

解析的手法を利用した複合材料有限要素の 確率有限要素法への応用と最適化の試行

An application of a semi-analytical finite element of composite materials
to the Stochastic FEM and to an optimization of microstructures of materials

費川拓*・河原佳武**・岩熊哲夫***・王峰****

NIEKAWA Taku, KAWARA Yoshitake, IWAKUMA Tetsuo and WANG Feng

*正会員 修(工) 新日鉄

**学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

****東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

Taking advantage of a semi-analytical finite element, we apply it to the Stochastic FEM in order to show its applicability of sensitivity analyses of micro-structures of composites. As an example, a rock slope reinforced by rock bolts is modeled by a composite material, and interaction of resisting stresses and densities of rock bolts is examined by the present method. One kind of optimization based on the results is tried to determine a suitable densities of rock bolts. The similar optimization is demonstrated for a beam of fiber-reinforced concrete to show another possibility of the present method in designing structures of composite materials.

Key Words : *composites, Mori-Tanaka theory, stochastic finite element, optimization*

1. はじめに

近年、まだ大変高価ではあるが、例えば鋼繊維で超高強度高流動コンクリートを補強した「ダクトル(商品名:わが国では太平洋セメントがライセンスを保有)」を用い、無筋で歩道橋を架設するといった実績^{1),2),3)}がある。繊維補強材に代表される複合材料は、この例のように脆性材料の高靱性化が可能であり、剛性や強度のみならず耐久性・耐震性の向上につながる。昨年には土木学会で、複合材料についての展望の出版⁴⁾もなされる等、種々の観点から注目されている材料である。

その製造に当たっては、例えば繊維混入の高流動コンクリートの打設時には、そのやり方によっては繊維の方向が一定の向きに揃うこともあるし、また逆に繊維同士がぶつかり合って力学的に望ましくない方向を向くこともある。逆に考えると、打設手法によっては繊維の向きをある程度は制御できると考えても良いだろう。この事実を踏まえると、材料の設計に当たって繊維の向きや含有率についての何らかの最適な組み合わせを予測しておくことは重要になる。施工に深く関係するため、理論的な解析だけで最適な組み合わせを決定することはできないだろうが、少なくともある程度狭い幅で適切な組み合わせの可能性が求められていれば、実際に実験による確認の省力化・低コスト化が図れ、また均質化法⁵⁾のような非常に有効な数値的手段を用いた最適化によって終局強度までを含む最終的な最適解⁶⁾を求める際の、モデル

とデータの作成の補助にはなる。

我々は、こういった複合化効果の設計段階での概算的把握に適するように、複合材料特性の解析的な平均化手法と、数値的な有限要素法との組み合わせを提案⁷⁾した。まだ弾性範囲だけではあるが、剛性行列を、複合材料を構成している第二相(以下、介在物と略す)の形状と含有率とその向きを陽に含んだ式として定義できる。これを用いることによって、介在物の幾何的因子と材料中での体積比率が全体の境界値問題に及ぼす影響を、数値的に把握することができる。電子部品や機械部品とは異なり、橋梁等のインフラ構造の部材の設計においては、断面内の複合化(合成構造)と長手方向の複合化(混合構造)の組み合わせに対しても、適材適所の材料設計が望まれるが、本手法は有限要素法に組み込まれているために、複合材料でできた部材の境界値問題全体の挙動に及ぼす、材料の微視構造の影響を数値予測できる。さらに数値的な均質化法と異なり、微視構造の効果を解析的に表現できているため、例えば剛性の摂動を求め易い利点もある。

提案⁷⁾では、解析的な平均化手法として森・田中理論⁸⁾を利用したものを用いたが、それ以外の、例えば古典的な Voigt や Reuss のモデルでも同様のことが可能である。もちろんそれらの古典理論よりも優れている手法は多々存在し、例えば設計の初期段階で利用することを念頭に置けば、Hashin と Shtrikman⁹⁾の上下界を利用することは有意義であろう。また合金等も扱った

めには、Hill 等の self-consistent 法¹⁰⁾の利用も有効であろう。しかしこの論文では、簡単のために今までの提案⁷⁾をそのまま用いて、設計段階を想定して、まず確率有限要素法¹¹⁾に適用する。その結果を踏まえて最適化の試行をする。近年、同様の考えと損傷理論を組み込んだ有限要素の利用が、弾塑性体に対しても行われている¹²⁾ようだが、本研究で着目している設計や感度解析という観点からは議論されていない。

なお、ここで用いている解析的手法は主に金属ベースの複合材料に適用されてきた。実際には介在物の界面には析出物が存在するため、微視的な挙動は非常に複雑にはなるが、設計の目安といった観点からは、その解析的手法もある程度成功して用いられている。インフラ構造物のように非金属の脆性材料の場合には、介在物として用いられる繊維は内部の微視亀裂のブリッジングを目的としているため、その作用そのものは破壊力学的なものも厳密には考慮しなければならないと予想される。しかし、特にコンクリートの場合は微視亀裂が通常の使用で生じていることが前提であろうから、使用中は繊維がコンクリートに付着した上で補強作用を発揮していると考えてよいだろう。そういう状態を模擬し、初期設計の範囲で目安を得るために使うという前提の下で、このような解析的手法も利用できるのではないかと考え、ここに提案している。

2. 平均弾性係数と剛性行列

2.1 森・田中理論を用いた平均弾性係数

ここで応用したい確率有限要素法で従来行われていた手法との対比を明確にするために、最初に古典論の Voigt モデルによって平均弾性係数をモデル化した場合を想定して取り上げる。このモデルは複合材料の例えば 2 相材料を並列に配置することによって、その平均的な抵抗則を求めたものである。例えば母材と介在物のせん断弾性係数を μ_M , μ_I とした場合に、介在物の体積比率が f であれば、Voigt モデルの平均せん断弾性係数は

$$\bar{\mu} \equiv (1-f)\mu_M + f\mu_I \quad (1)$$

で与えられる。確率有限要素法では、構成する材料のヤング率が確率変動する場合に、強度や変形に及ぼす影響を求める方法が、例えば文献¹¹⁾には具体的に記述されている。上式の表現に対しても同じ方法を用いれば、介在物の体積比率 f の確率変動に伴う、全体の強度や変形の変動を予測することができる。それは見かけ上のせん断弾性係数 $\bar{\mu}$ が上式のように、 f の陽な表現になっているため、剛性行列の f についての摂動も容易に求めることができるからである。

