

三次元デローニー分割法における境界表面の形成

Construction of Boundary Surface in Three-dimensional Delaunay Tetrahedrization

野島和也*・川原陸人**

Kazuya NOJIMA and Mutsuto KAWHARA

*学生会員 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a mesh generation technique based on the 3-D Delaunay triangulation and boundary surface recovery system. The Delaunay triangulation is usefully introduced as basic tool of automatic mesh generation. However, the Delaunay tetrahedrization still has problems. One of them is problem of recovery of boundary surface. In the Delaunay tetrahedrization, recovery of the boundary surface is complicated work. Using Both the Delaunay tetrahedrization and the advancing front method is make it possible to recover the surfaces. However the tetrahedra, which are generated by the advancing front method, do not satisfy the condition of Delaunay tetrahedra. It is necessary that the domain is filled with Delaunay tetrahedra, when the Delaunay tetrahedrization is carried out. As a new approach to the construction of boundary surfaces, Delaunay tetrahedrization itself is applied. Constrained Delaunay tetrahedrization is presented. This constrained Delaunay tetrahedrization provides simple and benefit system of surface recovery.

Key Words : *Delaunay Tetrahedrization, Constrained Delaunay Tetrahedrization, Boundary Surface Recovery*

1. はじめに

デローニー分割法^{1),3)}は任意に分布された節点群に対して三角形, 四面体分割することが可能な方法であり, 自動要素分割法として工学の分野で幅広く利用されている。しかしながら, 三次元に於いては未だ汎用的であるとは言えない。デローニー分割法は, その特性から生成する四面体群は凸形状となる。従って実用するためには非凸形状を表現するための工夫が必要となる。特に三次元では非凸形状の取り扱いが難しい。非凸形状に対する表面構築方法としては, 仮節点を用いる方法²⁾があり, 非常に簡単な方法により非凸物体の形状を表現することができる。

しかしながら, この仮節点による方法はデローニー分割の過程で表面が形成されていることを前提としているため, 表面形成が正しく行われていない場合は利用できない。仮節点の配置によっては, 仮節点自身によって表面を壊してしまうこともある。従って, この方法では表面形成が正しく行われるように表面上の節点を分布すること, 表面を壊さないように仮節点を配置することを要求される。特に, 薄型の物体の表面の作成時には表面が形成されないことが多く, この手法は利用できない。シームレスな要素生成を行うためには, デローニー分割過程での表面形成を正しく自動的に行う必要がある。しかしながら, デローニー四面体分割での表面の形成は困難な作業である。そこで, 本研究では三次元の要素生成に内容をしぼり, 仮節点により

表面構成が行えない場合の表面構成方法を提案する。

一般的にデローニー分割法の表面構成にはアドバンシング・フロント法が用いられるが, アドバンシング・フロント法で作成された四面体はデローニー形状を満たさない。本研究で採用したデローニー分割アルゴリズムが分割過程のいかなる時でも, 領域がデローニー形状で満たされている必要があるため, デローニー形状を保つことは, デローニー分割を継続する際に必要となる。従って, このことは境界が生成された後, デローニー分割法により細分割する際に支障をきたす。本研究で提案する様に, 表面構成にもデローニー分割法を用いることにより, 境界表面付近でもデローニー形状を保つことができる。本論文では, デローニー四面体分割に於ける, デローニー分割法を用いた境界面の再構成手法のアルゴリズムを開発し, そのために必要な拘束付デローニー分割の実現方法を提案する。簡単なモデルを用意し, 提案したアルゴリズムに従い, 要素分割, 境界面の再構成を行うことで, 本手法の検証を行なう。

2. 表面の再構成

2.1 自動要素分割手法

近年, 自動要素分割手法としてはアドバンシング・フロント法 (Advancing front method) やデローニー分割法 (Delaunay triangulation, Delaunay tetrahedrization) が用いられている。図-1 は両者の概略図である。

