

界面追跡法による自由表面流れ解析のためのメッシュ再構築手法

A New Mesh Re-Generation Technique for Free Surface Flow Analysis
Based on Interface-Tracking Method

田中聖三*・樫山和男**

Seizo TANAKA and Kazuo KASHIYAMA

*学生会員 修士(工学) 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 博士後期課程(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a new mesh re-generation technique for free surface flow analysis based on interface-tracking method. The incompressible Navier-Stokes equation based on arbitrary Lagrangian-Eulerian description is used as the governing equation. The SUPG/PSPG formulation is employed for the finite element discretization. The coupled non-linear finite element equation systems are linearized by the Newton-Raphson iteration method. As numerical examples, the present method is applied to the sloshing problem and the broken-dam problem in rectangular tank. The efficiency of the present method is shown by numerical results.

Key Words : *mesh re-generation technique, free surface flow, interface-tracking method, ALE stabilized finite element method*

1. はじめに

河川やタンク内等における流体の挙動は、界面である自由表面が時々刻々と複雑に変化するため、構造物の計画・設計段階においては、流体の自由表面挙動を正確に評価する必要がある。自由表面流れに対する数値解析手法は、自由表面の表現方法の観点から大きく二種類の方法に分類することができる。一つは固定メッシュを用いて界面を間接的に表現する界面捕捉法(interface capturing method)であり、もう一方は、流体形状にメッシュを適合させることにより界面を直接的に表現する界面追跡法(interface tracking method)である。VOF(Volume of Fluid)法^{1)~3)}やLevel-Set法⁴⁾に代表される界面捕捉法では、密度関数を用いて界面を間接的に表現するため、砕波等の不連続な現象や密度の異なる二層流体を比較的容易に解析することができる。しかしながら、間接的に界面が表現されているために、界面近傍における計算精度に課題が残されている。一方、ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian)法^{5),6)}やSpace-Time法^{7),8)}に代表される界面追跡法は、自由表面上での流体粒子の運動にあわせて解析領域を更新することにより自由表面を直接的に表現するため、運動学的条件や力学的条件の満足度が高く、高精度な解析が可能である。著者らはこれまでに、自由表面形状と流れ場を正確に評価することが可能である界面追跡法に基づくALE安定化有限要素法による自由表面流れ解析手法の構築を行ってきたが^{9)~11)}、自由表面上での節点移動方向は、あらかじめ定義されており、砕波現象等の任意の自由表面形状を表現することは困難で

あるため、汎用性および適用性の面で課題が残されていた。砕波現象等の任意の自由表面形状を表現するためには、自由表面上での節点移動方向には任意性が必要であるが、それを持たせた場合には、解析メッシュに破綻が生じて解析を進めることが困難となる。これを回避するためには、解析メッシュを適切に再構築する必要がある。

そこで本論文は、複雑な自由表面形状を有する自由表面流れに対して適応可能なALE法に基づく界面追跡手法を構築することを目的とし、新しいメッシュ再構築手法を提案するものである。本論文で提案するメッシュ再構築手法は、あらかじめ流体が移動する領域全体にバックグラウンドメッシュを設置し、これを基準として、時々刻々の自由表面形状からバックグラウンドメッシュの各要素を計算領域に含めるか否かを判定し、解析メッシュを再構築する。基礎方程式の空間方向の離散化手法としては、SUPG(Streamline Upwind/Pedrov-Galerkin)/PSPG(Pressure Stabilizing/Pedrov-Galerkin)法に基づく安定化有限要素法¹²⁾を用い、離散化により導かれる非線形方程式に対してNewton-Raphson法を用いて線形化を施した。なお、要素としては、任意形状への適合性の良い三角形同次補間要素(圧力・流速ともに1次:P1/P1要素)を用いた。また、時間方向の離散化にはクランク・ニコルソン法を用いた。本手法の妥当性および有効性を検討するため、本手法を2次元の矩形貯槽内のスロッシング問題、ダムブレイク問題および噴水流問題に適用し、実験結果や従来の数値解析手法による結果との比較を行った。

