

CIVA-格子ボルツマン法による非構造格子を用いた 非圧縮性粘性流体の解析

Lattice Boltzmann-CIVA Method for Incompressible Flows Based on Unstructured Grid

立石 絢也*・檜山 和男**

Jun'ya TATEISHI and Kazuo KASHIYAMA

*学生会員 修士(工学) 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 博士後期課程(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a lattice Boltzmann method (LBM) for incompressible flow simulation applicable to complicated flow domain using unstructured triangular mesh. The LBM simulates microscopic collision and streaming of fluid particle and evaluated the macroscopic velocity and pressure from the computed particle distribution. For the computation of collision step, the 2-dimensional 9-speed lattice BGK model was employed as a collision operator. For the streaming step, the cubic interpolation scheme based on CIVA was employed to interpolate the particle distribution function. The present method was applied to the analysis of the square driven cavity flow and the flow past a circular cylinder.

Key Words : *lattice Boltzmann method, CIVA method, unstructured grid, incompressible flow*

1. はじめに

格子ボルツマン法^{1)~3)}(LBM: Lattice Boltzmann Method)は、差分法や有限要素法など従来の数値解析手法とは異なる新しい流体解析法として近年注目されている。気体の分子運動を表現するボルツマン方程式を解析する方法には、分子の運動を確率論的手法を用いて計算する方法があり希薄気体の解析などに用いられているが、計算負荷が高いことが難点である⁴⁾。これに対して格子ボルツマン法は、解析対象を連続体と仮定することによって分子運動のモデルを簡略化し計算効率を高めた手法である。この手法は、ボルツマン方程式を有限個のベクトルによって離散化し、微視的な流体粒子の分布関数を変数としてその衝突や並進を計算し、求められた粒子分布関数から巨視的な流速や圧力などを求める方法である。ボルツマン方程式は流体をミクロにとらえた方程式であるが、格子ボルツマン法では粒子一つひとつではなく粒子の存在確率を解くため、差分法や有限要素法と同程度の解像度で解析が可能である。粒子分布は陽的に求めることができるため、差分法や有限要素法のように連立方程式を解く必要がなく、計算効率の面で優れている。また、ベクトル化や並列化も容易に行うことができるという長所がある。流体力学方程式との対応は、粒子分布に関する時間発展式を漸近展開することによってNavier-Stokes方程式および連続式を空間2次の精度で近似することが確かめられる⁵⁾。

格子ボルツマン法は上記のような長所がある反面、等

間隔の格子を用いて解析を行うため、複雑な境界形状を表現したり、格子の粗密をつけることが難しい。格子ボルツマン法を不等間隔の格子に拡張する試みとして、一般座標において補間を用いる方法(Interpolation-Supplemented LBM: ISLBM)⁶⁾⁷⁾や、差分法を導入して一般座標を用いて離散ボルツマン方程式を解く方法(Finite Difference LBM: FDLBM)⁸⁾、有限体積法のスキームを導入した方法(Finite Volume LBM: FVLBM)⁹⁾などが提案されている。複雑な境界形状を有する流れ場の解析を行う場合には、境界への適合性に優れ、格子生成の自動化が進んでいる三角形(二次元の場合)および四面体(三次元の場合)の格子を利用できることが望ましい。また、不等間隔格子において粒子分布の補間を行う場合には、その補間による誤差が解析の精度に大きく影響するため、高精度な補間手法を用いる必要がある。格子内の物理量を高精度に補間する方法としては、3次のSpline補間を行うことなどが考えられるが、空間の広がりを抑えるためには、関数の値とその空間微係数を用いて補間式を構成する方が効率がよい。このような要請を満足する高精度な補間スキームとして、近年移流方程式の解法に広く利用されている方法に、CIP(Cubic Interpolation Pseudo Particle)法¹⁰⁾がある。また、この方法を任意形状の三角形、四面体に拡張した方法として、CIVA(Cubic Interpolation in Volume/Area Coordinate)法¹¹⁾¹²⁾が提案されている。

本論文は、格子ボルツマン法により任意の境界形状を有する領域内の流れ解析を高精度に行うことを目的

とし、CIVA法を導入したISLBMに基づく格子ボルツマン法（CIVA-格子ボルツマン法）を提案するものである。なお、衝突則には2次元9速度の格子BGKモデル¹³⁾を用いた。本手法の妥当性と有効性を検討するため、本手法を正方形キャビティ内対流問題および2次元円柱周り流れの解析に適用し、実験結果や従来の数値解析手法による結果との比較を行った。