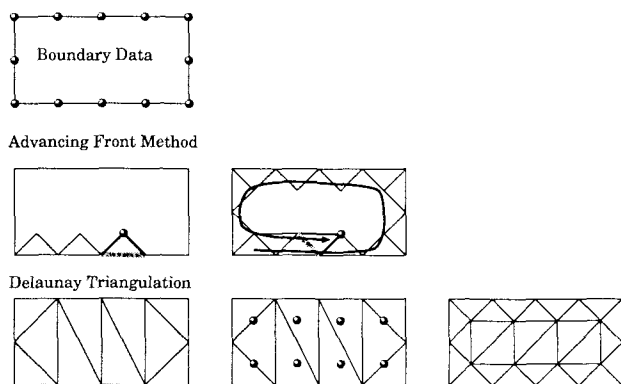


図-1 アドバンスング・フロント法とデローニー分割法

アドバンスング・フロント法は表面データから領域内側に向かって逐次節点を発生させながら要素を生成させていき、最終的に領域全体を要素で埋める手法である。表面から要素生成作業を始める為、改めて表面の形成を行う必要はない。

デローニー分割法は与えられた節点群に対して分割を行う手法である。デローニー三角形及び四面体は、節点群に対する Voronoi 図の母点を線分で結ぶことで得られる図形で、デローニー分割はこのような三角形や四面体を形成するように行われる。欠点として、非凸形状領域に対して利用することができないことが挙げられる。

境界の定義された任意形状領域に対して要素生成を行うことに関しては、アドバンスング・フロント法はとても有効な手法である。しかしながら、アドバンスング・フロント法はデローニー分割法と比較して計算時間がかかり、特に三次元要素生成時には非常に多くの時間を要する。また、場合によっては要素生成作業が破綻することがあり、ロバストな要素生成を行なう場合にはより複雑な作業を必要とする。一方、デローニー分割法は非凸領域に対する問題、表面形状の形成の問題を解決できれば、分割作業が高速であるから分割時間の短縮を考えれば、膨大な節点数と要素数を持つ三次元要素分割に対してとても有効である。本研究ではこのデローニー分割法を三次元有限要素作成に適用した。

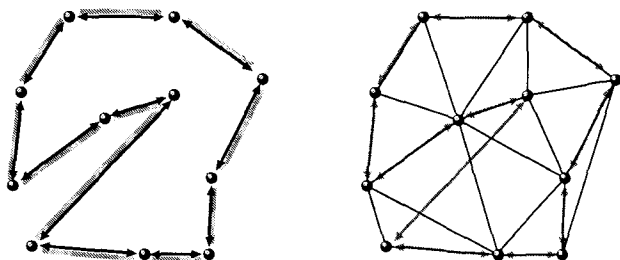


図-2 凹形状に対するデローニー分割

2.2 デローニー分割法

デローニー分割法により作成された三角形、四面体は、その外接円、球に他の三角形、四面体の頂点を含まないという性質がある。この方法を用いると、辺の長さが均等になるように分割され、最も正三角形、正四面体に近くなるように分割される。従って、デローニー形状は有限要素法で求められる要素の幾何学形状に近いものとなる。しかし、デローニー分割は任意の節点分布に対して有効であるが、分割の結果、図-2 の様に分割領域は凸形状となる。従って、非凸形状領域に対して利用するには何らかの処理を行わなければならない。

デローニー分割を行うアルゴリズムは数多く提案されている。本研究ではデローニー分割を行うにあたり、三次元拡張が容易である Bower によるアルゴリズム⁴⁾を用いた。このアルゴリズムでは、デローニー形状で満たされた空間の中に節点を追加し、この追加節点によりデローニー形状の条件を満たせなくなった要素を修正することで、分割を進める。分割作業は追加節点周辺に限られており、演算量が少なく他のアルゴリズムと比較して短い作業時間で要素分割することができる。分割作業を開始する時点で、領域がデローニー形状で満たされている必要があることから、要素分割を行う領域を包括するスーパーテトラヘドロンと呼ぶ仮四面体を導入し分割作業を開始する。

