これは、微視構造の厚さがその大きさに比べて薄いことに起因する。つまり、巨視的に薄板と考えられる平面セル構造体において、曲げにおける構成材料の Poisson 効果の影響と、面内変形におけるセル構造体の巨視的な Poisson 効果の影響とは分けて考える必要がある。

3 つの基本モードのうち、 $(\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{11} = 1$ なる y_2 軸まわりの一様曲げ、 $(\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{12} = 1$ なる一様ねじりに対する微視構造の変形モードをそれぞれ図-4, 5 に示す。ただし、これらの変形モード図においては、変形を見やすくするために、 4×4 個の単位周期構造を用いた場合の結果を用いた。また、同図においては、 y_1, y_2, y_3 に対応する座標軸が X, Y, Z として示されている。図中の矢印は各節点の回転をベクトルとして図示している。

次に、図-6 に示す正六角形セル構造体に対して同様のミクロスケール解析を行った。一様変形を仮定した非線形ミクロスケール解析の結果を以下に示す。セルを構



(a) 正方形セル構造体 (b) 単位周期構造

図-3 正方形セル構造体とその単位周期構造

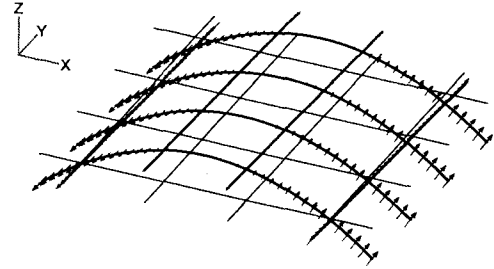


図-4 正方形セル構造体微視構造の変形形状 $(\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{11}$

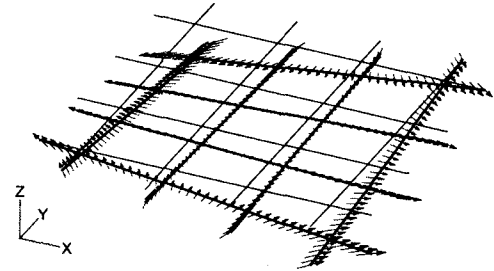


図-5 正方形セル構造体微視構造の変形形状 $(\nabla_x \boldsymbol{\theta})_{12}$

成する骨組の断面および材料の Young 率は前述の正方形セル構造体と同じにし、基本周期ベクトルを $\mathbf{Y}_1 = \{15.9, 0\}$, $\mathbf{Y}_2 = \{7.93, 13.7\}$, 要素数は単位周期構造あたり 24 とした。この正六角形セル構造体の均質化曲げ剛性 $\mathbf{D}^H$ は

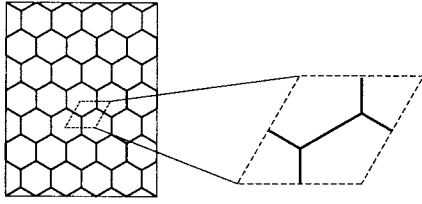
$$\mathbf{D}^H = \begin{pmatrix} 5.26 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5.26 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 2.63 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad (51)$$

となった。3 つの基本モードに対する微視構造の変形モードをそれぞれ図-7, 8, 9 に示す。ただし、これらの変形モード図においても、 4×4 個の単位周期構造を用いた場合の結果を用いた。

5. おわりに

支配方程式が 4 階微分方程式となるはり、平板に対する均質化理論の適用を、一般化収束論によって行った。導かれた 2 変数境界値問題のうち、ミクロスケール問題を一様変形および周期変形に起因する全回転角により

