

C-HSMAC 法を用いる 3次元非構造コロケート格子上の並列流体計算法

Parallel Computational Method for Incompressible Flows
with C-HSMAC Method on 3D Unstructured Collocated-Grid System

牛島 省*・奥山 洋平**・藤田 学***・瀬津 家久****

Satoru Ushijima, Youhei Okuyama, Manabu Fujita and Iehisa Nezu

*正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**新日鉄ソリューションズ株式会社 (〒 104-0033 東京都中央区新川 2-20-15)

***学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程

****フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 社会基盤工学専攻

A computational method for 3D incompressible flows is developed on the unstructured collocated-grid system. In the prediction procedure of the MAC algorithm, the CBP (Cell-Boundary Pressure) scheme is utilized to obtain the estimated velocity components at cell-center points. In order to preserve the fluid mass with sufficient accuracy, a C-HSMAC method, whose validity has been shown in the structured collocated grid system, is implemented in the present method. In addition, the proposed method is parallelized on the basis of a domain decomposition method by setting up the overlapping tetrahedron cells. The advantage of the C-HSMAC method and the availability of the parallel computation are investigated through the computation of a cavity flow. The applicability to 3D flows in a curved duct is also discussed.

Key Words : *unstructured collocated grid, incompressible flow, parallel computation, C-HSMAC method, overlapping cell*

1. はじめに

水理構造物周辺の流れや、河川や湖沼などにおける複雑な形状の境界に囲まれた流体现象を数値的に扱うためには、境界形状を適切に表現することが重要である。このために、領域形状に対する自由度が高く、複雑な境界形状を適切に扱うことができる非構造格子を用いることは一つの有効な方法である。

水工学の分野では、これまで水深積分形の基礎式の計算に非構造格子を用いる検討が比較的多く行われてきた^{1)・2)}。これらの手法に加えて、今後は計算機と計算手法の発展とともに、非圧縮性流体計算法を利用して多次元の水理現象を予測・評価する場合が増加していくと考えられる。このため、本報では、3次元非構造コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算法に対する考察を行い、これに圧力解法として有効な C-HSMAC 法³⁾を導入する。積分領域を適切に設定することで、3次元非構造格子でも C-HSMAC 法を利用可能であることを示す。さらに、大規模計算を可能とするため、提案された流体計算法を自動領域分割法と重合計算セルを用いて並列化する。圧力解法と並列計算の有効性、そして実用的な問題への適用性に関する考察を加える。

2. 数値解析手法

2.1 3次元非構造コロケート格子

本報では、3次元場を対象とし、非構造格子として四面体の計算セルを用いる。以下では四面体の頂点を節点、面をセル境界と表記する。Rhie and Chow⁴⁾が示した変数のコロケート格子配置は、構造格子に対するものであるが、ここでは同様の変数配置を非構造格子に対して用いる。すなわち、図-1に示す計算セル中心点(四面体セルの重心点)に圧力と3方向の流速成分を定義する。さらに、運動量フラックスとセル境界流速をセル境界節点上に定義する。ここで、セル境界節点は、セル境界を形成する面の重心点とする。

2.2 基礎式

本報では、密度 ρ が一定な非圧縮性流体を扱う。基礎方程式は3次元の連続式と Navier-Stokes 式である。ただし、ここでは外力は考慮しないものとする。基礎式の離散化法として、有限体積法を用いる。有限体積法で利用される積分形の連続式と運動方程式は以下のように表される。

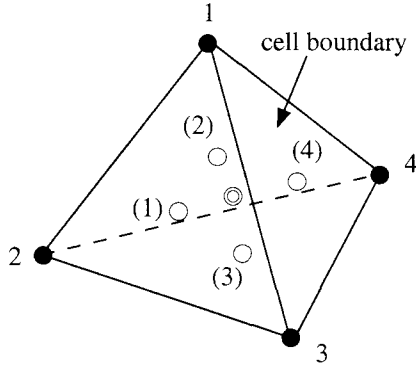


図-1 四面体計算セル (●は節点, ○はセル境界節点, ◎はセル中心点を表す.)

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2)$$

ここに,

$$\mathbf{F} = u_i \mathbf{u} + \frac{p}{\rho} \mathbf{k}_i - \nu \nabla u_i \quad (3)$$

以上の基礎式中で, Ω はある有限な流体領域を表し, $\partial\Omega$ はその境界面を表す. $\mathbf{n}$ は境界における領域外側へ向かう単位法線ベクトル, また $\mathbf{k}_i$ は直交座標系の座標成分 x_i 方向へ向かう単位ベクトルである. $\mathbf{u}$ は流速ベクトル, u_i は流速ベクトルの x_i 成分, p は圧力, ν は動粘性係数である.