我々の提案手法⁷⁾では、この Voigt モデルよりもより実験値に近い手法を用いているが、それは森・田中の考え方⁸⁾を利用したものである。具体的な誘導過程は付

録 I に示したが、等方弾性体中に等方弾性な楕円体介在物（形状の三主軸の半径を a_1 , a_2 , a_3 と記す）が分布している場合、複合材料全体の平均弾性係数テンソル $\bar{C}$ が

$$\bar{C} = C_M \{C_M - (1-f)(C_M - C_I)S\}^{-1} [C_M - (C_M - C_I)\{S - f(S - I)\}] \quad (2)$$

で得られる。ここに f は介在物の占める体積比率であり、 I は 4 階の単位テンソルである。また C_M と C_I はそれぞれ、母材と介在物の弾性係数テンソルで

$$(C_{ijkl})_\alpha = \mu_\alpha (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda_\alpha \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3)$$

と表される。ここに、 μ と λ は Lamé の定数で、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。添え字 α は母材なら M で介在物なら I になる。

この式 (2) で、 S は Eshelby のテンソル^{13),14)}と呼ばれ、無限体の母材中に一個の介在物が存在している場合の非適合ひずみと内部の乱れひずみとの関係を表す係数である。ここで対象としているような等方弾性体中の楕円体介在物のみを扱う限りは、 S は母材のポアソン比と介在物の半径比と介在物形状主軸の向きだけで決まる量になる。例えば x_3 方向に無限に長い楕円柱 ($a_3 = \infty$) の場合の、このテンソルの一つの成分は

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu_M)} \left\{ \frac{\eta^2 + 2\eta}{(1+\eta)^2} + (1-2\nu_M) \frac{\eta}{1+\eta} \right\} \quad (4)$$

と¹⁴⁾なる。ここに ν_M は母材のポアソン比で、 η は楕円柱断面の半径比 $\eta \equiv \frac{a_2}{a_1}$ である。

例えば球形介在物 ($a_1 = a_2 = a_3$) の場合には、式 (2) から得られるせん断弾性係数 $\bar{\mu}$ は例えば

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_M} = \frac{[(1-f)\mu_M + f\mu_I] - \beta(1-f)(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M - \beta(1-f)(\mu_M - \mu_I)} \quad (5)$$

となる。ただし $\beta \equiv \frac{2(4-5\nu_M)}{15(1-\nu_M)}$ であり、これがテンソル S のせん断に関する成分である。上式の右辺の分子第一項 $[\dots]$ と式 (1) を比べれば明らかなように、 $\beta = 0$ であれば Voigt モデルに一致するが、 β によって介在物を含む無限体のつり合い式等を考慮しているため、それよりも複雑な形をしている。しかし式 (1) と同様、 f についての陽な式であるため、確率有限要素法への適用に当たって、その f による剛性の摂動を求めることは比較的容易である。近年、ここで用いている森・田中理論に基づく平均化の高精度化¹⁵⁾も行われている。その場合は式 (5) の分子・分母に f の二次項が含まれ、表現が複雑にはなるが、剛性の摂動は容易に求められる。

2.2 平面ひずみ有限要素と確率有限要素法

式 (2) の平均弾性係数を用いて、複合材料全体の平均的な応力とひずみの関係は

$$\bar{\sigma} = \bar{C}\bar{\epsilon} \quad (6)$$

となるので、我々はこれを一有限要素内あるいは要素内の積分点での弾性係数⁷⁾とみなす。つまり要素剛性行列の一般形を要素領域 Ω 内で

$$\mathbf{k} \equiv \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{N} dV \quad (7)$$

と定義する。ここに $\mathbf{N}$ は変位関数であり、 $\boldsymbol{\sigma}$ は適切にひずみを定義するための微分作用素である。ただ我々の提案はまだ基礎的な段階にあるので、簡単のために対象は平面ひずみ状態にあるものとし、介在物はこの平面内に楕円断面を持つ無限の楕円柱の場合のみに限定し、要素は定ひずみ三角形要素とする。また、さらに簡単のために、ひとつの要素は一種類の介在物しか含まないものとする。実際の演算で必要になる種々のテンソル演算は、すべてのテンソルが対称テンソルであることから、文献¹⁶⁾にある方法を用い、行列計算で代用している。

また、森・田中理論を用いた平均化においては、要素内の平均応力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ によって母材中と介在物中の平均応力も

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_M &= \left[\mathbf{I} + f \mathbf{C}_M (\mathbf{S} - \mathbf{I}) \{ \mathbf{C}_M - (\mathbf{C}_M - \mathbf{C}_I) \mathbf{S} \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{C}_M - \mathbf{C}_I) \mathbf{C}_M^{-1} \right]^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\sigma}_I &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{C}_M (\mathbf{S} - \mathbf{I}) \{ \mathbf{C}_M - (\mathbf{C}_M - \mathbf{C}_I) \mathbf{S} \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{C}_M - \mathbf{C}_I) \mathbf{C}_M^{-1} \right] \boldsymbol{\sigma}_M \end{aligned} \quad (8)$$

と求められる。すなわち、各相を有限要素分割せずに各相の平均場の計算ができる。この簡便さが本手法の大きな利点であるが、あくまでも近似の平均場のみしか求められないことに注意する必要がある。

2.3 確率有限要素法への応用

この要素の確率有限要素法への応用は、剛性行列を介在物の体積比率 f 等によって微分する段階で *Mathematica* のようなツールが必要なことを除けば、文献¹¹⁾にある手法がそのまま使える。実際に、そういったツールを用いて直接コーディングをしたため、ここに特に示すべき方程式類は無い。変動させる変数は、その設定された値を中心とした正規分布関数で与えられるものとする。例えば介在物の体積比率 f が f_0 と設定されている場合、その変動は

$$f = f_0 (1 + \alpha)$$

で与えられ、 α が期待値零の確率変数で、その確率密度関数を

$$f_A(\alpha) = \frac{1}{\sigma_F \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_F^2} \right)$$

と与える。ここに σ_F は体積比率変動の標準偏差である。また精度については、文献¹¹⁾にある第二次摂動までの範囲で、確率変動の影響を観察する。なお、求められた応力値の確率密度関数は、応力そのものの次元のあ