2. 格子ボルツマン法

格子ボルツマン法は、流体粒子の分布関数の衝突、並進を計算して流体を解析する手法である。分子運動を記述するボルツマン方程式を有限個のベクトルで離散化し、粒子密度分布関数を変数として解析が行われる。

2.1 基礎方程式

格子ボルツマン法の時間発展方程式である格子ボルツマン方程式は以下のようにあらわされる。

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

左辺は粒子の並進過程を表しており、右辺の Ω は衝突演算項である。 f_i は粒子分布関数、 $\mathbf{e}_i$ は図-1であらわされる粒子の並進速度ベクトルであり、以下のようになる。

$$[e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

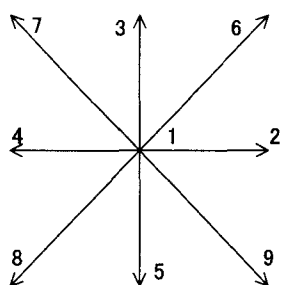


図-1 2次元9速度モデル

粒子密度分布関数とは、ある方向の速度を持つ粒子がどれぐらいの割合で存在しているかを実数で表した関数である。衝突演算項 $\Omega(\mathbf{x}, t)$ は、格子BGKモデル¹³⁾では次のようにあらわされる。

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)] \quad (3)$$

ここで、 τ は単一時間緩和係数と呼ばれる定数であり、1タイムステップの間に粒子分布が平衡状態へ緩和する割合をコントロールするパラメータである。 $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$

は、局所平衡分布関数と呼ばれる関数である。 τ は流体の粘性によって決まる値であり、動粘性係数 ν を用いて

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2} \quad (4)$$

とあらわされる。格子ボルツマン方程式と流体力学方程式であるNavier-Stokes方程式、連続式との対応関係は、漸近展開¹⁴⁾を行うことにより空間2次の精度で一致することが示される⁵⁾。

2.2 局所平衡分布関数

局所平衡分布とは、粒子が十分な時間の経過後に達する平衡状態の場合の粒子分布であり、巨視的な流体の流速、密度によって一意に決定される。本報告で用いた2次元9速度格子BGKモデルにおける局所平衡分布関数は、Maxwell分布¹⁴⁾において流体の流速 $\mathbf{u}$ が小さいとして展開し $\mathbf{u}^2$ の項まで残したものであり、以下のように表される。

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right] \quad (5)$$

ここで、 ρ は流体の巨視的な密度、 $\mathbf{u}$ は流速をあらわしている。 w_i は格子ボルツマン方程式を漸近展開したときに流体力学方程式と一致するように決められる定数であり、静止粒子のとき4/9、水平、鉛直方向へ向かう粒子のとき1/9、対角線方向へ向かう粒子のとき1/36である。

2.3 流れの巨視的変数

格子ボルツマン法では、粒子分布関数を変数として解析が行われる。流体の速度、圧力といった巨視的変数は求められた粒子分布関数と粒子の速度ベクトルを用いて以下のように計算される。

密度；

$$\rho = \sum_i f_i, \quad (6)$$

速度；

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i f_i \mathbf{e}_i, \quad (7)$$

圧力；

$$p = c_s^2 \rho \quad (8)$$

ここで、 c_s は音速であり、このモデルでは $c_s = 1/\sqrt{3}$ と表される。圧力は密度の変化により表されることから、このモデルはわずかながら圧縮性を有するが、代表流速が音速 c_s より十分小さい場合には非圧縮流体とみなして取り扱うことができる。

2.4 境界条件

格子ボルツマン法では、境界上で計算領域外から領域内へ向かう粒子分布量を規定する必要がある。格子ボルツマン法における境界条件はさまざまなものが提案されているが、本研究では、壁面境界条件としてbounce-back条件を適用した。bounce-back条件は、図-2に示

すように、壁面に向かう粒子を単純に180度跳ね返らせるものであり、non-slip壁面の境界条件として最も簡単なものである。

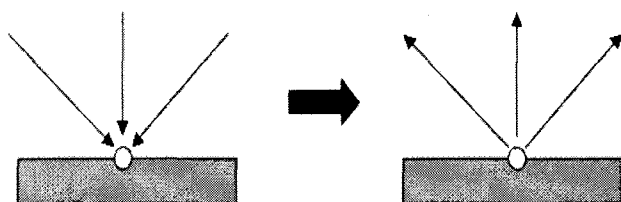


図-2 Bounce-Back境界条件

3. 非構造型格子における格子ボルツマン法

格子ボルツマン法は通常、規則的な等間隔格子を用いて解析が行われる。その場合には、1タイムステップの間に粒子は格子点から隣接する格子点に移動する。しかし、非構造型格子に拡張した格子ボルツマン法においては、1タイムステップ後の粒子は格子点にあるとは限らない。そのため、何らかの手法を用いて格子上に無い粒子分布を求める必要がある。