2.3 移流項と拡散項の離散化

運動方程式を時間方向に Euler 陽解法で離散化し, 式 (3) の $\mathbf{F}$ は n ステップの変数を用いて評価する. 移流項, すなわち式 (3) 右辺第 1 項の積分を C_i と表す.

$$C_i = \int_{\partial\Omega} u_i^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} dS \quad (4)$$

四面体の計算セルでは, 式 (4) は次式で近似計算される.

$$C_i \approx \sum_{m=1}^4 f_{i,m} S_m \quad (5)$$

ここに, $f_{i,m}$ はセル境界 m における $u_i^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}$ の代表値を表す. また, S_m はセル境界 m の面積である. $f_{i,m}$ はセル境界節点で評価する. 現段階では, 構造格子で提案された FVM-QSI スキーム等の高次解法を非構造格子で利用することが困難であるので, 1 次および 2 次精度の $f_{i,m}$ の評価法⁵⁾を用いる.

一方, 拡散項の離散化式は次式ようになる. 式 (3) 右辺第 3 項の係数を除く積分を D_i と表す. すなわち,

$$D_i = \int_{\partial\Omega} \nabla u_i^n \cdot \mathbf{n} dS \quad (6)$$

四面体セルでは, 式 (6) は次式で近似計算される.

$$D_i \approx \sum_{m=1}^4 \frac{1}{V_{b,m}} (u_{i,m}^n - u_{i,0}^n) S_m^2 \quad (7)$$

ここで, 図-2 に示すように, 計算対象となる計算セル領域を Ω_0 , またセル境界 m を介して隣接するセル領域を Ω_m としており, $V_{b,m}$ は Ω_0 と Ω_m の 2 つのセル領域から構成される領域の体積である.

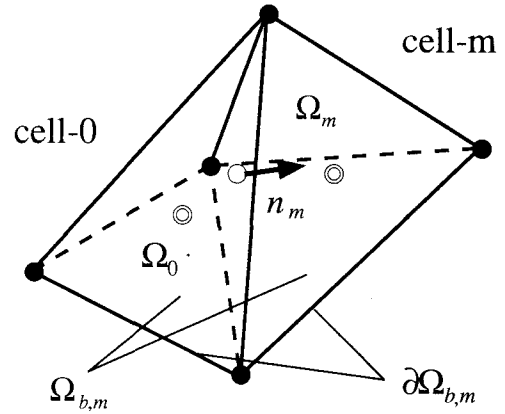


図-2 セル Ω_0 と隣接するセル Ω_m

2.4 予測段階の計算法

構造格子上で変数のコロケート配置を用いる場合の MAC 系解法の手順⁶⁾と同様に, 非構造格子を用いる場合でも, 予測段階において, セル中心で流速ベクトルの推定値 $\mathbf{u}_c$ を求める. 構造格子においては, セル中心における $\mathbf{u}_c$ の評価に圧力勾配を用いず, これがセル境界に空間内挿された段階で圧力を考慮する CBP スキームが有効であることが示されている⁶⁾. 非構造格子でも同様に移流項と拡散項のみを考慮して, 式 (5) と式 (7) より, $\mathbf{u}_c$ を次式から計算する.

$$\begin{aligned} u_{c,i} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{V} \int_{\partial\Omega} u_i^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad + \nu \frac{\Delta t}{V} \int_{\partial\Omega} \nabla u_i^n \cdot \mathbf{n} dS \\ &\approx u_i^n + \frac{\Delta t}{V} \left[- \sum_{m=1}^4 f_{i,m} S_m \right. \\ &\quad \left. + \nu \sum_{m=1}^4 \frac{1}{V_{b,m}} (u_{i,m}^n - u_{i,0}^n) S_m^2 \right] \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) では簡単のため時間方向の離散化には Euler 陽解法を用いている. Δt は 1 ステップの時間増分である.

次に、式(8)により計算された u_c をセル境界へ空間内挿する。簡単な内挿法として、セル境界の両側に位置する計算セルのセル中心の値を用いて、これに各セル体積の重み付けを行う線形内挿が考えられる。セル境界 m に空間内挿された流速ベクトルを $u_{b,m}^*$ とするとき、これに対して次式のように圧力 p^n を考慮する。

$$\begin{aligned}\hat{u}_{b,m}^* &= u_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} \int_{\Omega_{b,m}} \nabla p^n d\Omega \\ &= u_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} \int_{\partial\Omega_{b,m}} p^n \mathbf{n} dS\end{aligned}\quad (9)$$

ここに、 $\Omega_{b,m}$ は図-2 に示すセル境界 m を挟む2つの計算セルから構成される領域であり、 $\partial\Omega_{b,m}$ はその境界面を表す。

2.5 圧力計算の基礎式

2次元非構造格子を用いる場合には、セル境界線を挟む2つのセルに対して積分領域を設定することにより、C-HSMAC法を適切に導入できることが示されている⁵⁾。本報では、3次元場を対象とするので、セル境界面を介して接する2つのセル体積を積分領域として、圧力計算に用いる基礎式を導く。

式(9)に対して、 $n+1$ ステップの圧力を用いる場合には、次式が成り立つ。

$$u_{b,m}^{n+1} = u_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} \int_{\partial\Omega_{b,m}} p^{n+1} \mathbf{n} dS \quad (10)$$