2.3 表面要素の再構成

デローニー分割法では節点配置により唯一の三角分割が得られる。ただし、いくつかの節点が同一円周上または三次元では同一球面上に複数の節点が存在する場合には、唯一に定まらない。この状態は Degeneracy(縮退)と呼ばれる。とにかく三角分割が節点配置により決まり、任意の境界辺や境界面をデローニー分割の過程で形成させることはできない。つまり、図-2 の様に、分割の結果意図した境界辺を得ることができない。この問題に対して谷口¹⁾により二次元領域に対して修正デローニー三角分割法が提案されている。デローニー分割が終了した時点で境界辺を繋ぎ直す方法である。そのアルゴリズムを引用する

二次元修正デローニー分割法¹⁾での境界辺形成アルゴリズム

- [i.] 図-3 上図に示すように、境界辺を横切る三角形要素を集め取り出す。
- [ii.] 集めた三角形要素から、ひとつの多角形を作る。
- [iii.] 多角形を境界辺により二つの多角形 A,B に分け、それぞれを要素分割する。(図-3 下図)

[iv.] [i] の要素群と [iii] で作成した要素群を入れ替える。

[v.] 操作 [i] から [iv] を全ての境界辺について行う。

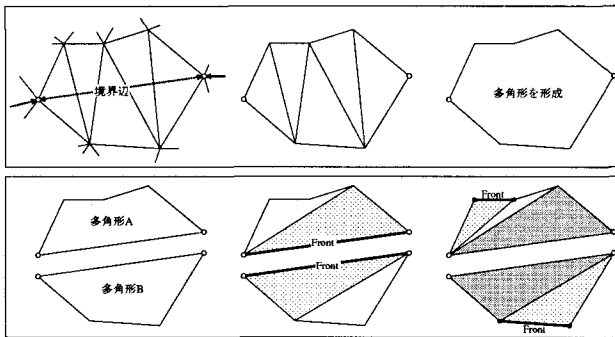


図-3 二次元修正デローニー法での表面要素の再構成

2.4 三次元における境界面の再現方法

三次元領域をデローニー分割し、境界面を再構成する場合、二次元の手法をそのまま拡張するわけには行かず、複雑な作業を加えなければならない。まず、そのまま三次元に拡張した場合を考える。分割した領域を再分割する方法は幾つか考えられる。大きく分けると、

1. 境界面の各辺をそれぞれ別々繋げることによって表面三角形を形成する方法
2. 表面三角形を直接形成する方法

となる。二次元で境界形成と同様に、辺を繋ぐことを考える。辺が横切る要素(図-4)を集め、辺の両端の節点が繋がるように要素分割を再度行えばよい。一見単純に見えるこの方法であるが、多くの問題を抱えていた。

- 確かな再分割アルゴリズムを見出せない。
- 辺だけ再現出来ても、面を貫く四面体は残る。

などである。筆者は模型を使い、この場合の要素の再分割を試みた。手順として、一番初めに行なったのは、形成したい辺とその両端にある三角面により四面体をつくることである。その後は、アドバンシング・フロント法と同様にして、面と点を結びながら四面体を作成していけば良い。しかし、初めの三角面の選び方によって、分割作業が破綻し、最後まで要素分割が行えないパターンがあった。従って、初めの三角面の選定も重要となってくるが、結局選定の決め手を見出せず、アルゴリズムを立てることが出来なかった。また、二番目にあるように辺を再生したとしても、面を再生したことにはならず、面を貫くような四面体は残ってしまい、別の作業でそれらの四面体を修正しなければならない。従って、この辺を繋ぐ方法は境界面の再生方法としては適さないと考えた。

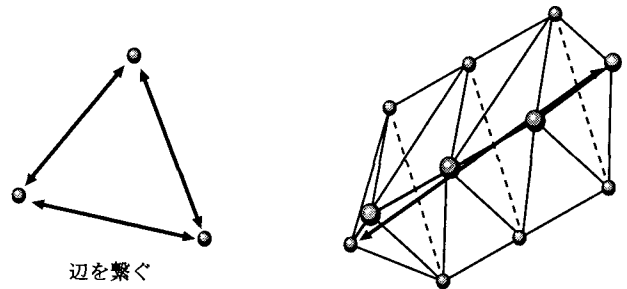


図-4 辺を繋ぐことによって面を再現

次に、直接境界面を構成する方法について考える。面を横切る要素を集め、辺の両端の節点が繋がるように要素分割を再度行えばよい。境界面を一つ仮定してそれに交わる四面体要素を集めた例を示す。図-5に示すように、二次元の時の様に集めた要素から成る多面体を境界面を挟んで二つの領域に分けることができない。さらには、三角形表面の辺の外側に多面体の空間も存在しており、二次元に比べると非常に複雑となる。