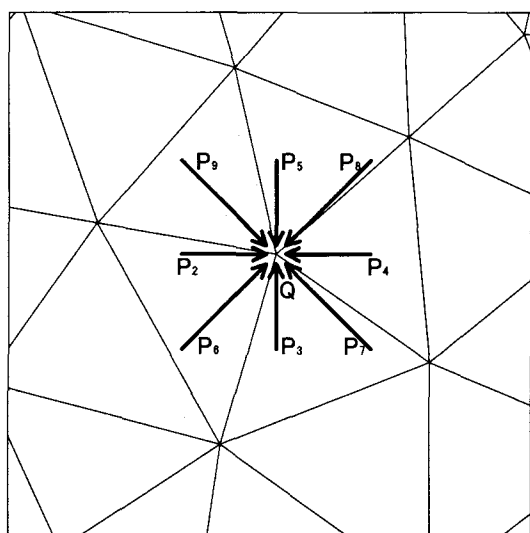


図-3 非構造型格子における粒子の移動

図-3に示すように、並進過程において点Qに移動してくる粒子分布量 $f_2 \sim f_9$ は、点Qから $\mathbf{e}_i \Delta t$ 上流側の三角形格子内の点 $P_2 \sim P_9$ からそれぞれ移流してくる。粒子密度分布関数は、空間上で連続であるため、空間上で補間を行うことで三角形格子内の粒子分布を求めることができる。⁷⁾ 格子ボルツマン方程式の左辺は並進を表しており、移流方程式の厳密解と一致する。格子ボ

ルツマン方程式を衝突過程と並進過程に分離し、並進過程を微分を用いて表すと以下ようになる。

衝突過程；

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)] \quad (9)$$

並進過程；

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t} + \mathbf{e}_i \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (10)$$

本研究では、式(10)の解法として以下に述べるCIVA法を用いる。

3.1 CIVA法

CIVA法¹¹⁾¹²⁾は、移流方程式の高精度な解法であるCIP法¹⁰⁾を三角形および四面体に拡張した手法である。CIP法やCIVA法では、各節点の局所厳密解を上流側の格子内に張った3次の補間曲面により求める。空間内の完全3次多項式を得るためには10個の係数を求める必要があるため、各節点上に数値および空間微係数値を配置する(図-4)。

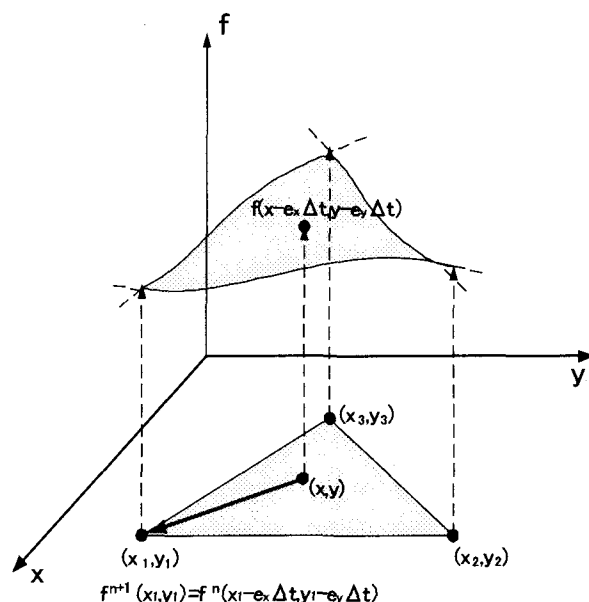


図-4 CIVA method

四角形格子の場合、4点計12変数の情報から3次多項式の未知係数が決定されるが、三角形格子の場合は3点9変数しかなく、3次多項式を完全に求めることができない。CIVA法では、この問題を3次関数を調整し未知係数を減らすことにより解決している。CIVA法で用いられる補間関数および微係数の補間関数は、三角形に対して正規化された座標系である面積座標系を用いて以下のようにあらわされる。

