

気泡関数を用いた非圧縮性粘性流れ解析 のための2レベル-3レベル有限要素法

TWO-LEVEL THREE-LEVEL FINITE ELEMENT METHOD
FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW ANALYSIS BASED ON BUBBLE FUNCTIONS

松本純一*

Junichi MATSUMOTO

*正会員 工博 産業技術総合研究所 先進製造プロセス研究部門, PRESTO, JST (〒305-8564 つくば市並木1-2-1)

A new finite element formulation with bubble functions for the incompressible Navier-Stokes equations are proposed in this paper. As the numerical approach, the spacial discretization is applied the mixed interpolations for velocity and pressure fields by the bubble element and linear element, respectively. Two-level three-level finite element approximation based on bubble functions is used for the discretization. To verify applicability of presented method, standing vortex problem and cavity flow are performed for the numerical examples.

Key Words : bubble functions, incompressible Navier-Stokes equations, two-level three-level finite element approximation

1. はじめに

非圧縮 Navier-Stokes 方程式を代表とする移流拡散タイプの方程式を、対称的な重み付けをする通常の Galerkin 法で解析すると、移流の効果が卓越する問題では、その解に数値振動が現れることが知られている。この問題点を解決するための手法として、上流側の節点に重みを付ける Petrov-Galerkin 法¹⁾があり、非圧縮 Navier-Stokes 方程式を解く場合には、この手法を一般化した安定化有限要素法²⁾³⁾が提案されている。

近年、要素境界上で0となり、要素内のみに値を持つ気泡関数を用いて、要素の C^0 連続性を確保する適合型の気泡関数 (bubble function) を一次要素に加えた通常の Bubnov-Galerkin 型の有限要素法を用いた近似が、ある種の問題で安定化有限要素法と等価となることが明らかとなっている⁴⁾⁵⁾⁶⁾。この等価性は、気泡関数の自由度を要素毎に消去する、いわゆる静的縮約 (static condensation) という操作によって得られた有限要素方程式を考察することによって示される。定常移流拡散方程式では、気泡関数要素は、安定化有限要素法の一つである SUPG(Streamline Upwind / Petrov Galerkin) 法¹⁾に等価となる⁴⁾⁷⁾⁸⁾ため、気泡関数を変化させて適切な数値粘性を導入する正規化気泡関数要素 (Scaled Bubble Element) が提案されている。また、Stokes 方程式においても、流速場に対して気泡関数要

素を用い、圧力場に対しては一次要素による、MINI 要素と呼ばれる要素を用いた混合型有限要素法による近似は、安定化有限要素法の一つである SUPG 法を PSPG(Pressure Stabilizing / Petrov Galerkin) 法³⁾と組み合わせた手法から導かれるものと等価となる⁵⁾。このことから、正規化気泡関数要素を MINI 要素の気泡関数として適用し、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する混合型有限要素法を考えることができる。山田⁹⁾は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する MINI 要素を用いた混合型有限要素法として、気泡関数に P 型正規化気泡関数を適用する手法を提案している。しかしながら、気泡関数における安定化作用には限界があり、Stokes 方程式では、気泡関数の圧力場に対する安定化作用は、かならずしも十分ではないことが指摘されている¹⁰⁾¹¹⁾。

一方、気泡関数の安定化作用の限界を回避する解法が、最近、開発されてきている¹²⁾¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾。これらの解法は、大きく分けて二つに分類される。

一つは、重心点のみの安定項を導入することによって、気泡関数の数値不安定性を回避する用法¹²⁾¹³⁾¹⁴⁾¹⁷⁾である。文献¹²⁾¹⁴⁾は、それぞれ気泡関数要素の二つの表現形式に関して定式化を行い、えられた変分方程式に対して、重心点のみの粘性項を付加した解法である。文献¹³⁾は、気泡関数要素の定式化について、気泡関数にのみ Streamline-Upwind 型の Petrov-Galerkin 近似を

採用して、移流項から上流方向の重心点のみの粘性項を導出する解法である。文献¹⁷⁾は、文献¹²⁾¹⁴⁾を拡張して、気泡関数による2レベル¹⁹⁾-3レベル²⁰⁾²¹⁾の有限要素近似を採用し、従来、付加していた重心点のみの粘性項を、変分方程式の定式化より、形式上、導入した方法である。文献¹³⁾の問題点としては、移流項から上流方向の重心点のみの粘性項を導出するため、Stokes方程式への適用ができない点である。また、Petrov-Galerkin近似を採用していることから、非定常解析においては、質量行列からも、安定化項が導出され、重心点のみの粘性項を付加した形式にはならない。文献¹⁷⁾の問題点としては、3レベルでの気泡関数を、具体的には定義しないで(仮想的に定義して)、重心点のみの粘性項を導入しているため、実際には、そのような気泡関数が、存在するかは、示されていないといった点がある。

もう一つは、気泡関数による2レベル Petrov-Galerkin 近似を採用し、重心点のみの粘性項の導入に頼らず、気泡関数の形状を変化させて、気泡関数の数値不安定性を回避する用法である¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁸⁾。この解法は、Navier-Stokes 方程式、Stokes 方程式にも適用が可能である。特徴としては、気泡関数の形状を変化させるために、非定常解析においては質量行列の修正が必要となる。

本研究では、文献¹⁷⁾の問題点としてあげられる3レベルでの具体的な気泡関数を定義し、非定常解析においても、重心点のみの粘性項を導出できる(すなわち、質量行列の修正を行わない)、数学的に整合性のとれた2レベル-3レベルの有限要素近似を提案する。

2. 基礎方程式

非圧縮粘性流れにおける基礎方程式は以下の運動方程式と連続式によって表される。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

u_i , p は流速, 圧力, また $\nu = 1/Re$ であり, Re はレイノルズ数である。境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 に分けられ, 以下の境界条件が規定される。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p \delta_{ij} + \nu (u_{i,j} + u_{j,i})\} \cdot n_j = t_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