2. 数値解析手法

2.1 基礎方程式と境界条件

非圧縮性粘性流体において、流速 $\mathbf{u}$ 及び圧力 p は、それぞれ式(1),(2)のALE表記されたNavier-Stokesの運動方程式及び連続式に支配される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) = 0 \quad \text{on } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Omega, \quad (2)$$

ここで、 Ω は解析領域、 $\bar{\mathbf{u}}$ は節点移動速度を含む相対流速、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力を表している。また、応力テンソル $\sigma(\mathbf{u}, p)$ は以下の式で表される。

$$\sigma(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (4)$$

ここで、 μ は粘性係数である。また、Dirichlet型、Neumann型境界条件は、次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g, \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h, \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ はそれぞれ流速、トラクションの既知量を示し、 Γ_g , Γ_h はそれぞれDirichlet型、Neumann型境界を示す。また、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

自由表面においては、以下の運動学的条件を満たす必要がある。

$$(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{fs}, \quad (7)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{u}}$ はメッシュ移動速度であり、 Γ_{fs} は自由表面である。また自由表面上では、力学的条件としてstress-free条件が適用される。なお、表面張力は微小量であるとして無視した。

2.2 安定化有限要素法

基礎方程式(1),(2)に対して、Petrov-Galerkin法による流線風上化法(SUPG法)/圧力安定化法(PSPG法)に基づく安定化有限要素法¹²⁾を適用すると、以下の弱形式が得られる。左辺第1-3項および右辺第1項はBubnov-Galerkin項、第4項の要素ごとの積分の総和項は移流項の卓越に対して安定化を施すSUPG項と圧力振動を回避するための安定化項であるPSPG項である。また第5項の要素ごとの積分の総和項は、自由表面の数値不安定性を回避する安定化項である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \sigma(\mathbf{u}, p) d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left\{ \tau_{supg} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\ & \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \right\} d\Omega \end{aligned}$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{w} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma, \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{w}$, q は運動方程式、連続式の重み関数であり、 n_{el} は要素総数を表す。また、 τ_{supg} , τ_{pspg} , τ_{cont} は安定化パラメータである。詳細は文献⁹⁾を参照されたい。

式(8)に対して、P1/P1要素(流速・圧力1次要素)を用いて補間を行うと次のような有限要素方程式を得る。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}_{\delta}(\bar{\mathbf{u}})) \mathbf{u} - (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\delta}) \frac{1}{\rho} p + \nu \mathbf{S} \mathbf{u} - (\mathbf{N} + \mathbf{N}_{\delta}) \mathbf{f} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}^T \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}_{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{u} \\ & - \mathbf{N}_{\varepsilon} \mathbf{f} + \mathbf{C}_{\varepsilon} \frac{1}{\rho} p = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{N}$ は、係数行列であり、添字 δ, ε は、それぞれSUPG項、PSPG項に起因するものを表わす。時間方向の離散化には2次精度を有するクランク・ニコルソン法を用いる。時間微分 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ は次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t}, \quad (11)$$

ここで、 Δt は時刻レベル n と $n+1$ 間の時間ステップサイズである。この時間の離散化において、流速 $\mathbf{u}$ 、及び圧力 p は以下のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{u}_n, \quad (12)$$

$$p = p_{n+1}, \quad (13)$$

ここに、 α は時間積分の安定性と精度をコントロールするパラメータであり、クランク・ニコルソン法を用いるため $\alpha = 0.5$ を選択する。ただし、連続式は陰的に取り扱う。

2.3 反復解法

前節の離散化過程により導かれた有限要素方程式(9),(10)は、非線形の連立方程式であり、流体挙動を正確に把握するためには非線形解析を高精度かつ安定に行う必要がある。本研究では、非線形方程式に対してNewton-Raphson法を用いて反復的に解くものとする。非線形方程式(9),(10)は次式のような連立方程式で表すことができる。