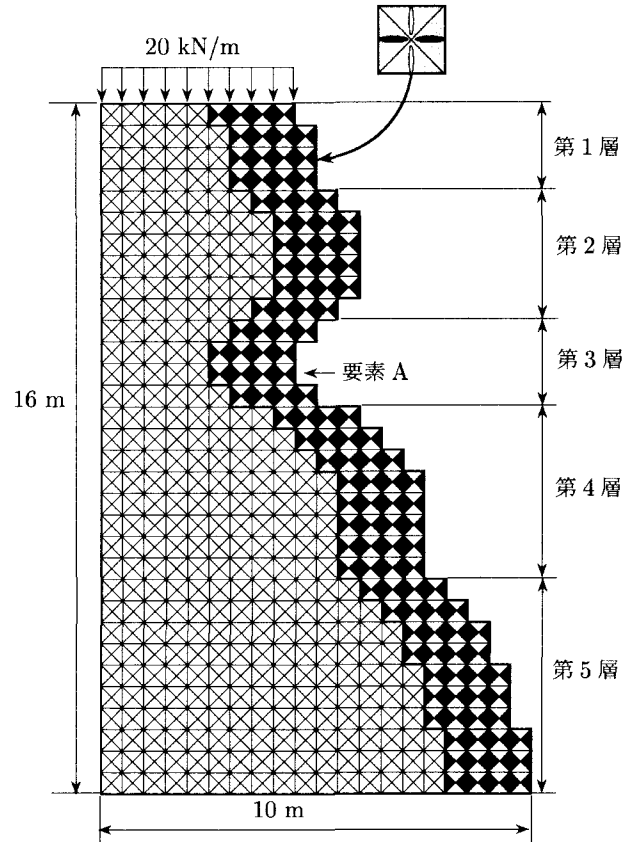


図-1 対象とする崖のモデル

る変動範囲で上式の α そのものの確率密度関数を正規化¹¹⁾し

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{f_A(\alpha)}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \alpha} \right|}$$

で求めている。したがって、以下のプロットの縦軸の数値はあまり意味が無いが、絶対値には関心が無く、確率密度関数同士あるいは個々の分布形状が重要なので、相対的な比較は可能である。

3. 岩の崖のロックボルト補強例

3.1 ロックボルト密度変動の影響評価

構造に複合材料を用いた例は、次節の最適化の試行のところで示す。ここでは均質化法で最適化を試みた文献¹⁷⁾を参考にして、まず確率有限要素法の利用例を示す。対象は、図-1に示したような高さ 16 m で法面下端から深さ（奥行き）10 m の部分までの範囲の崖とする。これを図示したような 1788 の定ひずみ三角形要素でモデル化した。安山岩でできているとして、その比重を 26.8 kN/m³ とした自重を全節点に作用させた。それ以外の外力は、天端の 20 kN/m の分布荷重だけである。これは文献¹⁷⁾の外力の 50 分の一であるが、ここでは終局強度を特に意識したわけではなく、弾性解析に留

表-1 各層の平均 $\sqrt{J_2}$ 値

層	1	2	3	4	5
$\sqrt{J_2}$ (kPa)	25.2	48.2	143.1	87.3	72.4

めた手法であることから、この程度の値としただけで、数値には特に意味は無い。材料定数も文献¹⁷⁾の値を丸めたもので与え、安山岩のヤング率とポアソン比を $E_M = 40$ GPa, $\nu_M = 0.2$ とし、ロックボルトは $E_l = 200$ GPa, $\nu_l = 0.3$ とした。境界条件は左下の角のみ上下左右方向を固定し、左辺は左右方向固定、底辺は上下方向固定とした。

図中の黒い部分の要素は、安山岩をロックボルトで補強した部分を想定し、安山岩を母材とし、ボルトは水平方向に楕円半径比が $\eta = 30$ の介在物として体積比率 10% で配置した。文献^{17),18)}によると、ロックボルトは通常径 $\phi = 25$ mm 程度のものを使用し、その打設間隔は 0.5 ~ 2.5 m となっているが、ここでの体積比率はそれにほぼ相当している。それ以外の図中の白い部分は、空隙（節理）が存在する安山岩を想定し、安山岩を母材として、 $E_l = 0$ GPa のヤング率を持つ空隙が鉛直方向に楕円半径比が $\eta = 50$ の介在物として体積比率 1% で配置されているものとした。図-1 の右上の拡大図がこの状況を示している。図の黒い部分がロックボルトで白い部分が空隙であり、灰色の部分が安山岩である。

ここでは、ロックボルトを最適な配置にすることを念頭に置き、ある間隔（比率）でロックボルトを配置したときに、その配置の変動に対する危険度への影響を、確率有限要素法で概算する。それによって、ロックボルトの配置の設計変更に対する感度解析をしたことになり、例えばその後に最適化をするような場合のひとつの情報にはなると考えられる。ここでは簡単のために、対象とする崖を図-1 に示した 5 つの層に分け、それぞれの層ごとの感度の違いを確率有限要素法で調べる。

最初に、上述の作用外力の元で生じた応力のうち、ロックボルトが配置されている要素に生じた応力の平均値で算定した $\sqrt{J_2}$ 値（偏差応力の第二不変量）を表-1 に示した。ここでは強度の目安として J_2 を用いており、この値を以下「危険度」と呼ぶ。この表から、すべての部分に同じ間隔でロックボルトを打設した状態では、第 3 層が危険な状態に最も近い。この第 3 層の中でも最も大きな $\sqrt{J_2}$ 値となる要素を記号 'A' で、図-1 中に記した。以下、この要素 'A' の危険度 $\sqrt{J_2}$ 値が、各層のボルト密度の確率変動に対してどのように変動するかについてまとめる。

まず初めに、全ての層のロックボルトの体積比率を、標準偏差 $\sigma_F = 0.2$ の正規分布で変動させた場合の、要素 'A' の危険度 $\sqrt{J_2}$ 値の変動を示したのが、図-2 の

表-2 要素 'A' の $\sqrt{J_2}$ 値変動の標準偏差 σ_{J_2}

変動させる層	全体	1	2	3	4	5
$\sigma_{J_2} (\times 10^{-4})$	52	1.0	3.1	55	2.1	1.2

上段左端の図である。図の横軸は要素 'A' の $\sqrt{J_2}$ の変動値を、通常的確定的な有限要素解 $\sqrt{J_2}^{FEM}$ で正規化してある。この場合の $\sqrt{J_2}$ 値の変動の標準偏差は $\sigma_{J_2} = 0.0052$ であった。確定的な有限要素解は、 $\sqrt{J_2}$ の確率変動の期待値よりも若干ではあるが小さく、また変動のピークよりは大きい。実際の工事を想定してボルトの間隔が設計上指示された値前後に変動していたとすると、期待値が確定的有限要素解よりも大きいということは、実際に生じ得る応力が設計段階での有限要素解よりも若干ながら大きくなることを意味し、多少危険であることがわかる。また分布形状において J_2 が大きくなる方への裾野が長いことは、やはり確定的有限要素解はやや危険側の予測をする可能性があることを示している。分布がこのように非対称になるのは、式 (5) の例を見ても明らかのように、本手法で予測される平均剛性が、介在物の体積比率に関して線形ではないことがひとつの理由である。すなわち、もし Voigt のモデル式 (1) を用いた場合には、剛性の二次摂動が存在せず、このような非対称分布にはならないが、本モデルの場合にはその二次摂動によって、応答分布の非対称性が得られている。このように、ある与えられた境界値問題において、設計で用いる確定的な有限要素解等がどのような特性を持つかを知るためにも、確率有限要素法はひとつの便利な手法になると考える。