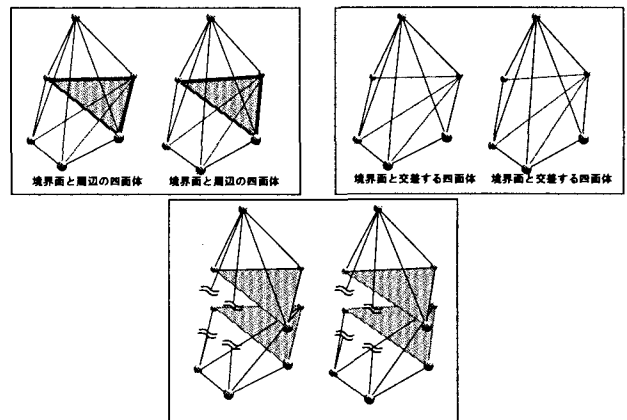


図-5 三次元における表面要素の再構成

この場合の再要素分割の方法としては、アドバンシング・フロント法が利用できる。アドバンシング・フロント法では Front と呼ばれる面と、領域内の点もしくは新しく発生した点を結んで新しい要素を作成する(図-6)。境界面の形成に利用する場合には、節点は新たに発生させずに、既に存在する点を用いる。

アドバンシング・フロント法は要素生成作業に行き詰る可能性があるという問題を持っている。図-7はアドバンシング・フロント法での要素生成過程において、どの生成パターンを取っても既存の要素と適合しなくなり、生成作業が行き詰った例である。図上側の三角柱はアドバンシング・フロント法により領域を四面体要素で埋め尽くして行く過程で、まだ四面体で埋められていない空間である。要素生成方法に従って面と点を繋げることにより四面体を作成した結果が図下側の

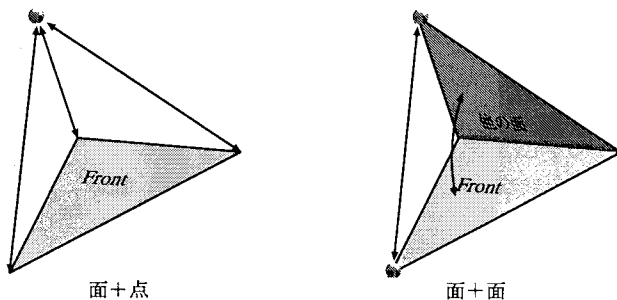


図-6 アドバンスing・フロント法での四面体の作成方法

三つの絵である。どの場合においても隣接する四面体と適合する形を得ることができない。

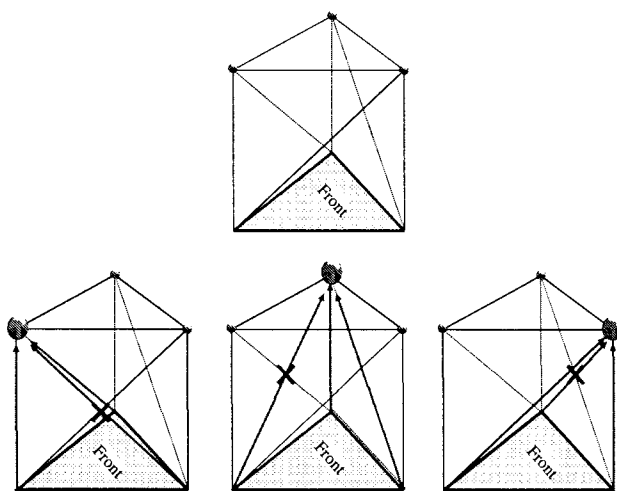


図-7 要素生成作業が行き詰った例
(アドバンスing・フロント法)