$$\tilde{f}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j L_j + d \sum_{k,l=1}^3 \beta_{kl} (L_k^2 L_l + c L_1 L_2 L_3) \quad (11)$$

$$\alpha_j = f_j \quad (12)$$

$$\beta_{kl} = f_k - f_l + (x_l - x_k)f_k^x + (y_l - y_k)f_k^y \quad (13)$$

$$c = \frac{1}{2} \quad (14)$$

ここで、座標値 (L_1, L_2, L_3) は部分三角形の面積 S_1, S_2, S_3 と全体の三角形の面積 $S(= S_1 + S_2 + S_3)$ の比、

$$(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S} \right) \quad (15)$$

を表している。dは1次補間の場合0、3次補間の場合1となる。

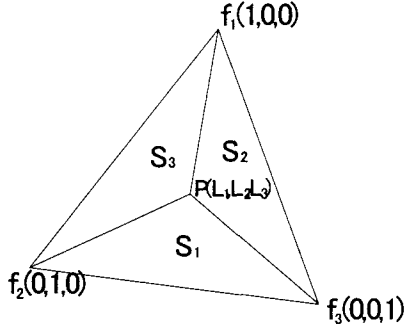


図-5 面積座標

デカルト座標系の空間微係数値は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y_2 - y_3}{J} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{y_3 - y_1}{J} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{y_1 - y_2}{J} \frac{\partial f}{\partial L_3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x_3 - x_2}{J} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{x_1 - x_3}{J} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{x_2 - x_1}{J} \frac{\partial f}{\partial L_3} \end{aligned}$$

で求められる。ただし、 J は、

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \quad (16)$$

である。CIVA法を用いた格子ボルツマン法においては、衝突過程後の微係数を求める必要があるため、式(9)を微分した次式も解く必要がある。

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x} - \frac{\partial f_i}{\partial x} \right] \quad (17)$$

CIVA法のように非構造三角形格子上の補間により移流方程式を解く場合には、上流側の点がどの三角形内にあるかを探索する必要がある。本研究では、CFL数が1を超えないように格子幅を設定し、上流側の点を近隣の三角形格子内から探索した。このとき、面積座標における小三角形の面積 S_1, S_2, S_3 がすべて正になる三角形に上流側の点が存在するとして探索を行った。

3.2 フィルタリングによる数値振動の抑制

2次以上の高次補間を行う場合、物理量が急激に変化する部分でオーバーシュートやアンダーシュートなど非物理的な振動が生じることがある。この場合、振動を抑えるために補間次数を下げるなどの対策をとる必

要がある。CIVA法においてフィルタリングを行うアルゴリズムは以下になる。

- 節点における解 $\tilde{f}^{n+1}$ を上流側三角形の3次補間により求める。
- 上流側三角形の3点のnステップ目の値の最大値 f_{max}^n 、最小値 f_{min}^n を調べる。
- 解 $\tilde{f}^{n+1}$ が $f_{min}^n \leq \tilde{f}^{n+1} \leq f_{max}^n$ を満たしている場合は3次補間の解を用い、図-6の overshoot や undershoot の部分のように $f_{min}^n \leq \tilde{f}^{n+1} \leq f_{max}^n$ を満たしていない場合はd=0として補間次数を1次に下げる。

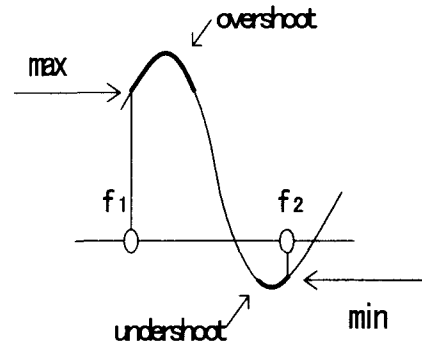


図-6 フィルタリングにおける数値振動の検出方法

4. 数値解析例

本手法（CIVA-格子ボルツマン法）の妥当性および有効性を検討するため、数値解析例として2次元正方形キャビティ内対流問題および2次元円柱周り流れ解析を取り上げた。

4.1 正方形キャビティ内対流問題

正方形キャビティ内対流問題の本手法（CIVA-格子ボルツマン法）による数値解と参照解¹⁵⁾との比較を行った。Reynolds数は100および1000とし、図-7に示す節点数4306、要素数8258の非構造格子を用いた。粒子のCFL数が1を超えないようにするため、解析領域の一边(代表長さ)を260に設定し、代表流速を0.1とした。このとき、 τ は $Re = 100$ のとき1.28、 $Re = 1000$ のとき0.578である。壁面境界条件にはbounce-back条件を用い、移動壁面の境界条件にはZouらによる境界条件¹⁶⁾を用いた。