次に、全体ではなく、各層ごとのボルト密度を変動させる。上述の場合と同様に、各層のボルト体積比率を標準偏差 $\sigma_F = 0.2$ の正規分布で変動させた場合の、要素 'A' の危険度 $\sqrt{J_2}$ 値の変動を求めた。その結果をまとめたのが図-2 の残りの 5 つの図である。比較が容易になるように、図の横軸のスケールはすべて同じにしてある。またそれぞれの場合の、要素 'A' の $\sqrt{J_2}$ 値変動の標準偏差 σ_{J_2} をまとめたのが表-2 である。

当然、注目した要素 'A' を含む第 3 層のボルト密度を変動させたときの J_2 の確率変動の程度が最も大きくなっている。標準偏差値で、全体のボルト密度が変動している場合とはほぼ同様の $\sigma_{J_2} = 0.0055$ であった。また変動分布も非対称になっているが、これは前述の平均剛性の特性によるものと、境界値問題として他の層との相互作用にも原因があるのではないだろうか。つまり、全体の材料を変動させたときの標準偏差と、この第 3 層だけの変動の場合の標準偏差との差に、境界値問題として相互作用が含まれていると思われる。

それ以外の場合は、注目している層のすぐ上の第 2 層

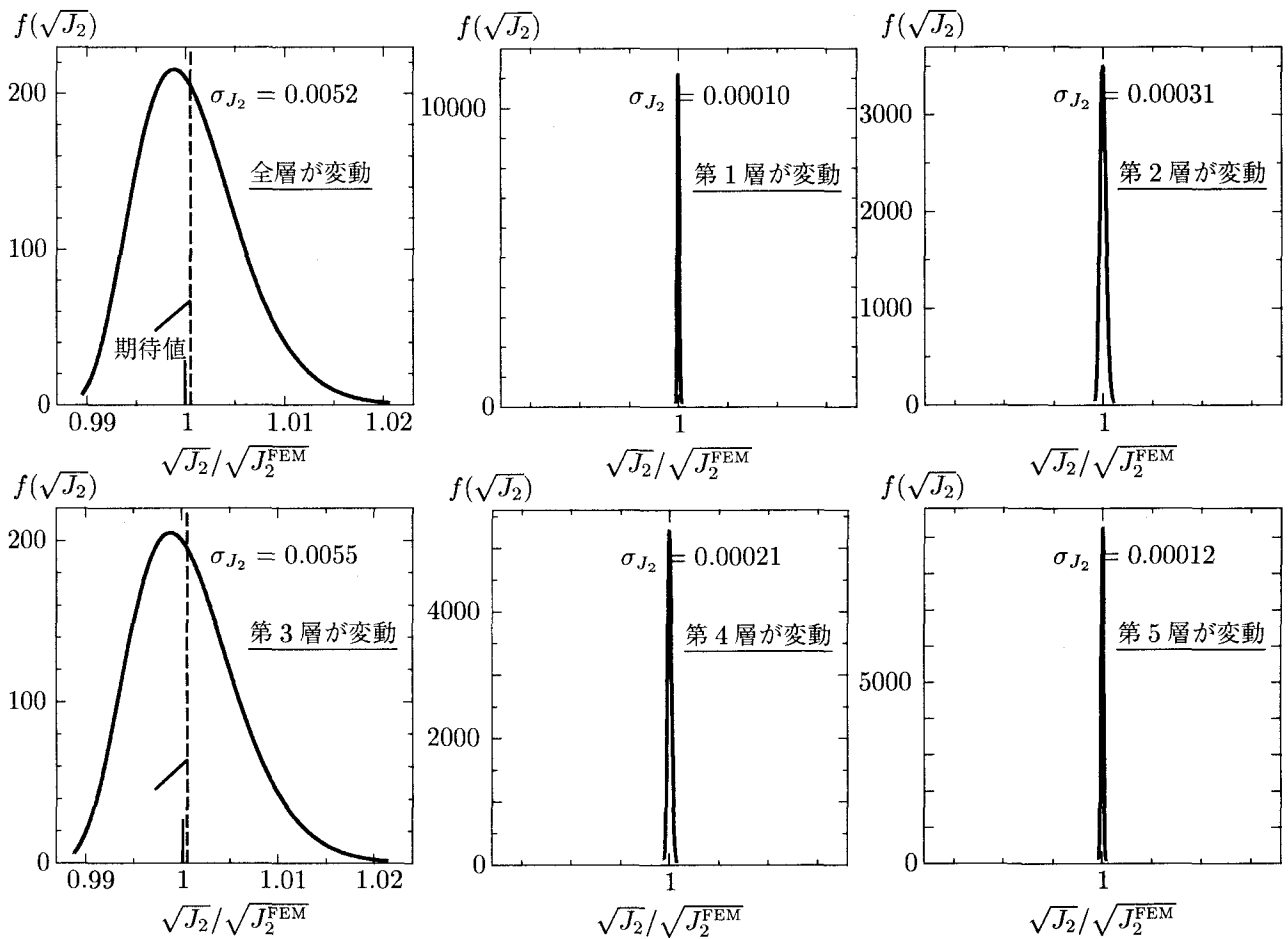


図-2 要素‘A’内の $\sqrt{J_2}$ の確率変動

でのボルト密度の変動がそれに次いで大きな影響を与えている。これは、注目している層よりも張り出していることから生じる結果と推測される。ただし標準偏差そのものの値は小さく、 $\sigma_{J_2} = 0.00031$ である。注目層のすぐ下の第4層の影響が次に大きく、第1と第5層のボルト密度の変動に対する影響はほとんど零である。このように、ある部分部分の変動に対する注目層（設計層）の変動への影響の感度が、確率有限要素法を用いれば容易に求められることから、設計の段階でモンテカルロ法のような手間のかかる手段を用いずに済む。

また、その結果を用いると、ロックボルトの配置換えを行う場合の適切な方法が、定量的に把握できる。すなわち、この例を用いて次の節で実施する簡単な例を述べると、ロックボルトの総数を変えずに着目要素‘A’をより補強するためには、第1層や第5層のロックボルト本数を減らし、その分で第3層を補強することが最も効率的であることがわかる。このように、設計段階で補強したい部分に対する効果的な補強位置等を、この手法によって任意の対象に対して容易に定量評価できる。