式(9)と式(10)の差を取ることで、次式が得られる。

$$u_{b,m}^{n+1} = \hat{u}_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} \int_{\partial\Omega_{b,m}} \phi \mathbf{n} dS \quad (11)$$

ここに、 $\phi = p^{n+1} - p^n$ である。

一方、時間ステップ $n+1$ における計算セル Ω_0 に対する連続式は、次のように表される。

$$\int_{\partial\Omega_0} u_b^{n+1} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (12)$$

式(12)を四面体計算セルで離散化すると次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^4 u_{b,m}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_m S_m = 0 \quad (13)$$

式(11)を離散化して得られる $u_{b,m}^{n+1}$ の表示式を式(13)に代入することにより、 ϕ に対する連立1次方程式が得られる。図-2に示された領域 $\Omega_{b,m}$ に対して、式(11)は次のように離散化される。

$$u_{b,m}^{n+1} = \hat{u}_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} \sum_{k=1}^6 \phi_k \mathbf{n}_k S_k \quad (14)$$

ここで、 ϕ が各セル内で一定であると仮定する。領域 $\Omega_{b,m}$ を構成する2つの計算セルにわたる式(14)の和をセル境界 m で評価すると次式が導かれる。

$$u_{b,m}^{n+1} = \hat{u}_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} (\phi_m - \phi_0) \mathbf{n}_m S_m \quad (15)$$

式(15)を式(13)に代入すれば、次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^4 \frac{S_m^2}{V_{b,m}} (\phi_m - \phi_0) = \frac{\rho}{\Delta t} D \quad (16)$$

ここに、 D は次式で与えられる。

$$D = \sum_{m=1}^4 \hat{u}_{b,m}^* \cdot \mathbf{n}_m S_m \quad (17)$$

2.6 C-HSMAC法の計算手順

非圧縮性流体の計算においては、各計算ステップで流体の連続性に対する誤差を制御し、これを十分小さく保つことが重要である。このために、C-HSMAC法が有効であることが示されており³⁾、また同手法はSOLA法よりも収束特性が優れていることが示されている⁷⁾。ここでは、非構造コロケート格子を用いる場合のC-HSMAC法の計算手順を示す。

C-HSMAC法を利用する場合には、以下の関係式を用いる。ここで、上添字 k ($k = 1, 2, \dots$) は、C-HSMAC法の反復計算ステップを表す。

$$D = \sum_{m=1}^4 u_{b,m}^k \cdot \mathbf{n}_m S_m \quad (18)$$

$$\sum_{m=1}^4 \frac{S_m^2}{V_{b,m}} (\phi_m - \phi) = \frac{\rho}{\Delta t} D \quad (19)$$

$$u_{b,m}^{k+1} = u_{b,m}^k - \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} (\phi_m - \phi) \mathbf{n}_m S_m \quad (20)$$

$$p^{k+1} = p^k + \phi \quad (21)$$

式(18)の D は流体の連続性に対する誤差に相当する。上記の関係式を用いたC-HSMAC法の計算手順は次のように要約される。

1. 式(18)を用いてセル境界流速ベクトル $u_{b,m}^k$ の発散 D を計算する。 $u_{b,m}^k$ の初期値には、 $\hat{u}_{b,m}^*$ を用いる。与えられたしきい値 D_0 に対して、全ての計算セルで $|D| < D_0$ なる条件が満たされた場合には、C-HSMAC法の反復計算を終了する。この条件が満足されない場合には、以下の手順を行う。
2. 得られた D を用いて、式(19)に基づき ϕ の連立1次方程式を構成し、その数値解を求める。本報では、この解法としてBi-CGSTAB法を用いる。

3. ϕ の数値解の残差に対するしきい値を ϵ_ϕ とするとき、 $|D|$ を反復過程で低減させるためには、 ϵ_ϕ を適当に制御することが必要であることが示されている⁸⁾。このため、 $\epsilon_\phi = \alpha^{k-1} \epsilon_0$ ($0 < \alpha < 1$, ϵ_0 はしきい値の初期値) として、C-HSMAC 法の反復計算ごとにしきい値 ϵ_ϕ を 0 へ近づける。
4. 得られた ϕ の数値解を式 (20) に用いて、 $u_{b,m}^{k+1}$ を更新する。
5. 式 (21) に従い、 ϕ を用いて圧力 p を更新する。なお、 p^k の初期値には p^n を用いる。
6. $u_{b,m}^{k+1}$ を $u_{b,m}^k$, また p^{k+1} を p^k として、最初の手順に戻る。

以上の手順に従って C-HSMAC 法の反復計算を行うことにより、反復計算終了後には、すべての計算セルで連続性の誤差が D_0 以下となり、圧力 p^{n+1} が p^{k+1} として得られる。