式(4)の δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数, n_j は境界 Γ_2 の外向き法線ベクトルである。

3. 気泡関数要素を用いた2レベル-3レベル有限要素近似

3.1 気泡関数要素

三角形(四面体)要素を用いた気泡関数要素は、各要素において三角形(四面体)を形成する3(4)点と重心点の4(5)つの節点を用いて図-1のように、アイソパラメトリック座標系で式(5)のように表される(表現形式1)。

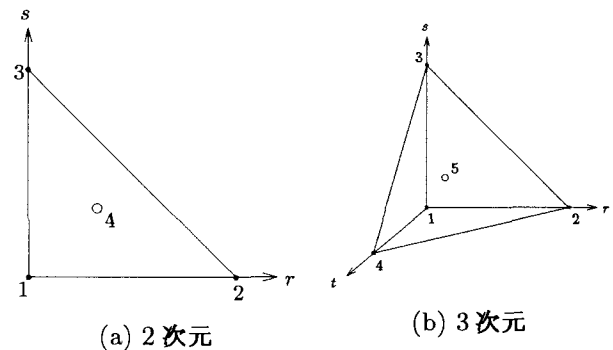


図-1 気泡関数要素

$$u_h|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^{N+1} \Phi_\alpha u_\alpha + \phi_B u_B \quad (5)$$

$$\Phi_\alpha = \Psi_\alpha - \frac{1}{N+1} \phi_B, \quad \alpha = 1 \cdots N+1 \quad (6)$$

式(6)中の Ψ_α は、2次元および3次元における一次要素を用いた場合の形状関数, N は空間次元数であり

$$\text{2次元: } \Psi_1 = 1 - r - s, \Psi_2 = r, \Psi_3 = s \quad (7)$$

$$\text{3次元: } \Psi_1 = 1 - r - s - t, \Psi_2 = r, \Psi_3 = s, \Psi_4 = t. \quad (8)$$

である。また、 ϕ_B は気泡関数である。この気泡関数は要素境界上においてその値が0となり、重心点においてその値が1となるように要素毎に定義される。この気泡関数要素の補間関数は、三角形(四面体)一次要素の補間関数と気泡関数を用いて式(9)のように書き換えることができる(表現形式2)。

$$u_h|_{\Omega_e} = \bar{u}_h|_{\Omega_e} + u'_h|_{\Omega_e} \quad (9)$$

$$\bar{u}_h|_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^{N+1} \Psi_\alpha u_\alpha \quad (10)$$

$$u'_h|_{\Omega_e} = \phi_B u'_B \quad (11)$$

$$u'_B = u_B - \frac{1}{N+1} \sum_{\alpha=1}^{N+1} u_\alpha. \quad (12)$$

3.2 ξ 乗気泡関数

本研究では、図-2に示した三角形(四面体)の要素領域をその重心点を用いて3(4)つの小三角形(小四面体) w_i に分割する ξ 乗気泡関数($0 < \xi < \infty$)を用いる。 ξ 乗気泡関数はこの小三角形(小四面体)ごとアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ ($\{r, s, t\}$)を用いて次のように定義される。

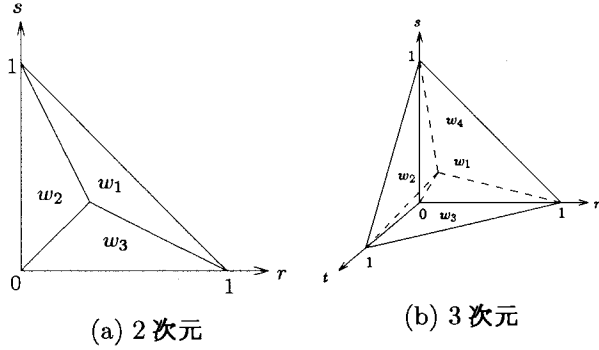


図-2 気泡関数

$$\phi_B^\xi = \begin{cases} 3^\xi (1-r-s)^\xi & \text{in } w_1 \\ 3^\xi r^\xi & \text{in } w_2 \\ 3^\xi s^\xi & \text{in } w_3 \end{cases} \quad (13)$$

$$\phi_B^\xi = \begin{cases} 4^\xi (1-r-s-t)^\xi & \text{in } w_1 \\ 4^\xi r^\xi & \text{in } w_2 \\ 4^\xi s^\xi & \text{in } w_3 \\ 4^\xi t^\xi & \text{in } w_4 \end{cases} \quad (14)$$

3.3 2レベル-3レベル有限要素近似⁽¹⁷⁾⁽²²⁾

近似空間に2レベル、重み空間に3レベルを採用した2レベル-3レベル有限要素近似を行う。本研究で提案する2レベル-3レベル近似に基づいた気泡関数要素の定式化では、次の1次要素の有限要素空間 \bar{V}_i^h, Q^h と気泡関数の空間 $V_i^{h'}, \hat{V}_i^{h'}$ を用いる。

$$\bar{V}_i^h = \{\bar{v}_i^h \in (C_0^0(\Omega))^2, \bar{v}_i^h|_{\Omega_e} \in (P1(\Omega_e))^N\} \quad (15)$$

$$V_i^{h'} = \{v_i^{h'} \in (C_0^0(\Omega))^2, v_i^{h'}|_{\Omega_e} \in \phi_B^\xi v_{Bi}', v_{Bi}' \in \mathbf{R}^N\} \quad (16)$$

$$\hat{V}_i^{h'} = \{\hat{v}_i^{h'} \in (C_0^0(\Omega))^2, \hat{v}_i^{h'}|_{\Omega_e} \in \varphi_B^{v_i} v_{Bi}', v_{Bi}' \in \mathbf{R}^N\} \quad (17)$$

$$Q^h = \{q^h \in C_0^0(\Omega), q^h|_{\Omega_e} \in P1(\Omega_e), \int_{\Omega} q^h d\Omega = 0\} \quad (18)$$