それでは、この過程にデローニー分割法を利用した場合はどうか。アドバンスing・フロント法と違って、デローニー形状が保障される点は大きなメリットとなる。作成された要素メッシュがデローニー形状を満たしたものであれば、節点を追加する作業に引き続きデローニー分割法のアルゴリズムが適用できるためである。しかし、元をたどればこの過程はデローニー分割法で作成できなかった境界面を作るためのものであるから、このために、デローニー分割法を用いるのは筋が合わない。しかし、デローニー分割法を用いて境界面の形成が可能であることを筆者は発見した。このデローニー分割については次節で述べる。

3. 拘束付デローニー分割法 (Constrained Delaunay 法) による表面要素の構成

3.1 拘束付デローニー分割法 (Constrained Delaunay 法)

ここで提案する拘束付デローニー分割法 (Constrained Delaunay 法) は任意の表面形状を保ったままデローニー分割を行うものである。

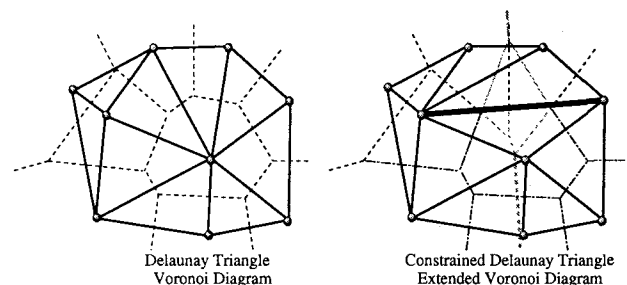


図-8 拘束付デローニー分割

3.2 拘束付デローニー分割法の実現

2.1 節で触れたように、デローニー分割過程で任意の面を確実に構成することは不可能である。しかし、ある場合に限り任意の面を確実に構成することができる。それは、デローニー図がその面の三点のみで作成されたときである。仮四面体の中に三点しかない場合、それぞれが必ず辺で結ばれることになるから、その三角面も存在することになる。

作成された面を壊さないように他の節点を追加しながらデローニー分割を行うことで拘束付デローニーを実現できる。

形成された面を壊さないようにデローニー分割を進める方法は、境界を有する領域へ節点追加をするための三次元 Delaunay 分割法の改善⁵⁾として筆者により提案されている。従って、この方法を用いることで拘束付デローニー分割を実現することができる。

拘束付デローニー分割アルゴリズム

- [i.] 仮四面体スーパーテトラヘドロン²⁾の設置
- [ii.] 拘束面の三頂点を用いて拘束無し¹⁾のデローニー分割し、拘束面を作成する。
- [iii.] 四面体要素群の中から拘束面を面に持つ四面体を探し、四面体の拘束面に一致する面をこれ以降の分割作業内で境界面として扱うようにする。
- [iv.] 境界が存在する場合に対応したデローニー分割のアルゴリズム (非凸領域に節点追加する際に起こる問題に対して修正を行った⁵⁾)を用いて、残りの節点についてデローニー分割を行う。

[v.] 拘束面が存在する四面体要素群を得る.

[vi.] 仮四面体の除去

3.3 拘束付デローニー分割法の限界

しかし、提案したアルゴリズムからも理解できるように、この拘束付デローニー分割法は、複数の面を拘束することは出来るのだが、任意に作成できる面は一つだけである。従って、境界表面の全ての三角形面をつくることはできないことから、この方法は境界作成にそのまま単体では利用できない。

4. 拘束付デローニー分割を用いた境界面生成

ここでは、拘束付デローニー分割法を用いて、境界表面全体を再現するアルゴリズムについて述べる。全ての面の要素メッシュ中での再構成は、拘束付デローニー分割を局所的に行なえば良い。つまり、一つの境界面と交差する四面体群を取り出し、この四面体群が作り出す局所小領域に対して拘束付デローニー分割を行なうのである。作成された四面体群と元の四面体群を置き換えることで、一つの面の再現を行なうことが出来るので、この作業を全ての境界面に対して行なえば全体の境界面を再現することが出来る。