3.2 岩盤内応力の強度の平滑化

前節の結果を踏まえれば最適化の補助になる。直接最適化のコードと融合させた解析も、この数ヶ月の間に

その可能性が明らかになってきたが、これは別の機会に発表したい。ここでは、確定的な通常の有限要素法を順問題として複数回用いることで、総当たりのな探索をする。したがって、その得られた解は唯一解ではないものの、何らかの「適切さ」が求められると考えたい。すなわち、前節と同じ崖の五つの層のロックボルトを、確率有限要素法の結果を考慮しながら手動で移動させ、例として法面表面に並んでいる三角形要素内の J_2 の値が同じレベルになるように、強度を平滑化することを目的とした。すなわち図-1の法面に面した黒い三角形要素において

$$\text{各要素間の } \frac{\sqrt{J_2}}{\bar{\sigma}_Y} \text{ の差} \rightarrow \text{最小} \quad (9)$$

を目的関数とする。ここに平均降伏応力 $\bar{\sigma}_Y$ は、安山岩の降伏応力 $\sigma_Y^M = 10 \text{ MPa}$ とロックボルトの降伏応力 $\sigma_Y^L = 250 \text{ MPa}$ を用いて Voigt モデルのように

$$\bar{\sigma}_Y \equiv (1 - f) \sigma_Y^M + f \sigma_Y^L \quad (10)$$

で定義した。これは、微小変形理論の弾塑性体に森・田中理論を応用して平均化をした場合に得られる平均降伏応力が Voigt の形式をしていること¹⁹⁾に従った。

ここで選択した目的関数の性質からわかるように、各層間のボルト数配置のバランスの問題に着目したこ

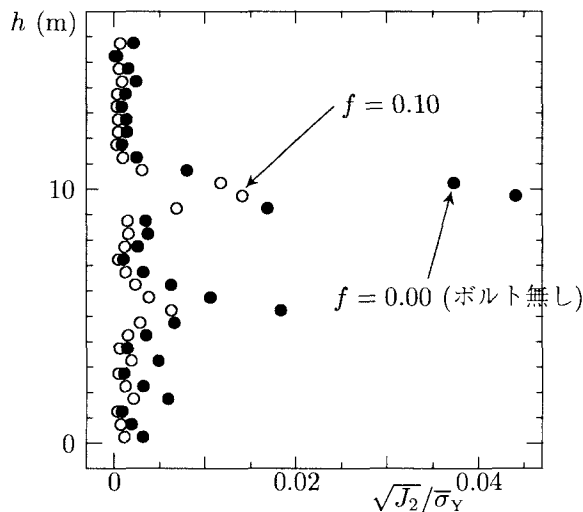


図-3 法面における $\frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_Y}$ の初期分布

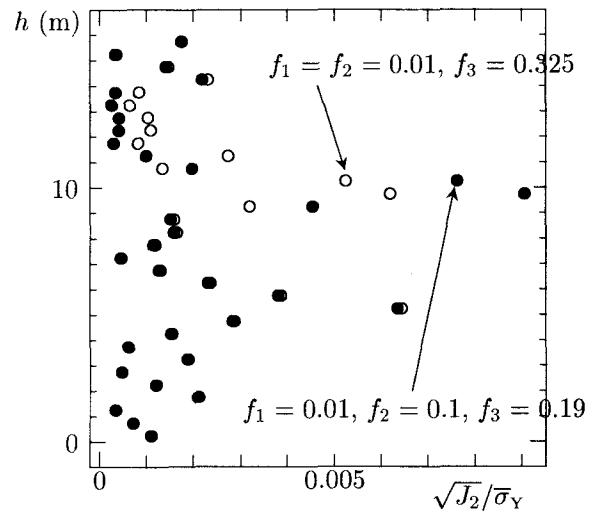


図-4 第1層と第2層からのボルトの移設

とになっており、各層間のロックボルト数の比率のみを変動させればよい。そのため、ロックボルトの総数は、最初の設定、すなわちすべての層で10%とした場合の総数を維持するという制約条件を設ける。図-3の黒丸がロックボルトを一本も打設しない場合の値で、白丸がロックボルトを $f = 0.10$ で配置した状態での値である。縦軸は崖の下面からの高さであり、横軸が目的関数の各要素での値である。下から10 m付近の第3層の危険箇所ではロックボルトによる補強効果が顕著であるが、まだ他の層に比べるとかなり大きな応力状態にある。これを層間で平滑化する。

確率有限要素法の結果を踏まえた場合、例えば第1層のロックボルトをこの第3層に移設することによって改善が期待される。図-4の黒丸がその操作によって、第1層のボルトを1%にまで下げ、すべてを第3層に移設してそのボルト密度が19%になった状態を示している。図の横軸のスケールは初期状態の図-3よりも小さくなっていることに注意して欲しい。この移設によって、第3層の危険度 $\sqrt{J_2}/\sigma_Y$ が約35%軽減されている。同様に、次に危険度が低い層である第2層から第3層への移設を実行する。このようにして、最終的に $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.325$ にまで変更した結果も同じ図-4の白丸で示されている。下の層では変化が小さいため、黒丸と白丸が重なっている。

確率有限要素法をその都度は実施していないが、同様の移設のステップを他の層に対しても踏むことによって、ここで定義した適切な解が得られる。一例を図-5に示した。図中の白丸が、各層のロックボルトの分布が

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.01, & f_2 &= 0.01, & f_3 &= 0.4225, \\ f_4 &= 0.135, & f_5 &= 0.033 \end{aligned}$$

になった状態での危険度の値である。また黒丸は初期状

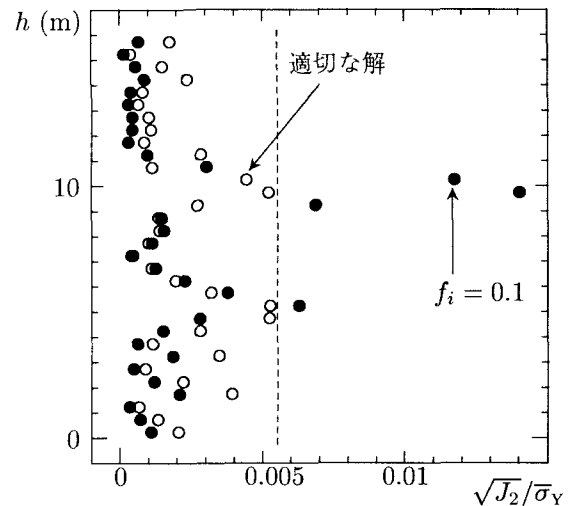


図-5 適切な解

態の全ボルト密度を10%に統一した状態での危険度である。 f_3 の42%という値がもはやそれ程現実的ではなくなったので、この段階で移設の試行を終了させた。したがって、すべての層の危険度は揃わなかったものの、横軸の $\sqrt{J_2}/\sigma_Y$ の値の各層での最大値が、0.005付近に引いた破線付近に近づいている。こうすることによって、多くの層の安全率が同程度にでき、強度の観点からは合理的な設計になったと考えている。