$\phi_B^\xi, \varphi_B^{v_i}$ は要素領域 Ω_e をコンパクトな台とする2レベルでの気泡関数、3レベルでの気泡関数であり、 $V_i^{h'}$ 、 $\hat{V}_i^{h'}$ は気泡関数による近似空間に対応している。有限要素空間として速度場に対して $V_i^h = \bar{V}_i^h \oplus V_i^{h'}$ を圧力場に対して Q^h を用いることにより、有限要素近似

解 $(u_i^h, p^h) \in V_i^h \times Q^h$ を見いだす次の近似問題が得られる。

$$\langle \bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, \bar{v}_i^h \rangle + \langle p_{,i}^h, \bar{v}_i^h \rangle - \langle \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j}, \bar{v}_i^h \rangle = f_i \quad \forall \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h \quad (19)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (20)$$

$\langle u, v \rangle = \sum_{e=1}^{N_e} \langle u, v \rangle_{\Omega_e} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} uv d\Omega$ であり、 N_e は要素数である。流速場に対して V_i^h に属する近似解 u_i^h と $\hat{V}_i^h = \bar{V}_i^h \oplus V_i^{h'} \oplus \hat{V}_i^{h'} = V_i^h \oplus \hat{V}_i^{h'}$ に属する重み関数 \bar{v}_i^h は1次要素による補間関数の近似空間の元 $\bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h$ および気泡関数による近似空間の元 $u_i^{h'}, v_i^{h'} \in V_i^{h'}$ 、 $\hat{v}_i^{h'} \in \hat{V}_i^{h'}$ を用いて次のように表現できる。

$$u_i^h = \bar{u}_i^h + u_i^{h'}, \quad \hat{v}_i^h = \bar{v}_i^h + v_i^{h'} + \hat{v}_i^{h'} = v_i^h + \hat{v}_i^{h'} \quad (21)$$

ここで、

$$\bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h, \quad u_i^{h'} = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_B^\xi u_{Bi}' \in V_i^{h'}$$

$$v_i^{h'} = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_B^\xi v_{Bi}' \in V_i^{h'}, \quad \hat{v}_i^{h'} = \sum_{e=1}^{N_e} \varphi_B^{v_i} v_{Bi}' \in \hat{V}_i^{h'} \quad (22)$$

である。気泡関数要素を適用した有限要素方程式は、以下のように書きかえることができる。

$$\langle \bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, \bar{v}_i^h \rangle + \langle p_{,i}^h, \bar{v}_i^h \rangle - \langle \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j}, \bar{v}_i^h \rangle + \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \nu_{jj}^{v_i'} \langle u_{i,j}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} + \nu_{ij}^{v_i'} \langle u_{j,i}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} \right\} = f_i \quad \forall \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h \quad (23)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (24)$$

式(23)の左辺第5項、第6項は、

$$\begin{aligned} & \nu_{jj}^{v_i'} \langle u_{i,j}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} + \nu_{ij}^{v_i'} \langle u_{j,i}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} \\ & := \langle u_i^h + u_j^h u_{i,j}^h + p_{,i}^h - \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j} - f_i, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} v_{Bi}' \end{aligned} \quad (25)$$

と仮定する。 $\nu_{jj}^{v_i'} \langle u_{i,j}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e}$ 、 $\nu_{ij}^{v_i'} \langle u_{j,i}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e}$ は気泡関数による安定化作用を制御する項である。

有限要素方程式(23),(24)の弱形式を適用した有限要素方程式は、最終的に式(26),(27)のように表すことができる。

$$\langle \bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, \bar{v}_i^h \rangle - \langle p_{,i}^h, \bar{v}_i^h \rangle + \langle \nu(\bar{u}_{i,j}^h + \bar{u}_{j,i}^h), \bar{v}_i^h \rangle + \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ (\nu + \nu_{jj}^{v_i'}) \langle u_{i,j}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} + (\nu + \nu_{ij}^{v_i'}) \langle u_{j,i}^{h'}, v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} \right\}$$

$$= \langle f_i, v_i^h \rangle + \langle t_i, v_i^h \rangle_{\Gamma} \quad \forall v_i^h \in V_i^h \quad (26)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (27)$$

安定化作用制御項の安定化制御パラメータ $\nu_{jj}^{v_i}, \nu_{ij}^{v_i}$ は、非定常問題における Navier-Stokes 方程式と安定化有限要素法との関係²³⁾から次式によって決定する。

$$\begin{aligned} & (\nu + \nu_{jj}^{v_i}) \langle u_{i,j}^h, v_{i,j}^h \rangle_{\Omega_e} + (\nu + \nu_{ij}^{v_i}) \langle u_{j,i}^h, v_{i,j}^h \rangle_{\Omega_e} \\ &= \frac{\langle \phi_B^\xi, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{A_e} \tau_{eS}^{-1} u'_{Bi} v'_{Bi} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)の τ_{eS} は、安定化パラメータ (行列) であり、

$$\tau_{eS} = \tau_{eS} \delta_{ij}, \quad \tau_{eS} = \left[\left(\frac{2|u_i|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

h_e : 各要素の代表長さ, A_e : 各要素の面積

である。

3.4 安定化作用制御項の導出

前節では、3 レベルの気泡関数が作用している項を式(25)と仮定して安定化作用制御項を導入した。しかしながら、3 レベルの気泡関数として普通の気泡関数を採用した場合には、一般的に式(25)の左辺の形にはならない。本節では、3 レベルの気泡関数に、式(25)の左辺の形となる条件を考慮して、具体的な3 レベル気泡関数を示す。3 レベル気泡関数に式(29)、式(30)の条件を定義する。

$$\langle \phi_B^\xi, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (29)$$

$$\langle \Psi_\alpha, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} = 0, \quad \alpha = 1 \cdots N+1 \quad (30)$$