4.1 節点追加順序による分割の唯一性

この作業を行うには

- 境界面と交差し置き換えられる要素の外殻の形状と拘束付デローニーによって作られた要素群の外殻の形状は一致する

という仮定が成り立つ必要がある。これについてはデローニー形状が唯一に定まることにより、ランダムな節点配置においてはこれを満たすことが想像できる。しかし、問題となるのは縮退が起るような節点配置であった場合である。この場合、デローニー分割の理論上では分割は唯一に定まらない。ところが、逐次節点追加のデローニー分割アルゴリズムを用いたときは、節点の追加順序により分割パターンが決定することが分かっている。すなわち、得られた四面体群に属する節点をデローニー分割する時に、節点番号順に処理することで、同じ四面体を得ることが出来るのである。

4.2 境界面生成のアルゴリズム

全体の流れ

[i.] 仮四面体スーパーテトラヘドロンを設置

[ii.] 対象領域の全ての点に対して Delaunay 分割を施す。

※ただし、拘束無しのデローニー分割

[iii.] 境界面の再生

[iv.] 領域番号の整理

[v.] 仮四面体の除去

境界面の再生

[i.] 面のリストから一つの面を呼び出す。

[ii.] 領域内にその面が存在するかどうかを調べる。

[iii.] もし存在すればその両側の四面体要素の境界面に一致する面をこれ以降の分割作業内で境界面として扱うようにする。以下の作業を無視して [i] に戻り、次の面を処理する。

[iv.] [ii] で面が存在しなければ、その面と交差する四面体を集める。

[v.] 四面体群から節点を取り出し、それらを対象に Delaunay 分割を行う。
※拘束付きのデローニー分割による

[vi.] 生成した境界面を含む四面体群を全体領域に埋め戻す。

[vii.] リストが空でなければ、[i] に戻り、作業を繰り返す。

5. Case Study

5.1 試行モデル

本研究による境界面再構成手法の実証のために簡単なモデルで検証を行った。図-9 に示すような配置の節点にデローニー分割を適用する。得られた四面体要素メッシュに対して Constrained Delaunay 法を用いて境界面 1 と境界面 2 の構成を行う。
手順は以下に示す。

1. 拘束無しのデローニー分割を節点に対して行う。
2. 境界面 1 を設置する
3. 境界面 1 を形成するために四面体を修正する
 - 境界面 1 と交差する四面体を集める
 - 拘束付デローニー分割法により境界面 1 を形成する
4. 四面体の入れ替えを行い、境界面 1 が形成された全体要素メッシュを得る
5. 境界面 2 を設置する
6. 境界面 2 を形成するために四面体を修正する
 - 境界面 2 と交差する四面体を集める

- 拘束付デローニー分割法により境界面 2 を形成する

7. 四面体の入れ替えを行い、境界面 1 と境界面 2 が共に形成された全体要素メッシュを得る

確認すべきことは、境界面を正しく形成することが出来るかどうか・境界面 2 を作成しているときに既存の境界面 1 を破壊することは無いのか・境界面と交差する四面体群と拘束付デローニー分割法により得られた四面体群の外殻が一致しているかどうかである。

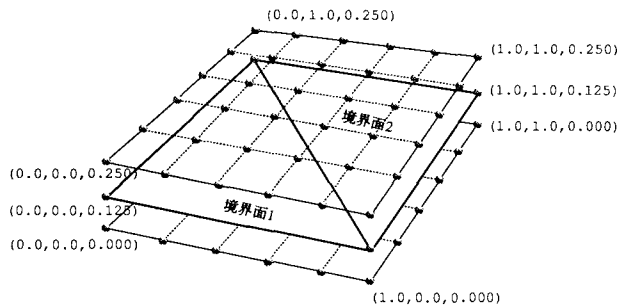


図-9 境界面の強制作成

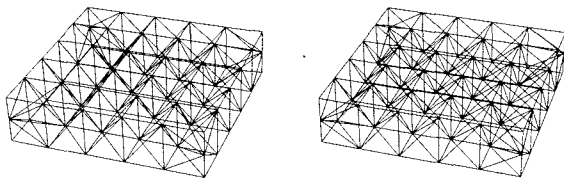


図-10 初期要素メッシュ T_0

5.2 試行結果

(1) 初期メッシュ生成

図-9 のモデルでは、節点は $z = 0.0, z = 0.25$ の面上と境界面 1, 2 の端に置かれており、境界面 1, 2 の面上には置かれていない。この節点配置に対してデローニー四面体分割を行うと、図-10 のように分割される。図-10 から図-20 は両眼立体視用の線画対となっている。ただし、ここでは右目で左の図、左目で右の図を見ることで立体視できるように描いている。