3. 流体計算法の並列化

3.1 領域分割による並列処理

上記のように、3次元非構造格子において、圧力計算に C-HSMAC 法を用いる流体計算法が示された。本報では、この流体計算法を並列化し、大規模計算へ適用可能なものとする。

構造格子上で C-HSMAC 法を用いる流体計算を並列的に行う方法は、既報^{9),8)}に記述されている。非構造格子を用いる本報の解法を並列化する場合にも、構造格子の場合と同様に、領域分割を利用する。領域分割を行う場合には、計算領域全体を複数の小領域 (以下、subdomain) に分割して、分割された各 subdomain の数値処理を各 node (PC クラスタを用いる場合にはこれを構成する各 PC) に割り当てる。有限体積法により得られた離散化式では、局所的ではあるが、ある範囲にわたる計算点上の変数が必要となる。この通信を簡便に行うために、subdomain 間にオーバーラップする計算セル (以下、重合セル) を設定する方法を用いる。

非構造格子で表現された計算領域を分割する場合には、格子の並び方が不規則であるため、構造格子のように分割面を指定することが困難である。このような場合の領域分割法に関しては、これまでに多くの研究が進められている¹⁰⁾。本報では、これを簡単に行うために、グラフ分割用ライブラリである自動領域分割ソフトウェア METIS (<http://www-users.cs.umn.edu/~karypis/metis/>) を利用して、多次元的な領域分割を行うこととした¹¹⁾。

3.2 予測段階の並列化

予測段階におけるセル中心流速の推定値 u_c を求める際には、式 (8) に示されるように、subdomain 内で移流項と拡散項の計算が必要である。移流項の計算においては、1次および2次精度の評価のどちらにおいても、隣接する計算セルのセル中心流速 u^n を用いる。また、拡散項の計算でも同様に隣接する計算セルの u^n を用いる。したがって、領域分割面に接するセル内の計算では、 u^n を subdomain 間で交換する必要がある。この通信に関連する計算処理を容易に行うために、重合セルを利用する。図-3に、重合セルを利用する subdomain 間の通信の概略を示す。分割面をいずれかのセル境界に持つ計算セルに対して、他の subdomain に属する計算セルと同様の形状のセルを重合セルとして、その外側に設定する。移流項あるいは拡散項の計算等においては、他の subdomain 内の変数値が必要となった場合には、MPI の通信コマンドを利用してデータ交換を行い、これを重合セルに設定する。

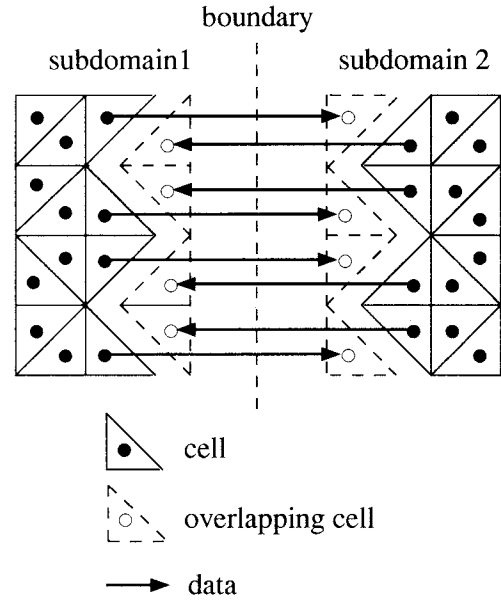


図-3 重合セルを用いる subdomain 間の通信

セル中心の u_c を求めた後、これを用いてセル境界上の流速の推定値 $\hat{u}_{b,m}^*$ を定める際には、 u_c を subdomain 間で交換することが必要となる。 $\hat{u}_{b,m}^*$ の計算は、圧力 p^n を用いて次式により行われる。

$$\hat{u}_{b,m}^* = u_{b,m}^* \frac{\Delta t}{\rho V_{b,m}} (p_m^n - p_0^n) n_m S_m \quad (22)$$

式 (22) の計算では、隣接する計算セルのセル中心で定義される圧力 p_m^n を用いる。このため、subdomain 間の p^n の交換が必要となる。以上の u_c および p^n のデータ交換も重合セルを用いて同様に行われる。

3.3 圧力計算段階の並列化

C-HSMAC 法を用いる圧力計算では、Bi-CGSTAB 法を用いる ϕ の連立 1 次方程式の計算など、複数の段階で以下のような subdomain 間の通信が必要となる。

1. Bi-CGSTAB 法における一部のベクトル成分の交換
2. 同解法におけるベクトルの内積値の計算
3. 同解法の収束判定
4. セル境界流速 $u_{b,m}$ の更新のための ϕ の値の交換
5. 発散値 D の値に基づく反復計算の収束判定