図-8に $Re = 100$ の場合の中心線上の流速分布を、図-9に $Re = 1000$ の場合の流速分布をそれぞれ示す。実線が本手法による数値解で、○がGhiaらによる解である。Reynolds数が100,1000いずれの場合も参照解とよい一致を示している。図-10と図-11に、Reynolds

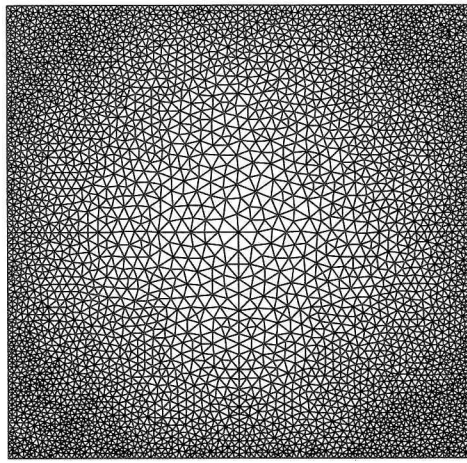


図-7 正方形キャビティ解析格子

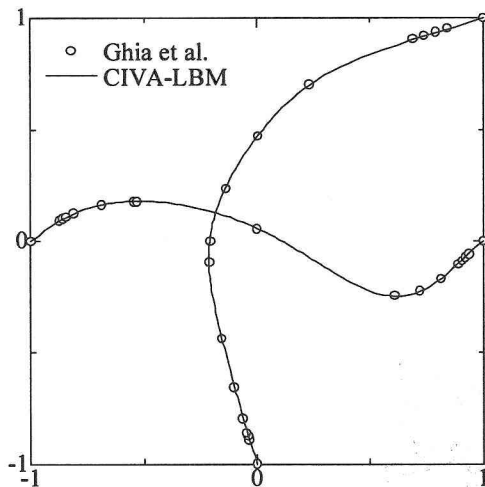


図-8 中心線上の流速分布, $Re = 100$

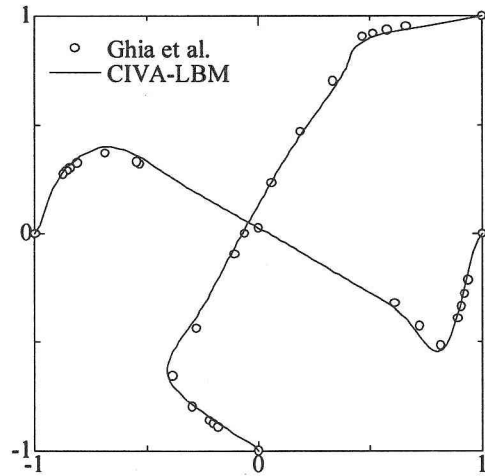


図-9 中心線上の流速分布, $Re = 1000$

数 1000 の場合の流速ベクトル図, 圧力分布図を示す。図より, 流れが安定に計算されていることがわかる。

4.2 円柱周り流れ解析

次に, 2次元円柱周り流れの解析例を示す。図-12に解析領域図と境界条件を示す。円柱の直径を D とし, 流入側から $8D$ の場所に円柱を配置した。用いた格子は,

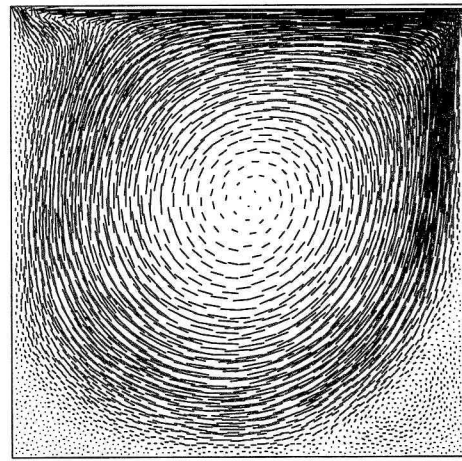


図-10 流速ベクトル図 ($Re = 1000$)