(2) 境界面 1 の形成

境界面 1 の形成を行う。図-11 は図-10 の初期要素メッシュ T_0 と境界面 1 の辺を示した。図より、 T_0 には境界面 1 にあたる面は存在せず、多くの四面体が境界面と交差していることが確認できる。

境界面 1 を形成するためにまず、この面と交差する初期メッシュ T_0 に含まれる四面体を集める。結果、図-12

示す四面体群 H_{A1} が得られた。得られた四面体群の節点を使って拘束付デローニー分割を行うと、図-13 示す四面体群 H_{B1} を得る。図で確認できるように、境界面 1 にあたる面が形成されている。しかしながら、四面体群 H_{A1} と四面体群 H_{B1} を比較すると、各四面体群の外殻が異なっている。この状態では、 H_{A1} を H_{B1} で置き換えることは不可能である。

従って、 H_{A1} または H_{B1} に対して修正が必要となった。 H_{B1} は拘束付デローニー分割の結果であり、境界面という拘束面を作成するために構成された四面体群である。この四面体群の外形をコントロールするために面の拘束を考えると、二重三重に拘束付デローニー分割を行わなければならない。もしくは、複数面同時に面を拘束しなければならない為、 H_{B1} の修正を考えるのは適当でない。そこで、本研究では H_{A1} の修正を行なった。

修正の内容としては、原因が縮退状態による要素の不一致が境界面が存在するために起こっていたことであつたため、 H_{A1} に幾つかの要素を付け足した。その基準としては、まず、 H_{A1} の節点に対し拘束なしのデローニー分割を適用し四面体を作り、そのうち T_0 内の四面体と一致する四面体を付け加えた。しかし、これだけでは不十分であつたため再現されなかった外殻の辺分に関わる T_0 上の四面体を付け加えた。

図-14 示す四面体群 H'_{A1} は H_{A1} に修正を加えたものである。この要素群に対して、拘束付デローニー分割を施したものが図-15 の四面体群 H'_{B1} である。 H'_{A1} の外殻と H'_{B1} の外殻を比較したところ、両者は一致した。結果として境界面 1 の再現を施した要素メッシュ T_1 は図-16 のようになる。

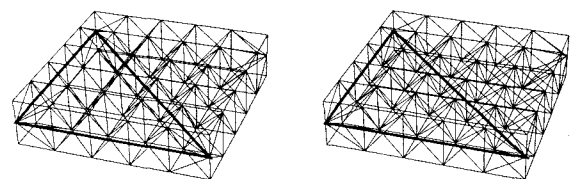


図-11 初期メッシュ T_0 と境界面 1

(3) 境界面 2 の形成

同様に境界面 2 を形成する。図-17 は前の段階で得られた要素メッシュ T_1 と境界面 2 の位置関係を示す。境界面 2 を形成するために、初期メッシュ T_1 に含まれる四面体の内この面と交差するものを集めると、図-18 示す四面体群 H_{A2} が得られた。得られた四面体群の節点を使って拘束付デローニー分割を行うと、図-19 示す四面体群 H_{B2} を得る。図より、境界面 2 にあたる面が形成されていることが確認できる。さらにここでは、境界面 1 で起こったような四面体群の外殻の

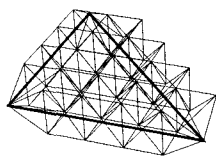
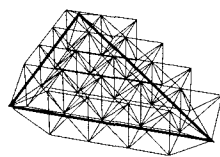