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{F}, \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{d}_{n+1}$ は時刻レベル $n+1$ での未知節点量($\mathbf{u}$, p)である。式(14)に対してNewton-Raphson法を適用すると、次式のような線形方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}^k} (\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k) = \mathbf{F} - \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}^k), \quad (15)$$

ここに、 k はNewton-Raphsonの繰り返し回数を表し、 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k$ は $\mathbf{d}_{n+1}^k$ に対する増分を表す。式(15)で表される線形方程式は、各時間レベルにおいて収束するまで繰り返すことにより解かれる。この連立1次方程式の

解法として、Matrix-Free法¹³⁾に基づくGMRES法¹⁴⁾を用いる。

2.4 解析領域の更新

自由表面上では、式(7)の運動学的条件を満たす必要がある。この条件は自由表面上の物質粒子は常に自由表面上に留まるという条件である。本手法において、任意の自由表面形状を表現するために自由表面上の節点は外向き法線方向へ移動するものとする。従って、自由表面におけるメッシュ移動速度 $\hat{\mathbf{u}}$ は以下のようになる。

$$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (16)$$

ALE法では、流体粒子の動きとは独立した節点移動を行うことができる。本手法では、解析メッシュの過度の歪みを回避するため、解析領域内部の節点変位 $\mathbf{v}$ は、領域境界の変位を境界値とした線形弾性方程式を解くことにより求める。基礎方程式は以下のようになる。

$$\nabla \cdot \sigma_m(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{on } \Omega, \quad (17)$$

ここで、構成方程式は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \sigma_m(\mathbf{v}) &= \lambda_m (\text{tr } \varepsilon_m(\mathbf{v})) \mathbf{I} + 2\mu_m \varepsilon_m(\mathbf{v}), \\ \varepsilon_m(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 λ_m, μ_m は要素の歪みを制御するパラメータであるが、本解析では単位量を与えている。

また、境界条件は以下のように与えられる。

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}_m \quad \text{on } \Gamma_{g_m}, \quad (19)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma_m = \mathbf{h}_m \quad \text{on } \Gamma_{h_m}. \quad (20)$$

式(17)に対してGalerkin法を用い、重み付き残差方程式を導くと以下の式が得られる。

$$\int_{\Omega} \varepsilon_m(\mathbf{w}) : \sigma_m(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_{h_m}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h}_m d\Gamma. \quad (21)$$

式(21)を各時間ステップにおいて解くことにより節点変位を求め解析領域を更新する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}. \quad (22)$$

式(21)の解法として、Element-by-Element SCG法を用いる。

2.5 メッシュ再構築手法

本論文で提案するメッシュ再構築手法について、図-1(左)に示すような解析モデルを用いて説明を行う。本メッシュ再構築手法は、図-1(右)に示すように、あらかじめ流体が移動する領域全体にバックグラウンドメッシュを設置する。解析は図-2(左)に示す初期メッシュより開始し、各時刻において得られた流体領域形状に対してバックグラウンドメッシュの各要素を計算領域に含めるか否かを判定し、次の時刻で用いる解析メッシュを再構築する。バックグラウンドメッシュを用いることの長所として、壁面形状等の領域幾何形状の情報を考慮しやすいことが挙げられる。バックグラウン