式(30)より、次式が成立する。

$$\langle 1, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N+1} \Psi_\alpha, \varphi_B^{v_i} \right\rangle_{\Omega_e} = \sum_{\alpha=1}^{N+1} \langle \Psi_\alpha, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (31)$$

式(29)~式(31)の関係を式(25)に使用すると、以下のように2レベル、3レベルの気泡関数で形成される粘性項のみの項となる。

$$\begin{aligned} & \langle u_i^h + u_j^h u_{i,j}^h + p_i^h - \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j} - f_i, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} \\ &= \nu \langle \phi_{B,j}, \varphi_{B,j}^{v_i} \rangle_{\Omega_e} u'_{Bi} + \nu \langle \phi_{B,i}, \varphi_{B,j}^{v_i} \rangle_{\Omega_e} u'_{Bj} \end{aligned} \quad (32)$$

本研究では、式(29)、式(30)を満足する3レベルの気泡関数として、次式を提案する。

$$\varphi_B^{v_i} = \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \varphi_{Bk} \quad (33)$$

$$\varphi_{Bk} = \frac{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl} \varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}}}{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl}}, \quad \beta_{kN+3} = 1 \quad (34)$$

N_τ は、安定化有限要素法で使用される安定化パラメータ (行列) τ_{eS} の元数であり、 $\varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}}$ は以下のような気泡関数である。

$$\varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}} = \begin{cases} 3^{\eta_{kl}^{w_1}} (1-r-s)^{\eta_{kl}^{w_1}} & \text{in } w_1 \\ 3^{\eta_{kl}^{w_2}} r^{\eta_{kl}^{w_2}} & \text{in } w_2 \\ 3^{\eta_{kl}^{w_3}} s^{\eta_{kl}^{w_3}} & \text{in } w_3 \end{cases} \quad (35)$$

$$\varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}} = \begin{cases} 4^{\eta_{kl}^{w_1}} (1-r-s-t)^{\eta_{kl}^{w_1}} & \text{in } w_1 \\ 4^{\eta_{kl}^{w_2}} r^{\eta_{kl}^{w_2}} & \text{in } w_2 \\ 4^{\eta_{kl}^{w_3}} s^{\eta_{kl}^{w_3}} & \text{in } w_3 \\ 4^{\eta_{kl}^{w_4}} t^{\eta_{kl}^{w_4}} & \text{in } w_4 \end{cases} \quad (36)$$

上記の気泡関数を導入することにより、以下の関係式を導くことができる。

$$\begin{aligned} \nu \langle \phi_{B,i}^\xi, \varphi_{B,j}^{v_i} \rangle_{\Omega_e} &= \nu \langle \phi_{B,i}^\xi, \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \varphi_{Bk,j} \rangle_{\Omega_e} = \\ \nu \langle \phi_{B,i}^\xi, \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \frac{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl} \varphi_{Bkl,j}^{\eta_{kl}}}{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl}} \rangle_{\Omega_e} &= \nu_{ij}^{v_i} \langle \phi_{B,i}^\xi, \phi_{B,j}^\xi \rangle_{\Omega_e} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、

$$\nu_{ij}^{v_i} = \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \nu_{ijk} \quad (38)$$

であり、 $\nu_k^{v_i}$ は任意に設定できるパラメータ、 ν_{ijk} は以下のようになる。

$$\nu_{ijk} = \frac{\prod_{m=-1}^{N-2} (2\xi + m)}{\xi \sum_{m=1}^{N+1} (\Psi_{m,i} \Psi_{m,j})}$$

$$\sum_{l=1}^{N+3} \frac{\nu \beta_{kl}}{\sum_{m=1}^{N+3} \beta_{km}} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \frac{\eta_{kl}^{w_m} (\Psi_{m,i} \Psi_{m,j})}{\prod_{n=-1}^{N-2} (\xi + \eta_{kl}^{w_m} + n)} \quad (39)$$

上式をみると、 ν が掛かっており、一見、 $\nu = 0$ の場合には、この項は零になってしまうと考えられる。しかしながら、 $\nu = 0$ のときは、 $\xi = \frac{3}{4}$ 、 $\eta_{kl}^{w_l} = \frac{1}{4} (l = 1 \cdots N+1)$ を採用すると、

$$\begin{aligned} \nu_{ijk} &= \frac{\prod_{m=-1}^{N-2} (2\xi + m)}{\xi \sum_{m=1}^{N+1} (\Psi_{m,i} \Psi_{m,j})} \cdot \sum_{l=1}^{N+1} \frac{\beta_{kl}}{\sum_{m=1}^{N+3} \beta_{km}} \\ &\quad \cdot \frac{\eta_{kl}^{w_l} (\Psi_{l,i} \Psi_{l,j})}{\prod_{n=0}^{N-2} (\xi + \eta_{kl}^{w_l} + n)} \quad \nu = 0 \\ &= \frac{1}{3} \frac{\prod_{m=-1}^{N-2} (\frac{3}{2} + m)}{\sum_{m=1}^{N+1} (\Psi_{m,i} \Psi_{m,j})} \sum_{l=1}^{N+1} \frac{\beta_{kl}}{\sum_{m=1}^{N+3} \beta_{km}} \frac{(\Psi_{l,i} \Psi_{l,j})}{\prod_{m=0}^{N-2} (1+m)} \end{aligned} \quad (40)$$