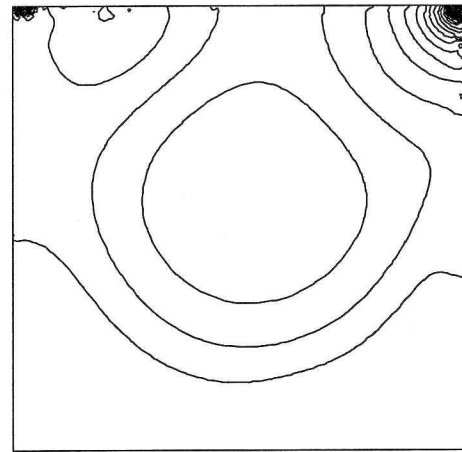


図-11 圧力分布図 ($Re = 1000$)

図-13に示す節点数 6326, 要素数 12488 の非構造格子である。円柱の直径を代表長さとし, 流入流速を代表流速 U として, $U = 0.1$ を与えた。また, ポテンシャル流れにおける流速を初期条件として計算を開始した。境界条件は, 流入側と流出側の粒子分布は局所平衡分布関数より粒子分布を与え, 円柱表面では Bounce-back 条件を採用した。円柱表面では境界が曲線となるため, 粒子の並進ベクトル(図-1)と境界の線が必ずしも一致しないが, ここでは計算領域外から来る未知の粒子分布を Bounce-back により求めた。Reynolds 数は $10 \sim 1000$ とし, D と粒子の移流距離 Δx との比 $\Delta x/D$ は, $Re = 10 \sim 70$ の時 0.02, $Re = 100 \sim 300$ の時 0.01, $Re = 500$ と 1000 の時それぞれ 0.005, 0.00285 とした。また, このとき τ は $2 \sim 0.6$ となった。計算は $t = 0 \sim 400$ の間で行い, 十分時間が経過した後に抗力係数, Strouhal 数の計算を行った。なお, この例題においては, 物理量の変化が激しい部分が生じることから, 3.2 項で述べたフィルタリングを行い数値振動を抑える方法を採用した。また, 比較のため, 同じ格子を用いて SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法¹⁷⁾による解析も行った。参照解として, 実験値¹⁹⁾および He らによる ISLBM⁶⁾, 今村に

よる GILBM¹⁸⁾の抗力係数, *Strouhal*数を取り上げた.

図-14に, *Reynolds*数 1000 の場合の $t = 176$ における円柱付近の流線図を, 図-15と図-16にベクトル図と圧力分布図をそれぞれ示す. 図より, 円柱後流側にカルマン渦が周期的に発生している様子がみられる. また, 圧力分布図より安定した解析が行えていることがわかる. 図-17に *Reynolds*数と抗力係数 C_D の関係を, 図-18に *Reynolds*数と *Strouhal*数 S_t の関係を示す. ここで, 抗力係数は式(18)で求めた. σ は応力テンソルであり, $\mathbf{n}$ は円柱境界の法線方向ベクトルである.

$$C_D = \frac{1}{\rho U^2 D} \int \sigma \cdot \mathbf{n} dl \quad (18)$$

図-17, 図-18において, 実線は実験値であり, ●が本手法による解析結果, △が He による ISLBM の結果, □が今村による GILBM の結果, ○が有限要素法による解析結果をあらわしている. 本手法の結果は, 抗力係数と *Strouhal*数のいずれにおいても実験値および参照解の計算結果に良い一致を示しているといえる.

表-1 計算時間, 記憶容量の比較

	CIVA-LBM	FEM
計算時間(秒)	18	169
記憶容量(MB)	7.8	15.6

また, 本手法と有限要素法において, 無次元時間 1 まで計算するのに要した時間および記憶容量を表-1に示す. 本手法は有限要素法に比べ, 計算時間で約 10 分の 1, 記憶容量で約半分になっており, 非定常問題においては計算時間および記憶容量の面で有効な手法であるといえる. なお, このとき使用した計算機は POWER4 Super Chip 1.3GHz を搭載した IBM pSeries 690 Regatta である.