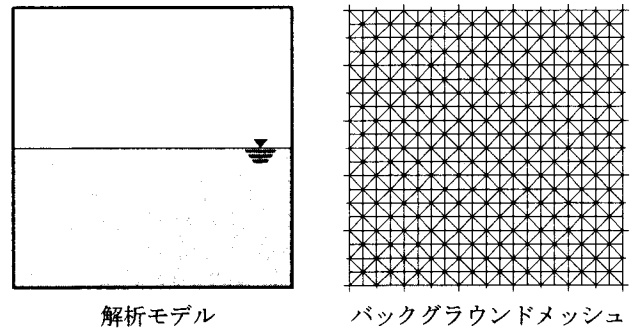


図-1 解析モデルとバックグラウンドメッシュ

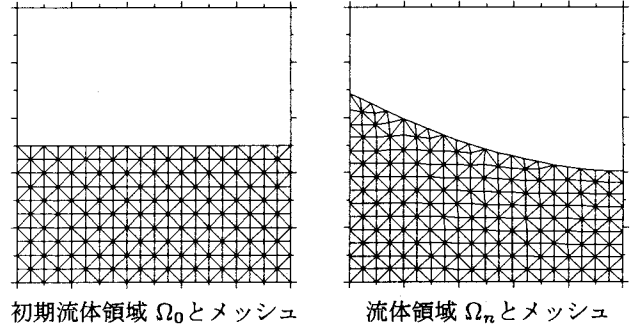


図-2 初期および時刻 n の流体領域

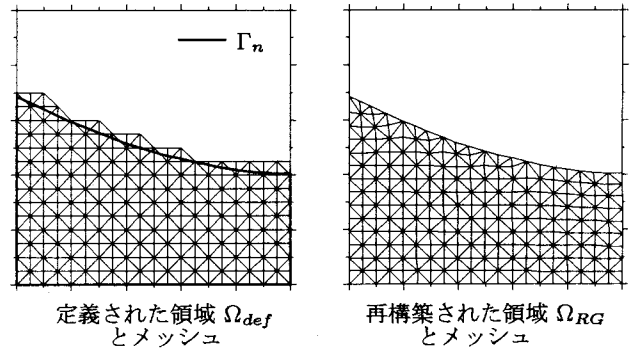


図-3 定義された領域と再構築された領域

ドメッシュより、解析メッシュを再構築する手順は、以下の三段階に分けられる。

1. バックグラウンドメッシュより計算領域を定義する。(Defining step)
2. 再構築対象とする流体領域に対して、計算領域を適合させる。(Fitting step)
3. 新たに再構築された解析メッシュに対して物理量を再分配する。(Rezoning step)

これらの各段階について以下に説明する。

(1) Defining Step

Defining Stepでは、図-2(右)に示す時刻 n において得られた流体領域 Ω_n よりメッシュを再構築するための領域をバックグラウンドメッシュから定義する。その際、本解析においては、定義される計算領域 Ω_{def} は、流体領域 Ω_n を包含するように定義している。定義された領域 Ω_{def} を図-3(左)に示す。なお、図中の太線は、時刻

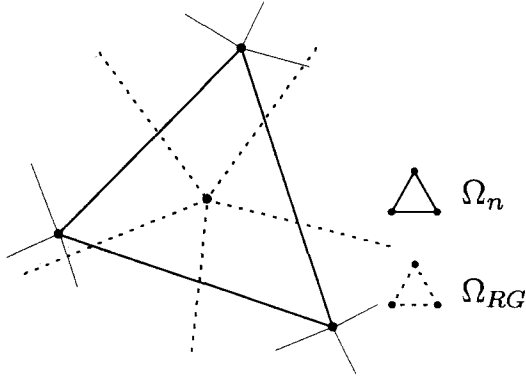


図-4 Rezoning Stepの要素モデル

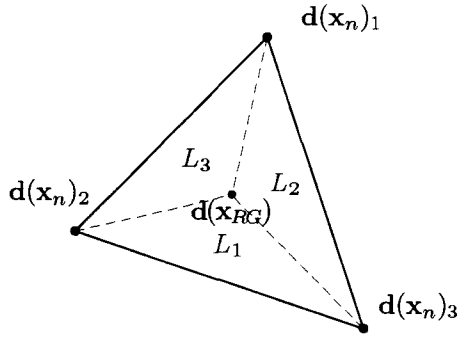


図-5 \$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n)\$ から \$\mathbf{d}(\mathbf{x}_{RG})\$ への補間