となり、零とはならない。

η_{kl}^{wm} の値としては、例えば、2次元・3次元ともに k, l, m の値を 0.1 ずつ増加させて

$$2D: \eta_{11}^{w1} = 1.1, \eta_{11}^{w2} = 1.2, \dots, \eta_{15}^{w3} = 2.5, \\ \eta_{21}^{w1} = 2.6, \eta_{21}^{w2} = 2.7, \dots, \eta_{25}^{w3} = 4.0 \quad (41)$$

$$3D: \eta_{11}^{w1} = 1.1, \eta_{11}^{w2} = 1.2, \dots, \eta_{11}^{w4} = 3.4, \\ \eta_{21}^{w1} = 3.5, \eta_{21}^{w2} = 3.6, \dots, \eta_{26}^{w4} = 5.8, \\ \eta_{31}^{w1} = 5.9, \eta_{31}^{w2} = 6.0, \dots, \eta_{36}^{w4} = 8.2 \quad (42)$$

と設定すると、 β_{kl} をすべて求めることができる。さらに、以下に示す具体的な要素座標値を設定して、式(28)より、変数 ν_k^{ui} を解くための連立一次方程式を導出すると、逆行列が存在していることが示せる。

$$2D: 1(0,0), 2\left(1, \frac{1}{2}\right), 3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad (43)$$

$$3D: 1(0,0,0), 2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), 3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right), 4\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right) \quad (44)$$

以上により、2レベル-3レベル有限要素近似を採用して、非定常解析についても、重心点のみに粘性項を、導出する定式化が存在することを本研究では示すことができた。

数値解析上は、安定化作用を制御するパラメータ ν_k^{ui} を如何に効率よく計算するかが、計算効率の良い解法を考える上で重要となる。本手法の場合は、注目すべき点として、重心点のみの粘性項以外に、 ν_k^{ui} を使用する項 (ν_k^{ui} の関数となっている項) が出てこないため、実際には、 ν_k^{ui} を具体的に求めなくても、式(28)の左辺を式(28)の右辺に置き換えるだけで計算が可能である。したがって、本手法は、通常の気泡関数要素の定式化に対して、式(28)の左辺を式(28)の右辺に変更することができるので、定式化が非常に簡便となる。

これは、計算を安定にかつ高精度に行うための安定化項の考慮を行う手法である SUPG/PSPG 法¹⁾、BTD 法²⁾などの安定化項に比べてその数が極端に少なく、非常に定式化が簡単である。

また、気泡関数のみに Streamline-Upwind 型の Petrov-Galerkin 近似を用いる方法¹³⁾、気泡関数の形状を変化させて精度の向上をはかる方法⁹⁾¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁸⁾では、非定常解析に関して、質量行列に、安定化作用を制御するための変数が含まれているので、本手法のような置き換えはできなく、実際に制御パラメータを全要素で求めなければいけないため、これらの手法と比較しても計算上の有効性がある。

3.5 Standing Vortex 問題

解析例として、Standing Vortex 問題を取り上げる。この問題の目的は、計算手法がどの程度の数値的な散逸誤差をもつかを調べることである。非粘性流れを仮定し、初期条件として人工的な渦を発生させ計算を進める。厳密解は初期条件そのものであるが、安定な計算ならかならず解は減衰する。初期の渦がどの程度の減衰をしたかを調べることによって数値的な散逸誤差を評価する。解析領域(図-3)は、 1×1 であり、 20×20 の均等な有限要素分割を用いている。初期条件は領域の中心からの極座標 $\{r, \theta\}$ による次式によって表される。

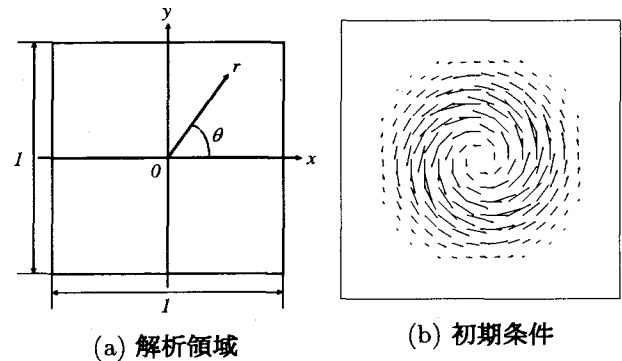


図-3 Standing Vortex Problem

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 < r < 0.4 \\ 0 & r > 0.4 \end{cases}$$

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し、連続式は完全陰的に扱い、計算効率の良い分離型解法を用いた²⁴⁾²⁵⁾。時間増分 Δt は、0.05 と設定した。計算回数は $t = 3$ まで行っている。MINI 要素(重心点の安定化項無し)と本手法を用いて比較計算を行っている。両手法の $t = 3$ の運動エネルギーの相対変化を図-4に示した。エネルギーの相対変化をみると、MINI 要素は、適切な数値粘性が導入されていないために運動エネルギー減衰が大きくなっているのに対して、本手法は適切な数値粘性が導入されているために数値的な散逸誤差が少ない結果を得ている。

3.6 Cavity 流れ

定常解を持つ問題の検証として Cavity 内の流れを取り上げる。解析領域と境界条件を図-5に示す。 $32 \times 32 \times 32$ の均等分割を行ったメッシュを用いている。計算は定常状態に収束するまで行っている。時間増分は $\Delta t = 0.001(Re = 1)$ 、 $0.25(Re = 400)$ として計算を

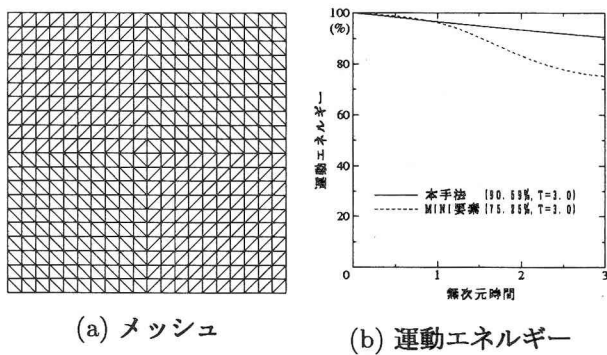


図-4 メッシュと計算結果 ($\xi = 0.75$)