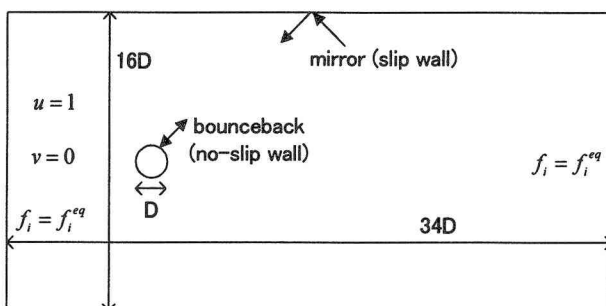


図-12 円柱周り流れの解析領域と境界条件

5. おわりに

本論文では, 格子ボルツマン法により複雑な境界形状を有する領域内の流れ解析を高精度に行うことを目的とし, 三角形非構造格子に基づく CIVA-格子ボルツマン法を提案した. 本手法の妥当性と有効性を検討するために, 本手法を正方形キャビティ内対流問題, 2次

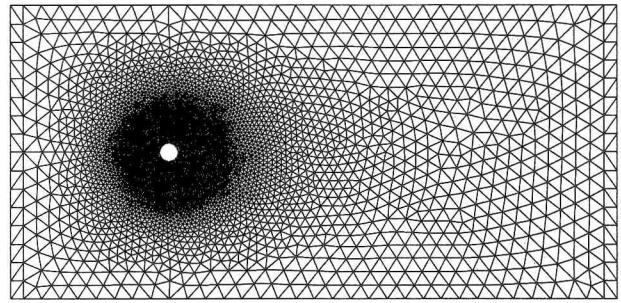


図-13 解析格子

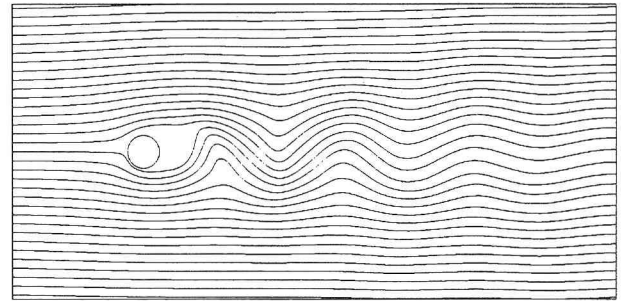


図-14 流線図 (t=176)

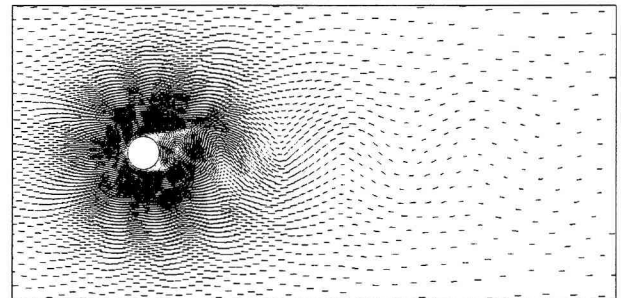


図-15 ベクトル図 (t=176)

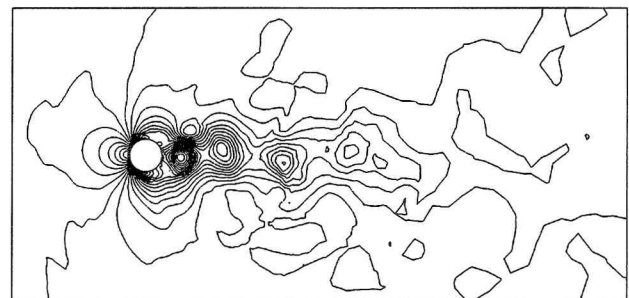


図-16 圧力分布図 (t=176)

元円柱周り流れ解析に適用して, 実験結果や従来の数値解析手法による結果との比較を行い, 以下の結論を得た.

1. 格子ボルツマン法の並進過程に CIVA 法を導入することにより, 任意形状を有する領域内の流れ解析が可能となった.
2. 本手法による数値解は, 従来の数値解析手法による結果や実験値に概ね一致することを示した.