付録 I 漸近展開法によるはりの2変数境界値問題の定式化



(a) 正六角形セル構造体 (b) 単位周期構造

図-6 正六角形セル構造体とその単位周期構造

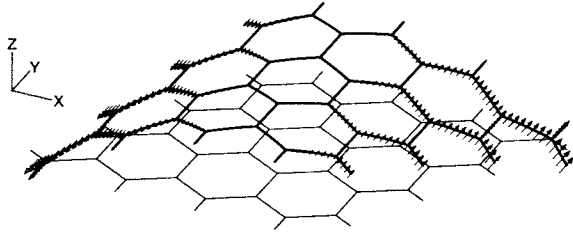


図-7 正六角形セル構造体微視構造の変形形状 $(\nabla_x \theta)_{11}$

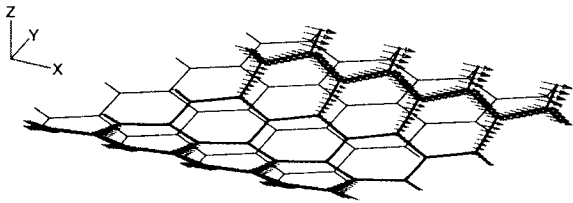


図-8 正六角形セル構造体微視構造の変形形状 $(\nabla_x \theta)_{22}$

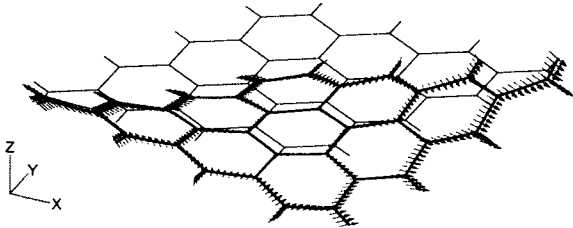


図-9 正六角形セル構造体微視構造の変形形状 $(\nabla_x \theta)_{12}$

表示し、一様変形による相対回転角を境界条件とし、その応答としての平均モーメントが内力モーメントの境界積分で与えられることを示した。これにより、平板の微視構造を平板のみならず骨組によりモデル化することが可能となった。次いで、金網やジオグリッドなどのような平面セル構造体の微視構造を骨組によりモデル化し、平板としての平均化曲げ剛性を具体例として示した。本論文で示したはり、平板の境界値問題は線形問題であるが、一般化収束論の適用性が示されたことによって、それらの非線形問題に対する均質化理論の適用の可能性が見出された。

図-1に示すような大きさ ϵ の微視構造が周期的に配置されたはりに対する漸近展開法に基づく均質化理論の適用と定式化¹⁰⁾の概要を示す。

解析領域全体の尺度である x をマクロスケールと呼び、これに対して、微視構造での尺度としてミクロスケール $y = x/\epsilon$ を導入しておく。たわみを w 、仮想変位を δw 、曲げ剛性を EI 、分布荷重を q とすれば、曲げに関する弱形式の支配方程式は

$$\int \frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int \delta w q dx + (\text{境界項}) \quad (\text{I.1})$$

と表される。たわみ w を

$$w = w^0(x) + \epsilon w^1(x, y) + \epsilon^2 w^2(x, y) + \dots \quad (\text{I.2})$$

と漸近展開する。仮想変位 δw についても同様に漸近展開する。微分の連鎖則

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} + \epsilon^{-1} \frac{d}{dy} \quad (\text{I.3})$$

を考慮すると、たわみ角および曲率は

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw^0}{dx} + \frac{dw^1}{dy} + \epsilon \left(\frac{dw^1}{dx} + \frac{dw^2}{dy} \right) + \dots \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \epsilon^{-1} \frac{d^2 w^1}{dy^2} + \frac{d^2 w^0}{dx^2} + \frac{d^2 w^2}{dy^2} + 2 \frac{d^2 w^1}{dx dy} + \dots \quad (\text{I.5})$$

と表される。標記の簡略化のため、曲率を ϵ のオーダーごとに

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \epsilon^{-1} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{-1} + \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^0 + \epsilon \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^1 + \dots \quad (\text{I.6})$$

と表すこととする。

上記たわみ仮想曲率および曲げモーメントを弱形式の釣合式に代入し、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考え、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x, x/\epsilon) d\Omega = \int_{\Omega} \langle \varphi(x, y) \rangle d\Omega \quad (\text{I.7})$$