行った。図-6、図-7に圧力の計算結果を示す。図-6、図-7から解るように、MINI要素(重心点の安定化項無し)を用いた場合の計算結果は、数値粘性が不足しているために圧力振動が著しく発生しているのに対して、本手法を用いた場合の計算結果は、適切な数値粘性が与えられていることから圧力振動が発生していないことが解る。

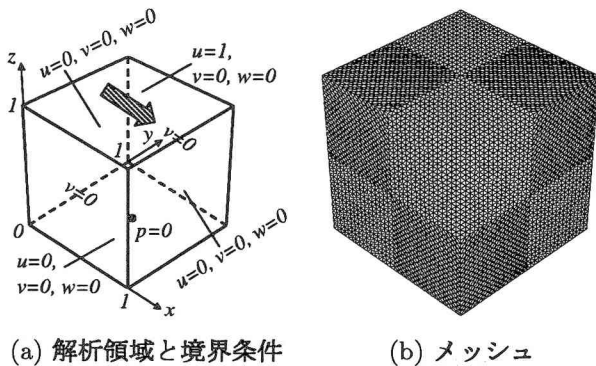


図-5 Cavity 流れ ($\xi = 0.75$)

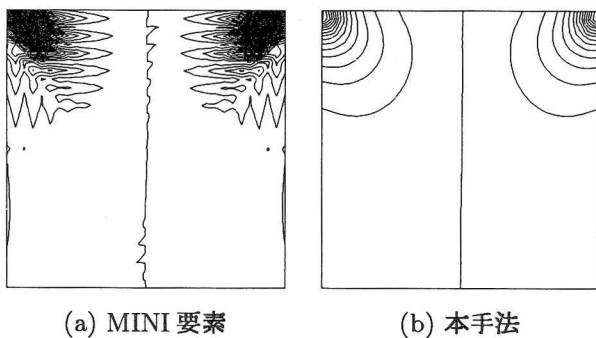


図-6 計算結果 ($Re=1, y=0.5$)

4. おわりに

本研究では、文献¹⁷⁾の問題点としてあげられる3レベルでの具体的な気泡関数を定義し、非定常解析においても、重心点のみの粘性項を導出できる、数学的に

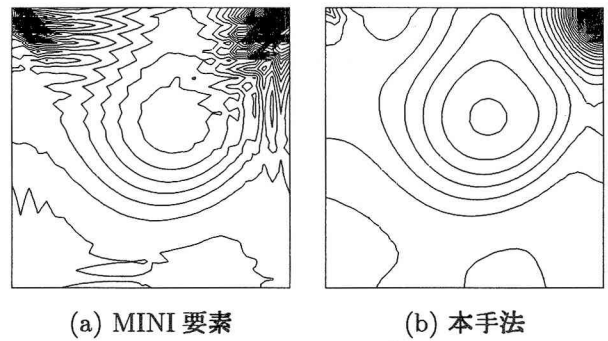


図-7 計算結果 ($Re=400, y=0.5$)

整合性のとれた2レベル-3レベルの有限要素近似を提案した。解析例として、Standing Vortex 問題、Cavity 流れを取り上げ、MINI要素(重心点の安定化項無し)に比べて、広範囲にわたるレイノルズ数の流れ現象において、計算が安定、かつ高精度に行われることを示した。

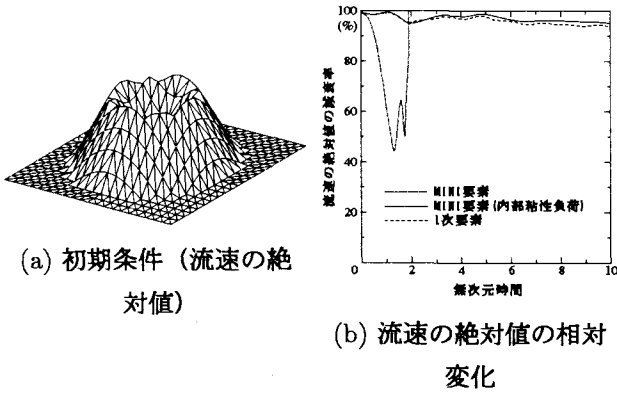
謝辞

本論文をまとめるにあたり、産業技術総合研究所の手塚明博士に貴重な御意見を頂いたことに対し、ここに感謝の意を記す。

付録 I 文献¹²⁾の解法と安定化有限要素法との関係について

付録 I1 文献¹²⁾の解法

文献¹²⁾では、Navier-Stokes 方程式に、空間方向の定式化に MINI 要素、時間方向の定式化に流速修正法に基づいた3段階テーラー・ガラーキン法を適用している。以下に文献¹²⁾の Standing Vortex 問題での計算結果を示す。図-8からわかるように、空間方向の定式化に MINI 要素、時間方向の定式化に流速修正法に基づいた3段階テーラー・ガラーキン法を使用した解法は、計算が発散する。考察として、発散した計算結果の流速の絶対値の挙動を見てみると、一度、著しくエネルギーが減衰し、その後、計算値が増幅し発散にいたっていることがわかる。いま、著しくエネルギーが減衰している時間での、流速の絶対値を図-9に示す。図-9を見ると、重心点の値が大きく振動しており、計算の数値不安定性を生み出しているのは、重心点の値であることが考察できる。そこで、この振動を要素内部で緩和させるために、気泡関数の内部点にのみ粘性項を付加し、計算を行うことを試みた。具体的な計算方法としては、3段階テーラー・ガラーキン法で中間流