図-12 境界面 1 と交差する T_0 中の四面体群 H_{A_1}



拘束付デローニー分割法による境界面 1 の形成 H_{B_1}

図-13

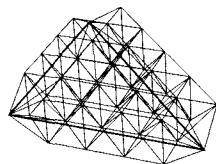
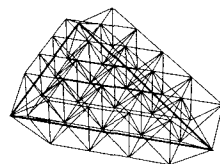


図-14 境界面 1 再構成のための被修正四面体群 H'_{A_1}



拘束付デローニー分割法による境界面 1 の形成 H'_{B_1}

図-15

不一致は起こっていない。ゆえに、 H_{A_2} の修正無しに H_{A_2} と H_{B_2} を入れ替えることが可能である。また、この境界面 2 を形成する過程で境界面 1 を破壊してしまうことは無かった。結果として境界面 2 の再現を施した要素メッシュ T_2 は 図-20 のようになった。

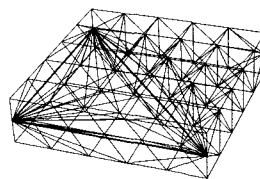


図-16 境界面 1 の再構成後の要素メッシュ T_1

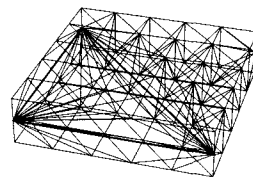


図-17 要素メッシュ T_1 と表面 2

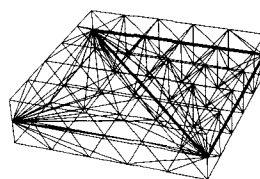
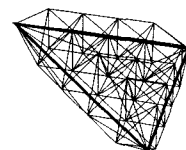


図-18 境界面 2 の再構成のための被修正要素群 H_{A_2}



Constrained Delaunay 分割法による
境界面 2 の形成 H_{B_2}

図-19

6. まとめ

まとめとして、本研究ではデローニー (Delaunay) 分割法を用いた自動要素分割に於いて、要素メッシュ内に境界表面を再現する手法として、デローニー分割法を利用した。いかなる面であっても、一つならば確実

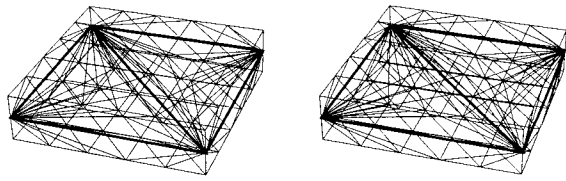


図-20 境界面 2 の再構成結果

に再現できるという発見に基づき、拘束付デローニー分割のアルゴリズムを作成し、全ての境界面の形成方法を提案した。検証の結果、提案する手法及びアルゴリズムによって、境界面の再現が可能であることを示した。デローニー分割アルゴリズムが分割過程のいかなる時でも、領域がデローニー形状で満たされていることを要求するため、デローニー形状を保つことは、デローニー分割を継続するために非常に重要である。デローニー分割法の表面構成にはアドバンシング・フロント法を用いることが出来るが、表面構成にもデローニー分割法を用いたことにより、境界表面付近においてもデローニー形状を保つことができることの効果は大きい。 H_{A_1} と H_{B_1} の外殻の不一致など一部予期しない問題が起こったが、修正可能であることも確認できた。しかし、今後さらに複雑なモデルに適用し、潜在している問題を発見していく必要がある。

参考文献

- 1) 谷口健男, 太田親 : 三次元凸体の四面体有限要素自動分割, 土木学会論文集, No.432 / I-16, pp.137-144, 1991.7.
- 2) 野島和也, 川原睦人 : 三次元デローニー分割を用いた地下トンネル三次元有限要素分割モデルの作成, 応用力学論文集, Vol.5, pp.253-262, 2002.
- 3) 谷口健男 : FEM のための要素自動分割, 森北出版, 1992.
- 4) Bowyer, A. : Computing Dirichlet Tessellations, *The Computer Journal*, Vol.24, pp.162-166, 1981.
- 5) 野島和也, 川原睦人 : 三次元デローニー分割における数値誤差による不適格要素の生成の抑制, 計算工学講演会論文集, Vol.8, pp1-2, 2003.

(2004 年 4 月 16 日 受付)