4. 繊維補強材でできた梁の最適化の試行と介在物形状に対する変動特性

4.1 繊維の向き最適解

前節では本モデルを確率有限要素法に 응용して、介在物の体積比率の変動の影響を定量的に示すことができた。その定式化において剛性行列を体積比率で微分する操作はそれ程容易ではないとは言え、Mathematicaの

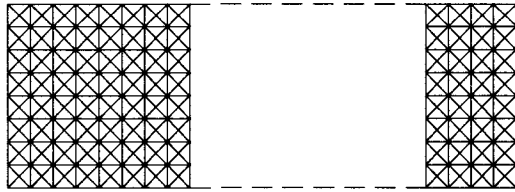


図-6 単純梁モデル (8層×200列)

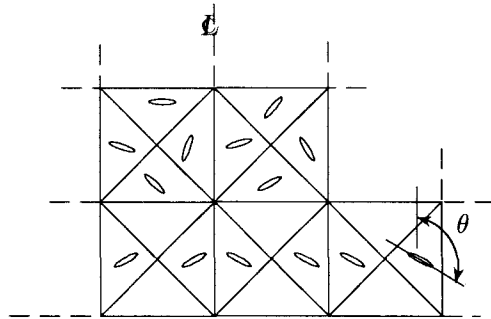


図-7 スパン中央の梁下面付近の繊維の向き

ようなツールを用いれば可能であり、また介在物の半径比 η を変動させることも比較的容易である。しかしながら、介在物の向きを変動させることが現状では困難であったため、ここでは確率有限要素法ではなく、これも前節の最適化と同様、通常確定的有限要素法を順問題として複数回解き、介在物の向きの最適性について論ずる。

対象としたのは、図-6に示した8層200列の6400点ひずみ三角形要素を並べた単純梁である。まえがきで紹介したスパン50 m 桁高1.6 mの実歩道橋では外ケーブルによるプレストレスをかけているため、その外ケーブルを含めない本対象では、実橋よりも少し短くし、橋軸方向が30 mで桁高を1.2 mとした。材料は、まえがきで紹介した鋼繊維で補強したコンクリート「ダクトル」を想定し、母材の高流動コンクリートのヤング率は $E_M = 45 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_M = 0.2$ とした。また鋼繊維は、ヤング率を $E_f = 200 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_f = 0.3$ とした。現状で普通に用いられる繊維補強コンクリートの場合は、繊維混入の体積比率は2%程度である。

森・田中理論や古典理論の精度の再確認をするために、この値を用いた平均値と実際の値を比較する。上の値を用いてVoigtとReussのモデルによるヤング率の上下界を求めると、それぞれが48.1 GPa、45.7 GPaになる。一方、繊維の向きがランダムなことから、球形介在物(向きの属性を無くした物)で繊維をモデル化した場合の森・田中理論で近似できるとしてヤング率を求めると46.3 GPaと、上下界の間の値になる。実測値¹⁾は50 GPaとなっており上界を越えてしまっている。しか

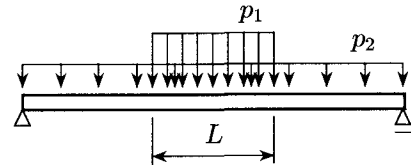


図-8 荷重パターン

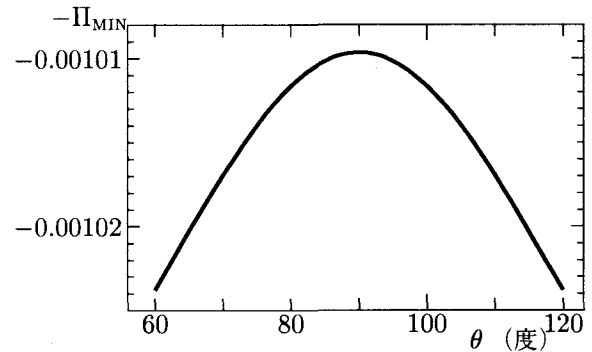


図-9 繊維の向きと全ポテンシャル最小値

しこの3つの簡単な解析的な予測は、若干柔な値になっているが、工学的には許容できる近似であろう。

繊維は半径比 $\eta = 50$ の細長い楕円介在物でモデル化し、その混入率は、梁の中立軸側6層は全て2%ずつにして、その向きはランダムとした。上下の各1層は、三角形4要素を組にした四角領域のうちの左右の2三角形要素には4%ずつ混入させ、上下の2三角形要素には繊維を入れなかった。したがって1組の4要素での繊維混入率は体積比率で2%となり、中立軸側と同じになっている。この上下1層に配置する繊維の向きは、鉛直軸に対して、スパン左側を反時計回りに θ 傾けたとすると、スパン右側は逆に時計回りに θ 傾け、スパン中央に対して対称になるように配した。 $\theta = 90$ 度のときに繊維は水平(橋軸)方向を向いている。スパン中央の梁下面付近で、その繊維の向きの分布を模式的に示したのが図-7である。

歩道橋なので荷重は群集荷重になるが、土木構造物では影響線荷重が普通なので、一例としてL荷重のような分布を故意に持たせて群集荷重程度の外力を作用させた。スパン中央を設計着目断面とした荷重パターンを図-8に示す。ここで $p_1 = 4.0 \text{ kPa}$ 、 $p_2 = 2.0 \text{ kPa}$ という値にし、荷重幅は $L = 9.9 \text{ m}$ と(要素分割の関係で、簡単のために10 mに最も近い数値と)した。

以上のような設定で荷重し、構造全体が持つ剛性を繊維の向き θ に対して最適化するために、全ポテンシャルエネルギーの最小値の最大化を試みた。曲げによる主応力が梁の上下面付近では水平(橋軸)方向であるため、当然 $\theta = 90$ 度方向の繊維配置のときに最も剛性が高くなることは容易に確信できるが、それを定量化するために全ポテンシャルエネルギーを用いてみる。すなわち式