標本点として (0.05, 0), (0.10, 0), (0.15, 0), (0.20, 0), (0.25, 0), (0.30, 0), (0.35, 0), (0, -0.35), (0, -0.30), (0, -0.25), (0, -0.20), (0, -0.15), (0, -0.10), (0, -0.05) の 14 点を採用

図-8 流速の絶対値の減衰による比較, $\Delta t = 0.0025$

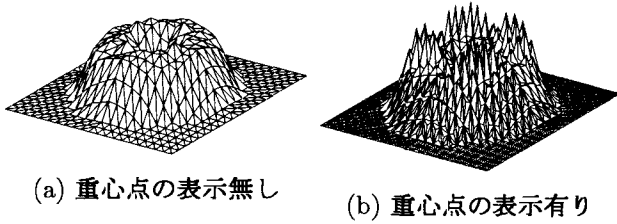


図-9 MINI 要素の計算結果, $T=0.3$

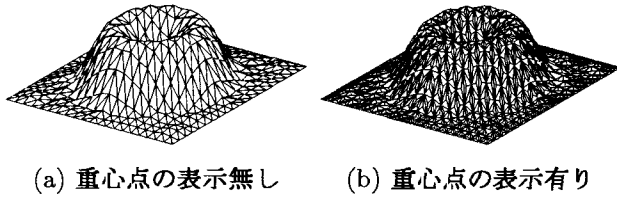


図-10 内部粘性付加の計算結果 ($\nu' = 0.063$), $T=10.0$

速 ($u_i^{n+1/3}, u_i^{n+1/2}, \tilde{u}_i$) を求める方程式に対して, 以下の式 (I.1) を付加した.

$$\nu' \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 u'_B \quad (I.1)$$

ここで, $\|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 = \langle \phi_{B,j}, \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e}$ である. 式 (I.1) を付加することによって, 図-10 のように, 重心点での激しい数値振動が緩和され, 安定に計算が実行できることが考察として解る.

付録 I2 安定化有限要素法との関係

文献¹²⁾の解法の安定化作用の効果を整理するために, 定常 Stokes 方程式にて, 安定化有限要素法との関係を考える. 表現形式 2 の記述を用いて, 安定化有限要素法との関係を見るため, 式 (I.1) の粘性項に表現形式 1 の重みを掛けた式に対して, 表現形式 2 の変数に変

形すると次式になる.

$$\nu' \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 u'_B v_B = \nu' \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 u'_B \left\{ v'_B + \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \right\} \quad (I.2)$$

上式を定常 Stokes 問題の変分方程式に付加する.

$$\nu \langle u_{i,j}^h, v_{i,j}^h \rangle - \langle p^h, v_{i,i}^h \rangle - \langle f_i, v_i^h \rangle$$

$$+ \sum_{e=1}^{N_e} \nu' \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 u'_B v'_B$$

$$+ \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\nu'}{3} \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 u'_B (v_1 + v_2 + v_3) = 0 \quad (I.3)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad (I.4)$$

式 (I.3) において, 重みの空間を一次要素と気泡関数の空間に分離して, 重みの任意性を考えると, 以下の 2 式を得る.

$$\nu \langle \bar{u}_{i,j}^h, \bar{v}_{i,j}^h \rangle - \langle p^h, \bar{v}_{i,i}^h \rangle - \langle f_i, \bar{v}_i^h \rangle$$

$$+ \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\nu'}{3} \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 u'_B (v_1 + v_2 + v_3) = 0 \quad (I.5)$$

$$(\nu + \nu') \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 u'_{Bi} - \langle p^h, \phi_{B,i} \rangle_{\Omega_e} - \langle f_i, \phi_B \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (I.6)$$

式 (I.6) より, 重心点の自由度は, 一次空間での未知量のみで, 以下のように表される.

$$u'_{Bi} := \tau_{eB} \left\{ \frac{\langle p^h, \phi_{B,i} \rangle_{\Omega_e} + \langle f_i, \phi_B \rangle_{\Omega_e}}{\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e}^2 A_e^{-1}} \right\} \quad (I.7)$$

ここで,

$$\tau_{eB} := \frac{\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{(\nu + \nu') \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 A_e} \quad (I.8)$$

は, 数値不安定性を評価する安定化パラメータである. 式 (I.7) を式 (I.5), 式 (I.4) に代入して, 最終的に次式を得る.

$$\nu \langle \bar{u}_{i,j}^h, \bar{v}_{i,j}^h \rangle - \langle p^h, \bar{v}_{i,i}^h \rangle - \langle f_i, \bar{v}_i^h \rangle =$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} \frac{\nu'}{3} \|\phi_{B,j}\|_{\Omega_e}^2 \tau_{eB} \left\{ \frac{-\langle p^h, \phi_{B,i} \rangle_{\Omega_e} - \langle f_i, \phi_B \rangle_{\Omega_e}}{\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e}^2 A_e^{-1} (v_1 + v_2 + v_3)^{-1}} \right\} \quad (I.9)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_{eB} \langle p_{i,i}^h, q_{i,i}^h \rangle_{\Omega_e} = \sum_{e=1}^{N_e} \tau_{eB} \langle f_i, q^h \rangle_{\Omega_e} \quad (I.10)$$

上式より, 文献¹²⁾の解法は, 安定化有限要素法で得られる式に対して, 式 (I.9) の右辺第一項を追加した式になっていることが解る.