上記の 1 および 4 のデータの交換は、重合セルを用いる通信により行う。また、2 の内積計算では、各 subdomain の内積値の和をとるために、MPI の通信サブルーチンである mpi_allreduce 等を使用する。収束判定に関連する上記 3 および 5 では、各 subdomain の判定結果の一致をとるため、各 subdomain の判定結果をある subdomain に集め、そこで計算領域全体の収束判定を行い、その結果を各 subdomain に配信する方法を取る。以上のように、重合セルを用いる点を除けば、基本的な計算手順は既報⁹⁾で示した構造格子における並列 C-HSMAC 法の場合とほぼ同様となる。

4. 計算手法の検証と適用性

C-HSMAC 法は、連続性に関する誤差を圧力計算の収束判定基準として用いることに特徴がある。本報で提案された計算手法を 3 次元キャビティ流れに適用して、連続性の誤差の挙動を調べるとともに、並列計算の有効性等を確認する。また、曲がりダクト内の 3 次元流れの計算を行って、計算手法の適用性を検討する。

4.1 C-HSMAC 法の有効性の確認

3 次元キャビティ流れは、一辺の長さが 1.0 である立方体領域内で、上部壁が 1.0 の速度で移動することにより非圧縮性粘性流体が駆動される流れである。座標系と格子分割を図-4 に示す。移流項の計算には、2 次精度の離散化法を用いており、計算対象のレイノルズ数は 100、 $\Delta t = 0.01$ とし、 $t = 20.0$ まで計算を行った。

$y = 0.5$ の断面流速ベクトルの分布を移動壁を上面とする中心点を通る鉛直断面内の流速分布を図-5 に示す。流速分布は、Ku¹²⁾ の計算値とよく一致した。

次に、連続性に関する誤差を把握するため、流速ベクトルの発散値を計算し、その絶対値の最大値 D_m を求めた。C-HSMAC 法および比較のために SMAC 法を用いて得られた結果を図-6 に合わせて示す。図-6 に示されるように、C-HSMAC 法を用いる本報の計算法では、すべての時刻において流速ベクトルの発散値はしきい値である 1.0×10^{-10} より小さい値となり、非圧

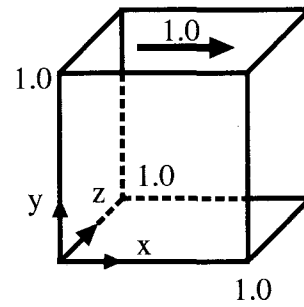


図-4 3次元キャビティの座標系

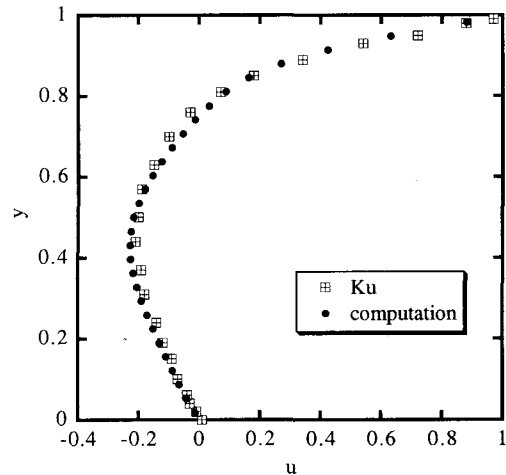


図-5 計算により得られた x 軸方向流速成分 (u) の比較 ($y = 0.5, z = 0.5$)

縮条件を制御することが可能であることが示されている。一方、SMAC 法では ϕ の数値解に対する残差が圧力計算の収束判定基準となるので、流速ベクトルの発散値は直接的には制御されない。以上のように、3 次元非圧縮流体計算に非構造格子を用いる場合においても、C-HSMAC 法が適切に機能することが示された。

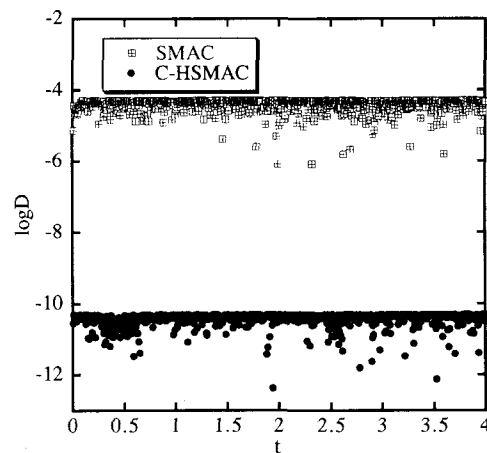


図-6 流速ベクトルの発散値 (絶対値の最大値) の時系列

4.2 並列計算の有効性

上記の3次元キャビティ流れを対象として、並列計算を行い、計算効率等を確認する。全計算セル数は、 $30^3 \times 5$ と $40^3 \times 5$ の2ケースとした。使用した node 数 p とスピードアップ S の関係を図-7 に示す。これより、同一の node 数では、計算セル数が多い方が S は高い値を示す。また、node 数 p が増えるにつれ、 S の向上は鈍化することが示されている。