なる公式を適用すると、 ϵ の各次数に関する以下の恒等式

$$\begin{aligned} & \int \left\langle \epsilon^{-2} \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^{-1} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{-1} \right. \\ & \quad + \epsilon^{-1} \left\{ \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^0 EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{-1} \right. \\ & \quad \quad \left. + \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^{-1} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^0 \right\} \\ & \quad + \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^0 EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^0 \\ & \quad + \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^1 EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^{-1} \\ & \quad \left. + \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right)^{-1} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^1 + \dots \right\rangle dx \quad (\text{I.8}) \end{aligned}$$

を得る.

上記, 仮想仕事式の ϵ の -2 乗の項から

$$\frac{dw^1}{dy} = 0 \quad (\text{I.9})$$

が得られるため¹⁰⁾, たわみ角および曲率は

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw^0}{dx} \quad (\text{I.10})$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2w^0}{dx^2} + \frac{d^2w^2}{dy^2} \quad (\text{I.11})$$

と簡略化される. さらに, 仮想仕事式の ϵ の 0 乗の項から, ミクロスケール問題

$$\left\langle \frac{d^2\delta w^2}{dy^2} EI \left(\frac{d^2w^0}{dx^2} + \frac{d^2w^2}{dy^2} \right) \right\rangle = 0 \quad (\text{I.12})$$

およびマクロスケール問題

$$\int_{\Omega} \frac{d^2\delta w^0}{dx^2} \left\langle EI \left(\frac{d^2w^0}{dx^2} + \frac{d^2w^2}{dy^2} \right) \right\rangle d\Omega - (\text{境界項}) = 0 \quad (\text{I.13})$$

を得る.

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F.: *Cellular solids 2nd ed.*, Cambridge University Press, 1997.
- 2) Allaire, G.: Mathematical approaches and methods, in: Hornung, U. ed., *Homogenization and Porous Media*, Springer, New York, pp.225-250, 1996.
- 3) Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori, M.: Appropriate number of unit cells in a representative volume element for microstructural bifurcation encountered in a multi-scale modeling, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.191, pp.2561-2585, 2002.
- 4) 大植 健, 斉木 功, 寺田賢二郎, 中島章典: 骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング, 土木学会論文集, No.724/I-62, pp.249-256, 2003.
- 5) 斉木 功, 大植 健, 寺田賢二郎, 中島章典: 非均質化理論に基づく骨組要素を用いたセル構造材料のマルチスケール解析, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.69, No.680, pp.786-793, 2003.
- 6) 阿部和久, 小嶋里志, 深谷克幸: 鋼製組立網に用いられる金網の面外変形解析, 構造工学論文集, Vol.47A, pp.147-154, 2001.
- 7) Peng, F.-L., Kotake, N., Tatsuoka, F., Hirakawa, D. and Tanaka, T.: Plane strain compression behaviour of geogrid-reinforced sand and its numerical analysis, *Soils and Foundations*, Vol.40, No.3, pp.55-74, 2000.
- 8) ジオテキスタイル補強土工法普及委員会編集: ジオテキスタイルを用いた補強土の設計・施工マニュアル, 土木研究センター, 1993.
- 9) Kohn, R. V. and Vogelius, M.: A new model for thin plates with rapidly varying thickness, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.20, No.4, pp.333-350, 1984.
- 10) 京谷孝史, 寺田賢二郎: 周期構造を有する梁構造物への均質化法の適用, 応用力学論文集, Vol.1, pp.185-194, 1998.
- 11) Moreau, G. and Caillerie, D.: Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis, *Comput. Struct.*, Vol.68, pp.181-189, 1998.
- 12) Tollenaere, H. and Caillerie, D.: Continuous modeling of lattice structures by homogenization, *Adv. Eng. Software*, Vol.29, pp.699-705, 1998.
- 13) 半谷裕彦: 平板の基礎理論, 彰国社, 1995.

(2004 年 4 月 16 日 受付)