付録 II β_{kl} の求め方

3 レベル気泡関数の条件式 (29), (30) に式 (33), 式 (34) を代入すると,

$$\begin{aligned} \langle \phi_B^\xi, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} &= \langle \phi_B^\xi, \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \varphi_{Bk} \rangle_{\Omega_e} \\ &= \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \langle \phi_B^\xi, \frac{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl} \varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}}}{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl}} \rangle_{\Omega_e} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\alpha, \varphi_B^{v_i} \rangle_{\Omega_e} &= \langle \Psi_\alpha, \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \varphi_{Bk} \rangle_{\Omega_e} \\ &= \sum_{k=1}^{N_\tau} \nu_k^{v_i} \langle \Psi_\alpha, \frac{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl} \varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}}}{\sum_{l=1}^{N+3} \beta_{kl}} \rangle_{\Omega_e} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

となる。式 (II.1), 式 (II.2) より次式を得る。

$$\sum_{l=1}^{N+2} \beta_{kl} \langle \phi_B^\xi, \varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}} \rangle_{\Omega_e} = - \langle \phi_B^\xi, \varphi_{BkN+3}^{\eta_{kN+3}} \rangle_{\Omega_e} \quad (\text{II.3})$$

$$\sum_{l=1}^{N+2} \beta_{kl} \langle \Psi_\alpha, \varphi_{Bkl}^{\eta_{kl}} \rangle_{\Omega_e} = - \langle \Psi_\alpha, \varphi_{BkN+3}^{\eta_{kN+3}} \rangle_{\Omega_e} \quad (\text{II.4})$$

$\alpha = 1 \cdots N+1$ なので, 式 (II.1), 式 (II.2) は, 合計 $N+2$ 個になる。一方, 各 $k (= 1 \cdots N_\tau)$ に対して, 未知量 β_{kl} の数は $l = 1 \cdots N+2$ 個となる。従って, β_{kl} についての線形の式 $N+2$ 個, 未知量 β_{kl} が $N+2$ 個となり, η_{kl} の値を設定すれば β_{kl} を求めることができる。

参考文献

- 1) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R.: Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 32, pp.199-259, 1982.
- 2) Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 59, pp.85-99, 1986.
- 3) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 95, pp.221-242, 1992.
- 4) Brezzi, F., Bristeau, M.O., Franca, L.P., Mallet, M. and Roge, G.: A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 96, pp.117-129, 1992.
- 5) Pierre, R.: Simple C^0 approximations for the computation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 68, pp.205-227, 1988.
- 6) Franca, L.P. and Farhat, C.: Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 123, pp.299-308, 1995.

- 7) Baicocchi, C., Brezzi, F. and Franca, L.P.: Virtual bubbles and Galerkin-Least-Squares type method (Ga.L.S.), *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 105, pp.125-141, 1993.
- 8) 山田 貴博, 安定化有限要素法と気泡関数要素, 計算工学講演会論文集, Vol.1, pp.167-170, 1996.
- 9) 山田 貴博, 非適合気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素スキーム, 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.411-414, 1997.
- 10) Pierre, R.: Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P_1 - P_1 element for the Stokes problem, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol.32, pp.1210-1224, 1995.
- 11) 山田 貴博: 非圧縮体に対する MINI 要素の数値不安定性, 応用力学論文集 (JSCE), 2, pp.201-209, 1999.
- 12) 松本純一・梅津剛: 気泡関数を用いた非圧縮性流体の有限要素法解析に関する一考察, 日本応用数理学会平成8年度年会, pp.46-47, 1996.
- 13) 奥村弘・松本純一・川原睦人: 安定化気泡関数要素を用いた非圧縮粘性流れの解析, 応用力学論文集 (JSCE), 2, pp.211-222, 1999.
- 14) 松本純一・梅津剛・川原睦人: 線形型気泡関数を用いた非圧縮性粘性流体解析と適応型有限要素法, 応用力学論文集 (JSCE), 2, pp.223-232, 1999.
- 15) 奥村弘, 川原睦人: 非圧縮体に対する非適合気泡関数を用いた MINI 要素による Petrov-Galerkin 有限要素法, 応用力学論文集 (JSCE), 3, pp.275-280, 2000.
- 16) 奥村弘, 川原睦人: 気泡関数要素を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する Petrov-Galerkin 有限要素法, 応用力学論文集 (JSCE), 4, pp.121-126, 2001.
- 17) Matsumoto, J. and Kawahara, M.: Shape identification for fluid-structure interaction problem using improved bubble element, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol.15, pp.33-45, 2001.
- 18) Okumura, H. and Kawahara, M.: A new stable bubble element for incompressible fluid flow based on a mixed Petrov-Galerkin finite element formulation, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol.17(4), pp.275-282, 2003.
- 19) Hughes, T.J.R., Mazzei, L. and Jansen, K.E.: Large Eddy Simulation and the variational multiscale method, *Computing and Visualization in Science*, 3, pp.47-59, 2000.
- 20) Collis, S.S.: Monitoring unresolved scales in multi-scale turbulence modeling, *Phys. Fluids*, 13, pp.1800-1806, 2001.
- 21) Gravemeier, V., Wall, W.A., Ramm, E.: A three-level finite element method for the instationary incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 193, pp.1323-1366, 2004.
- 22) 松本純一・川原睦人: 気泡関数要素を用いた GLS 型安定化有限要素法による非圧縮性粘性流体解析, 数値流体力学シンポジウム, 14, E06-4, 2000(in CD-ROM).
- 23) 松本純一・川原睦人: 非圧縮性粘性流体に対する安定化有限要素法と Least-Squares 気泡関数要素, 計算工学講演会 (JSCES), 7, pp.9-12, 2002.
- 24) 丸岡晃・松本純一・川原睦人: 四角形要素における正規化気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式の分離型有限要素法, 構造工学論文集 (JSCE), 44A, pp.383-390, 1998.
- 25) 松本純一: 安定化気泡関数有限要素法を用いた非圧縮性粘性流れにおける形状同定解析, 応用力学論文集 (JSCE), 6, pp.267-274, 2003.

(2004 年 4 月 16 日 受付)