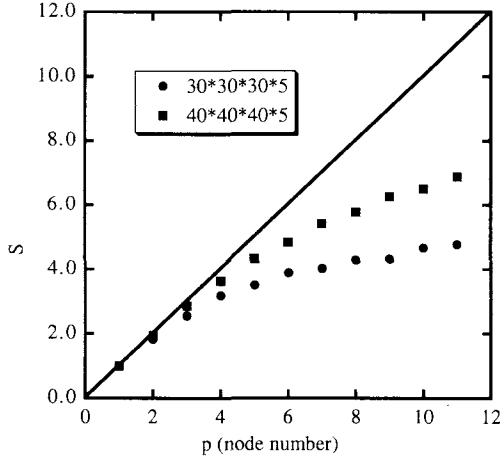


図-7 スピードアップ S と node 数 p の関係

次に、並列計算におけるスピードアップに関して構造格子の場合と比較を行い、考察を加える。構造格子を用いて移流拡散方程式を並列的に計算する場合には、計算時間 T_c は次式で近似される¹³⁾。

$$T_c \approx k_1 \frac{N_c}{p} + k_2 \frac{N_m}{p} \quad (23)$$

ここで、 N_c は全計算格子点数、 N_m は全重合格子点数である。ここに、重合格子点は本報の重合セルに対応するものである。 k_1 と k_2 は計算機環境に応じて定まる定数である。式 (23) 右辺第 1 項は 1 node あたりの計算負荷を表し、第 2 項は通信の負荷を表す。式 (23) では、通信の負荷は 1 node あたりの重合格子点数に比例するという仮定に基づいている。これより、スピードアップ S は次式で表される。

$$S = \frac{k_1 \gamma_{cm} p}{k_1 \gamma_{cm} + k_2} \quad (24)$$

ここに、 $\gamma_{cm} = N_c / N_m$ である。なお、 γ_{cm} は node 数 p により変化するので、式 (24) は、 S と p が必ずしも線形関係にあることを示すものではない。式 (24) で表されるスピードアップは、構造格子における並列計算の実測結果をほぼ再現することが示されている¹³⁾。

本報で示した非構造格子における並列計算では、構造格子の場合と比較して通信相手となる subdomain 数

が増加するなど、通信の負荷が増大することが予想される。このため、式 (23) で仮定された通信の負荷の表現を一般化して、計算時間を次式のように表す。

$$T_c(N_c, N_m, p) \approx k_1 \frac{N_c}{p} + k_4 N_m p^{\alpha-1} \quad (25)$$

ここで、 k_4 は計算機環境により定まる定数、また α は一般に $0 \leq \alpha \leq 1$ の範囲の値を取ると考えられる定数である。 $\alpha = 1$ の場合には、1 node あたりの通信の負荷は、全重合格子点数、あるいは全重合セル数に比例することを意味し、式 (23) よりも通信の負荷は大きい。 $\alpha = 1$ の場合には、 $\gamma_{cmp} \equiv \gamma_{cm}/p$ と定義すると、スピードアップは次式で表される。

$$S = \frac{k_1 \gamma_{cmp} p}{k_1 \gamma_{cmp} + k_4} \quad (26)$$

非構造格子を用いる本報の並列計算の実測結果から、スピードアップ S をプロセッサ数 p で除した値である S' と γ_{cmp} の関係を求めた結果を図-8 に示す。

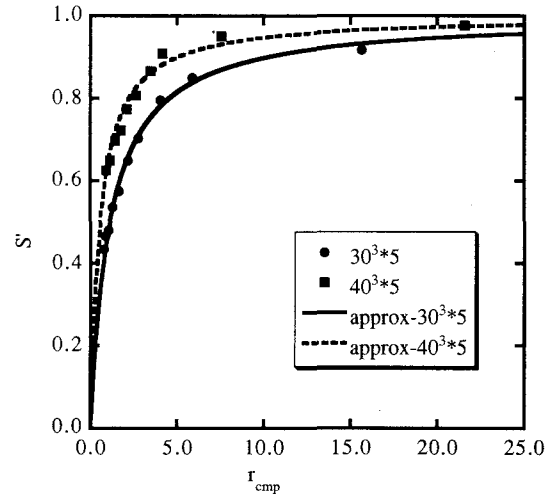


図-8 $S' (= S/p)$ と γ_{cmp} の関係

図-8 には、式 (26) から得られた近似曲線 approx-30, approx-40 も合わせて示した。これらの k_4/k_1 の平均値はそれぞれ 1.13 および 0.56 である。実測結果は近似曲線とほぼ一致する。このように、非構造格子を用いる場合には、node 数 p が増えるにつれて通信相手の node 数も増加し、通信に必要な node の組み合わせが複雑になるために、通信の負荷が増大すると考えられる。以上より、非構造格子を用いる場合に高いスピードアップ S を得るには、適切な領域分割で重合セル数 N_m を最小にすることと、計算における通信量を軽減することが重要である。前者は領域分割法の問題であり、後者は計算法とプログラミングに関係する課題であるが、今後は後者に重点をおいた検討を進める予定である。