3. 本手法は、円柱周り流れ解析において従来の非構造格子に基づく有限要素法と比較して計算時間および記憶容量の点で有利な手法である。

今後は、本手法の高 *Reynolds* 数流れへの適用に関する検討を行うとともに、3次元への拡張を行う予定である。

参考文献

- 1) Succi, S.: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, Oxford University Press, 2001.
- 2) Chen, S., and Doolen, G.D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30, pp.329-364, 1998.
- 3) 稲室隆二: 格子ボルツマン法, 物性研究, **77-2**, pp.197-232, 2001-11.
- 4) Bird, G.A.: Approach to transitional equilibrium in a rigid sphere gas, *Phys. Fluids*, **6**, pp.1518-1519, 1963.
- 5) Inamuro, T., Yoshino, M., Ogino, F.: Accuracy of the lattice Boltzmann method for small Knudsen number with finite Reynolds number, *Phys. Fluids*, **9**(11), pp.3535-3542, 1997.
- 6) He, X., and Doolen, G.D.: Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Flow around a Circular Cylinder *J. Comput. Phys.*, **134**, pp.306-315, 1997.
- 7) He, X., Luo, L., and Dembo, M.: Some Progress in Lattice Boltzmann Method. Part I. Nonuniform Mesh Grids, *J. Comput. Phys.*, **129**, pp.357-363, 1996.
- 8) Cao, N., Chen, S., Jin, S., and Martinez, D.: Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method, *Phys. Rev. E*, **55**, R21, 1997.
- 9) Nannelli, F., and Succi, S.: The Lattice Boltzmann Equation on Irregular Lattices, *J. Stat. Phys.*, **68**, pp.401-407, 1992.
- 10) Yabe, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, *Comput. Phys. Commun.*, **66**, pp.219-232, 1991.
- 11) Tanaka, N.: The CIVA method for mesh-free approaches: improvement of the CIP method for n-simplex, *Computational Fluid Dynamics JOURNAL*, **8**, no.1, pp.121-127, 1999.
- 12) 田中伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 機論, **64-620B**, pp.1071-1078, 1998.
- 13) Qian, Y.H., D'Humieres, D., and Lallemand, P.: Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation, *Europhys. Lett.*, **17**(6), pp.479-484, 1992.
- 14) 曾根良夫, 青木一生: 分子気体力学: 朝倉書店, 1994.
- 15) Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a Multigrid Method, *J. Comput. Phys.*, **48**, pp.387-411, 1982.
- 16) Zou, Q., He, X.: On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Phys. Fluids*, **9** (6), pp.1591-1598, 1997.
- 17) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advances in applied mechanics*, **28**, pp.1-44, 1991.
- 18) Imamura, T.: Incompressible flow simulation using generalized interpolation-based lattice Boltzmann method, *Doctor thesis of Tokyo university*, 2003.
- 19) Cantwell, B. and Coles, D.: An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, **136**, pp.321-374, 1983.

- 20) 立石絢也, 樫山和男: CIP 有限要素法を用いた不等間隔格子における格子ボルツマン法, 第16回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (CD-ROM), B11-1, 2002.
- 21) 立石絢也, 樫山和男: CIP 有限要素法を用いた格子ボルツマン法による非圧縮粘性流体解析, 計算工学講演会論文集, Vol.8, pp.735-738, 2003.

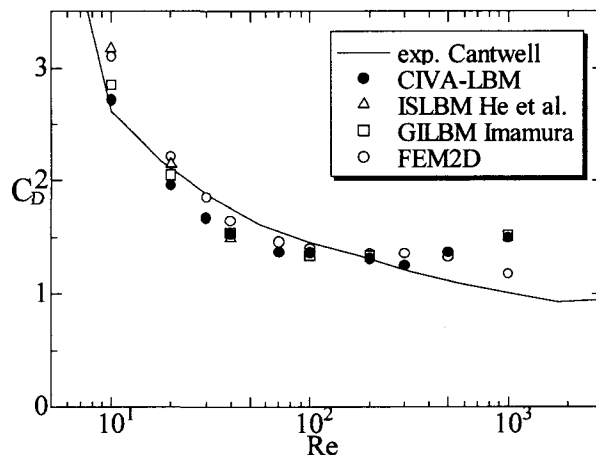


図-17 抗力係数とレイノルズ数の関係

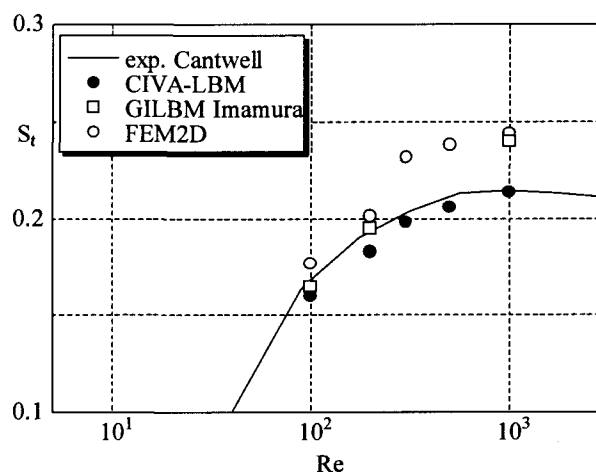


図-18 ストローハル数とレイノルズ数の関係

(2004年4月16日 受付)