(7)の要素剛性行列を全体系に組んだものを $\mathbf{K}$ とし、対応する全体系の変位ベクトルを $\mathbf{U}$ とし、外力ベクトルを $\mathbf{F}$ とした場合の全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi \equiv \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F}$$

の最小値 Π_{MIN} すなわち

$$\Pi_{\text{MIN}} = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$$

を、角度 θ との関係でプロットしたのが図-9である。角度が90度のとき、すなわち曲げ応力に最大限抵抗する向きに配置した場合のポテンシャル最小値が一番最大（コンプライアンス最小）になっている。「ダクタル」による実験においても、繊維の向きを揃えたときの材料の剛性や靱性が非常に高くなることもわかっており、将来はこのような性質を有効に使って繊維配置も設計することが望ましいと考えている。

4.2 繊維形状の変動に対する強度特性

最後に再度、介在物の形状の変動について確率有限要素法を利用した例を示す。現実問題として、導入する繊維形状のばらつきが問題になるとは考え難いが、その強度に対する影響は調べておく必要があるかもしれないので、ここで取り上げてみた。対象は図-6にある有限要素メッシュでモデル化した単純梁で、材料は前節と同じものとし、すべての繊維が橋軸方向（水平方向）に向いているものとする。繊維の体積比率は、通常の繊維補強コンクリートの標準的な値である2%とした。繊維の種類として短繊維と長繊維を一例として、楕円半径比 $\eta = 6$ と $\eta = 75$ でそれぞれモデル化した。この半径比が標準偏差 $\sigma_\eta = 0.05$ で変動するときにスパン中央における曲げ直応力（水平方向の直応力）の変動特性を示したのが図-10である。

Eshelby テンソルの値の特性として、ある程度の半径比以上ではその値はあまり変化しないことが知られている。そのため、半径比が大きい $\eta = 75$ の場合に、形状比の変動に対する応力の変動は相対的に小さくなっている。繊維量を極端に増やした場合を例に、応答の直応力の標準偏差と形状比の関係を図-11に示した。このように繊維量に関わらず、この例では形状比が50を越えると、応答の変動特性には影響が無くなることが明らかであり、これがEshelby テンソルの特性の直接の影響である。また半径比が小さい $\eta = 6$ の場合の結果は、崖の解析で得られた結果と同様、その分布の裾野が応力の大きい方に広く伸びている。したがって、形状に変動がある場合には、値そのものは問題にならない大きさではあるが、確定的な有限要素解よりも大きい応力が生じる可能性があることがわかる。

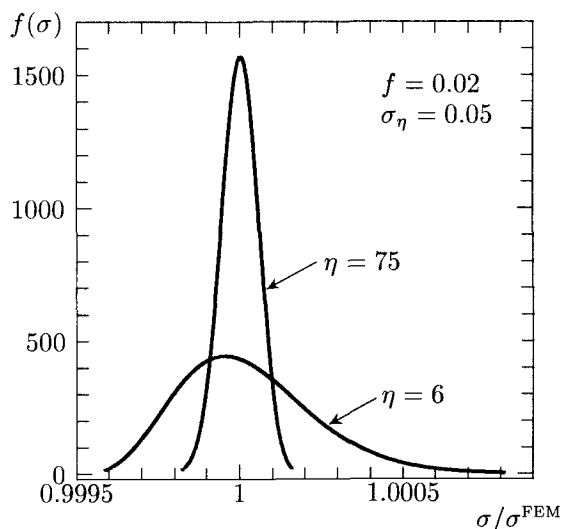


図-10 介在物形状比の変動による直応力の変動

応力の標準偏差

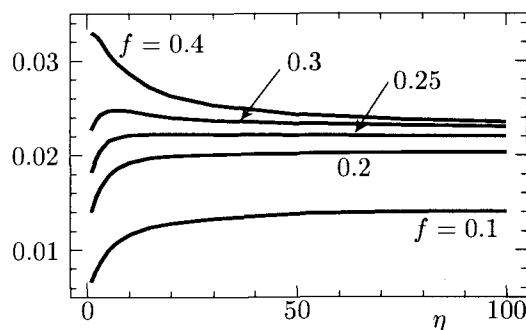


図-11 介在物形状比と直応力の変動の関係

5. おわりに

解析的な平均化手法を用いることの利点を示し、その有用性を示すために、介在物の含有率と形状比について、標準的な確率有限要素法に応用した。またその変動情報を踏まえて、岩崖のロックボルト補強の適切な解のひとつを誘導してみた。さらに、繊維補強コンクリートでできた梁を例として、全体剛性に繊維の向きが及ぼす影響を、有限要素法を複数回実施することによって求め、ひとつの解を示すことができた。このような試行において以下のような知見を得た。

- 介在物の形状と体積比率についての確率有限要素法の定式化は比較的容易であった。
- その結果、複合材料の微視構造の変動に対して強度等がどのように変動するかについて、定量的に示すことができ、確定的な通常の有限要素解の特性を判定することもできた。

現在、構造設計を念頭に置いた3次元化が完了しつつある。また剛性行列が介在物の体積比率等で微分可能なことを利用して、最適化手法との組み合わせを試行している段階で、精度や効率の検討をしている状況である。

謝辞—この研究は平成 15, 16 年度科学研究費補助金基盤研究 (C) (課題番号 15560391) の補助を一部受けた。

参考文献

- 武者浩透, 大熊光, 大竹明朗, 児玉明彦, 関文夫, 小林忠司: 無機系複合材料 (RPC) を用いた酒田みらい橋の設計と施工, 橋梁と基礎, pp.1-10, 2002.
- 武者浩透, 大竹明朗, 児玉明彦, 小林忠司: 超高強度コンクリート系新素材「ダクトル」を用いた PC 橋梁の設計・施工—酒田みらい橋—, プレストレストコンクリート, Vol.45, No.2, pp.40-48, 2003.
- 田中良弘, 武者浩透, 下山善秀, 小林忠司: PC 橋梁に用いた超高強度繊維補強コンクリートの用途開発, コンクリート工学, Vol.41, No.3, pp.26-32, 2003.
- 土木学会構造工学委員会 FRP 橋梁研究小委員会: FRP 橋梁—技術とその展望—, 構造工学シリーズ 14, 2004.
- 松井和己, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岩熊哲夫: 弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価, 土木学会論文集, No.682/I-56, pp.335-346, 2001.
- Bensøe, M.P. and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol.71, pp.197-224, 1998.
- 樋口耕平, 岩熊哲夫, 京谷孝史, 寺田賢二郎: 解析的平均化手法を用いた複合材料の平面ひずみ有限要素, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.107-116, 2003.
- Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- Hashin, Z. and Shtrikman S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 中桐滋, 久田俊明: 確率有限要素法入門, 培風館, 1985.
- Yeh, H.-Y. and Cheng, J.-H.: NDE of metal damage: ultrasonics with a damage mechanics model, *Int. J. Solids Structures*, Vol.40, pp.7285-7298, 2003.
- Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., 1982.
- Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities; Part II: applications, *Int. J. Solids Str.*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
- Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1993.
- 京谷孝史, 谷宗行: 均質化法を応用したロックボルト打設間隔の最適化, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.159-166, 2003.
- 土木学会編: 土木工学ハンドブック I, 第 30 編トンネル, pp.1281-1330, 技報堂出版, 1989.
- Lin, S.C., Yang, C.C., Mura, T. and Iwakuma, T.: Average elastic-plastic behavior of composite materials, *Int. J. Solids Structures*, Vol.29, pp.1859-1872, 1992.
- Weng, G.J.: The theoretical connection between Mori-Tanaka's theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole bounds, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol.28, pp.1111-1120, 1990.