4.3 曲がりダクト流れへの適用

提案された計算法を、3次元ダクト流れに適用し、計算結果を Humphrey¹⁴⁾らによる実験結果と比較する。計算領域は図-9に示すような、90度の曲がりを有するダクトである。ダクトの境界形状は比較的単純で、一般座標形を用いた構造格子による解法も適用可能であるが、精度の高い実験結果が得られていることから、上記の曲がりダクト流れを計算対象に選定した。

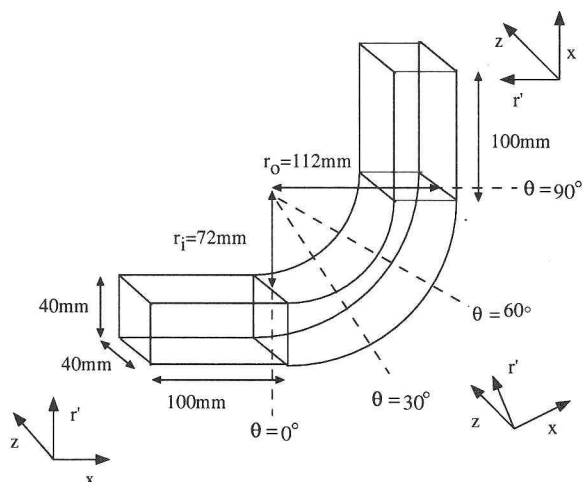


図-9 ダクト流れの計算領域

ダクト断面は一辺 40 mm の正方形であり、曲がりの曲率半径は内側が $r_i = 72$ mm、また外側が $r_o = 112$ mm である。計算では、曲がりの両端に長さ 100 mm の直線ダクト部分を設けた。座標系は、流下方向に x 軸、横断方向に z 軸をとる。また、 z' 軸を $z' = z/z_{(1/2)}$ とし、 r' 軸を曲がりの中心方向へ $r' = (r - r_o)/(r_i - r_o)$ と定義する。ここに $z_{(1/2)} = 20$ mm である。図-10に計算領域に対して生成した計算セルを示す。

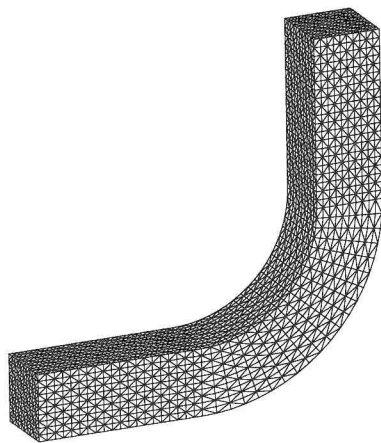


図-10 ダクト流れの格子配置

計算対象とした流れのレイノルズ数は 800 である。流速の境界条件はダクト壁面で 0、ダクト流出口では流速勾配を 0 とする。ダクト流入口の流速分布を定めるため、直線ダクトにおいて流速の境界条件を周期境界条件とした計算を行い、その定常解を求めた。計算で得られた圧力分布を図-11、またダクト断面 $\theta = 60^\circ$ における 2 次流の流速ベクトル分布を図-12に示す。

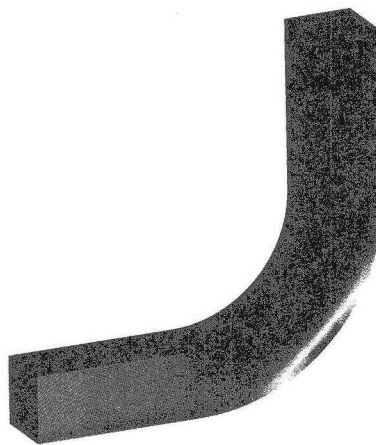


図-11 ダクト流れの圧力分布

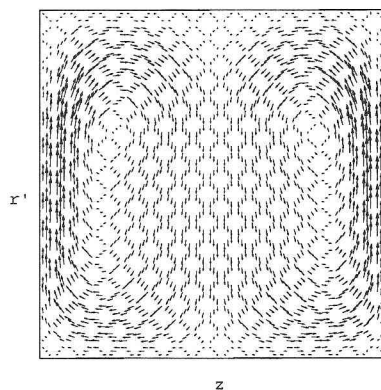


図-12 断面 $\theta = 60^\circ$ での 2 次流分布

実験結果と同様に、左右対称な一対の渦が形成されている。また、図-13、図-14にはそれぞれ、ダクト断面 $\theta = 30^\circ$ および 60° における u_n^+ の分布を示す。ここに、 u_n^+ は実験結果の断面平均流速 $u_m = 19.8$ (mm/s) で正規化した流速である。これらの図中には Humphrey らの実験結果を合わせて示した。計算結果では、曲がり部分の流れの傾向は概ね再現されている。しかし、ダクト壁面付近 $r' = 0.1$ および 0.9 などの u_n^+ の値は、実験結果との相違が見られる。これは、移流項が 1 次精度で扱われていること、また壁面近傍で十分な分解能を有する格子配置がなされていないことなどが原因と考えられる。この点に関しては、移流項の計算精度の向上と境界付近で細い格子配列となる適当な格子生成法の検討が必要である。

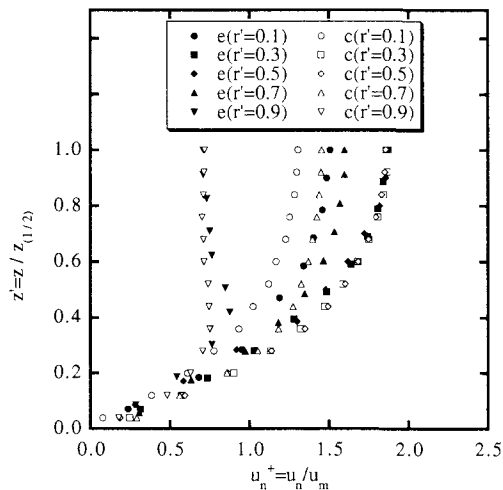


図-13 断面 $\theta = 30^\circ$ の x 軸方向流速分布 (e は実験, c は計算)

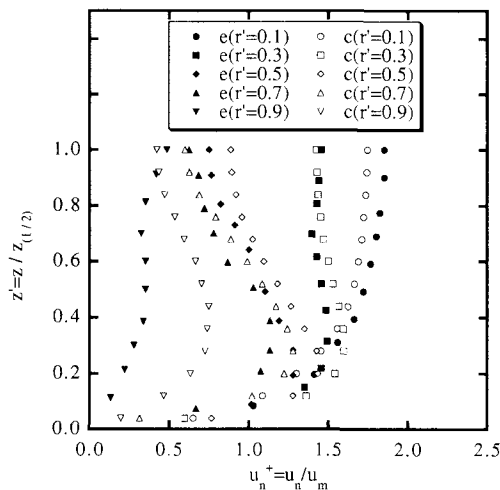


図-14 断面 $\theta = 60^\circ$ の x 軸方向流速分布 (e は実験, c は計算)

5. おわりに

積分領域を適切に設定することにより, 3次元非構造格子を用いた有限体積法による流体計算法に C-HSMAC 法を導入し, その検証を行った. C-HSMAC 法は, 構造格子で示されたように連続性の誤差を効率よく制御可能な圧力解法であり⁷⁾, 3次元非構造格子でも同様の計算が可能であることが示された. 本手法は移動境界問題や物質の輸送現象など, 保存性を精度よく満足することが必要な計算に有効であると考えられる. 本報では, 上記の解法を並列化し, その有効性について考察を加えた. 今後, 移流項に対するスキームおよび格子生成法等に検討を加えることにより, 本計算手法は大規模かつ実用的な流体計算に役立つと考えられる.

参考文献

- 1) 藤田一郎, 椿涼太. 中小都市河川に設置された側岸凹部構造物の非構造格子有限体積法による影響評価. 水工学論文集, Vol. 47, pp. 523-528, 2003.
- 2) 前野詩朗, 小川信. 非構造格子有限体積法による水理構造物周辺流れの数値解析. 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 857-864, 2003.
- 3) 牛島省, 瀬津家久. 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法. 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19, 2002.
- 4) C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 5) 奥山洋平, 牛島省. 非構造コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算の圧力解法に関する考察. 水工学論文集, Vol. 48, pp. 703-708, 2004.
- 6) 牛島省, 竹村雅樹, 瀬津家久. コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 7) 牛島省, 奥山洋平. 非圧縮性流体計算における C-HSMAC 法と SOLA 法の収束特性. 土木学会論文集, No. 747/II-65, pp. 197-202, 2003.
- 8) 牛島省, 奥山洋平, 瀬津家久. コロケート格子配置に基づく 3 次元非圧縮性流体の陰的計算アルゴリズムの構築とその並列化. 応用力学論文集, Vol. 6, pp. 185-192, 2003.
- 9) 牛島省, 奥山洋平, 竹村雅樹, 瀬津家久. 3 次元一般座標系における圧力場の並列計算法の提案. 水工学論文集, Vol. 47, pp. 385-390, 2003.
- 10) 檜山和男, 玉井典. 非構造格子に基づく大規模非圧縮性粘性流れ解析のための超並列計算法. 土木学会論文集, Vol. 668/I-54, pp. 43-53, 2001.
- 11) 檜山和男, 西村直志, 牛島省. 並列計算法入門. 丸善株式会社, 2003.
- 12) U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- 13) 牛島省, 瀬津家久, 奥山洋平. 領域分割法を用いた QSI スキームによる移流拡散方程式の並列計算法. 水工学論文集, Vol. 46, pp. 415-420, 2002.
- 14) J. A. C. Humphrey, A. M. K. Taylor, and J. H. Whitelaw. Laminar flow in a square duct of strong curvature. *J. Fluid Mech.*, Vol. 83, pp. 509-527, 1977.

(2004 年 4 月 16 日 受付)