付録 I 森・田中理論を利用した平均挙動の予測

母材と 1 種類の介在物との 2 相だけからなる複合材料の平均弾性挙動の定式化を列挙しておく。内容は文献²⁰⁾にまとめられているものと同じである。母材と介在物の各相における応力ひずみ関係は

$$\sigma_M = C_M \varepsilon_M, \sigma_I = C_I \varepsilon_I \quad (I.1)$$

であるとする。ここに σ , ε , C はそれぞれ応力テンソルとひずみテンソル・弾性テンソルを表し, 下添え字の M と I はそれぞれ母材部分と介在物内部の諸量であることを示している。

複合材料の平均挙動に大きな影響を及ぼす因子は, 母材と介在物の相互作用と母材中に多数の介在物が存在することによる相互作用の二つである。森・田中理論では後者を分子動力学の考え方を応用している。最初の特徴的な仮定は, 平均的な母材中の応力ひずみ関係が式 (I.1) とは異なり

$$\langle \sigma \rangle_M = C_M \langle \varepsilon \rangle_D \quad (I.2)$$

と置いている。ここに, $\langle \rangle$ はその量がそれに続く下添え字で示した体積中の平均量であることを表しているが, 母材ひずみの下添え字 D の項は何らかの未知量として扱うことを意味し, 実際の母材中のひずみの平均値ではない。ここが森・田中理論の特徴である。

以上のような各相の平均の応力ひずみ関係が成立するとすれば, 複合材料全体の平均応力と平均ひずみは

$$\bar{\sigma} \equiv f \langle \sigma \rangle_I + (1-f) \langle \sigma \rangle_M \quad (I.3a)$$

$$\bar{\varepsilon} \equiv f \langle \varepsilon \rangle_I + (1-f) \langle \varepsilon \rangle_D \quad (I.3b)$$

で定義すればよい。ここに $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ は複合材料全体の平均応力と平均ひずみである。したがって, 複合材料全体の平均応力ひずみ関係は

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\varepsilon} \quad (I.4)$$

と表すことができ, この式をが複合材料全体の巨視的な平均弾性テンソル $\bar{C}$ の定義とする。

次に介在物と母材の相互作用について、森・田中理論の考え方では、無限体中にたった一個の介在物が存在することで済ませている。ただし、未知量としての $\langle \epsilon \rangle_D$ のひずみ場に一個導入する点が注意しなければならない点で、このことで複雑な相互作用が考慮できているとする。介在物が導入されたことによって生じた乱れひずみ成分を γ とすると、その介在物中の平均ひずみは

$$\langle \epsilon \rangle_I = \langle \epsilon \rangle_D + \gamma \quad (\text{I.5})$$

となる。よって、介在物中の平均的な応力ひずみ関係は

$$\langle \sigma \rangle_I = C_I \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma \} \quad (\text{I.6})$$

と書き換えられる。

等価介在物法¹⁴⁾を用いれば

$$\langle \sigma \rangle_I = C_M \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma - \epsilon^* \} \quad (\text{I.7})$$

という関係が成立する。さらに Eshelby の解¹³⁾を用い乱れ成分 γ は

$$\gamma = S \epsilon^* \quad (\text{I.8})$$

がつり合いを満足する解の表現になる。 S は Eshelby のテンソルである。

式 (I.8) を式 (I.6) に代入すると

$$\langle \sigma \rangle_I = C_I \langle \epsilon \rangle_D + C_I S \epsilon^* \quad (\text{I.9})$$

が得られる。また、式 (I.8) を式 (I.7) に代入すると

$$\langle \sigma \rangle_I = C_M \langle \epsilon \rangle_D + C_M (S - I) \epsilon^* \quad (\text{I.10})$$

が得られる。ここに I は 4 階の単位テンソルである。ここで式 (I.9) と式 (I.10) より ϵ^* を求めると

$$\epsilon^* = \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \langle \epsilon \rangle_D \quad (\text{I.11})$$

となる。この式 (I.11) に式 (I.2) を代入することによって

$$\epsilon^* = \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1} \langle \epsilon \rangle_M \quad (\text{I.12})$$

が得られる。

また、式 (I.3b) に式 (I.5) とを代入すると

$$\bar{\epsilon} = f \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma \} + (1 - f) \langle \epsilon \rangle_D = \langle \epsilon \rangle_D + f \gamma \quad (\text{I.13})$$

となり、これに式 (I.2) と式 (I.8) と代入することにより

$$\bar{\epsilon} = C_M^{-1} \langle \sigma \rangle_M + f S \epsilon^* \quad (\text{I.14})$$

を得る。最後に式 (I.2) を式 (I.10) に代入して

$$\langle \sigma \rangle_I = \langle \sigma \rangle_I + C_M (S - I) \epsilon^* \quad (\text{I.15})$$

としておく。

ここで以上の式 (I.3a) (I.12) (I.14) (I.15) を連立させることにより、 $\langle \sigma \rangle_M$, $\langle \sigma \rangle_I$, ϵ^* を消去すると、複合材料全体の平均弾性テンソルは最終的に

$$\bar{C} = C_M \{ C_M - (1 - f) (C_M - C_I) S \}^{-1} [C_M - (C_M - C_I)] \{ S - f (S - I) \} \quad (\text{I.16})$$

と求まる。

また、母材と介在物中の応力は式 (I.3a) に式 (I.12), (I.15) を代入することにより、それぞれ

$$\sigma_M = \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \bar{\sigma} \quad (\text{I.17})$$

$$\sigma_I = \left[I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \sigma_M \quad (\text{I.18})$$

となる。

(2004 年 4 月 16 日 受付)