\$n\$における流体領域\$\Omega_n\$ (図-2(右)) の境界\$\Gamma_n\$を示す。

(2) Fitting Step

先のDefining Stepで定義された計算領域\$\Omega_{def}\$の境界は図-3(左)に示すように、バックグラウンドメッシュに依存した形状のため、再構築対象となる流体領域境界\$\Gamma_n\$と一致していない。そこでFitting Stepでは、\$\Omega_{def}\$の境界を流体領域境界\$\Gamma_n\$に適合させる。定義された計算領域\$\Omega_{def}\$において自由表面に割り当てられた節点は、適合させるべき流体領域の自由表面上に移動させる。この境界の移動量を境界条件とし、前節で述べた解析領域の更新と同様に、式(17)を解くことにより、内部節点の移動量\$\mathbf{v}_{def}\$を求め、次式より新たな解析領域\$\Omega_{RG}\$とメッシュが再構築される。解析領域\$\Omega_{RG}\$が再構築される。

$$\mathbf{x}_{RG} = \mathbf{x}_{def} + \mathbf{v}_{def}. \quad (23)$$

ここで、この適合処理を行うことにより解析に不適切な要素(要素面積が零以下となるような要素)が発生した場合は、その要素を定義領域から除外している。図-3(右)に再構築されたメッシュを示す。

(3) Rezoning Step

これまでの手続きにより、新たな解析メッシュが再構築されたことになるが、図-4に示すように、再構築された解析領域\$\Omega_{RG}\$の各節点座標と流体領域\$\Omega_n\$の各節点座標は一致しておらず、\$\Omega_{RG}\$上には物理量(流速および圧力)は配置されていない。そのため流体領域\$\Omega_n\$の

物理量\$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n)\$を\$\Omega_{RG}\$へ再配置する必要がある。この再配置には、図-5に示すように面積座標に基づくCIVA法¹⁵⁾で用いられる3次補間式により補間を行っている。

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_{RG}) = \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i L_i + d \sum_{j,k=1}^3 \mathbf{b}_{jk} [L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3] \right] \Big|_{\mathbf{x}_n}, \quad (24)$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{d}_i, \quad (25)$$

$$\mathbf{b}_{jk} = \mathbf{d}_j - \mathbf{d}_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla \mathbf{d}_j, \quad (26)$$

ここで、\$L\$は要素三角形に対して正規化された面積座標である。また、\$d\$は3次補間の調節パラメータであり、\$d=0\$のとき1次、\$d=1\$のとき3次となる。また、物理量\$\mathbf{d}\$の空間微分ベクトル\$\nabla \mathbf{d}\$は、最小二乗法により求めている。以上の手続きにより、物理量を伴った解析メッシュが再構築されたこととなり、時間進行を行っていく。

2.6 質量補正手法

本手法の問題点として、解析時刻が進行するにつれ、Fitting Stepにおける投影誤差に起因する質量誤差が蓄積し、十分な精度の解が得られない場合がある。この点については、各時刻での質量誤差に対して以下のように自由表面をオフセットすることにより補正している。

$$\mathbf{v}_{offset} = \beta \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_{fs} \quad (27)$$

ここで、\$\beta\$はオフセットパラメータであり、以下のように定義される。

$$\beta = \frac{M_T - M_n}{\int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}, \quad (28)$$

ここで、\$M_T\$、\$M_n\$はそれぞれ目標となる質量、時刻\$n\$で計算された質量である。

2.7 解析アルゴリズム

前述の解析手法による計算の流れをまとめると、図-6に示すフローチャートのようになる。以下にその手順をまとめる。

- 1) 流体が移動する領域全体の有限要素分割と初期流体形状を定義する。
- 2) 有限要素分割、境界条件、初期条件、計算条件を入力する。
- 3) ①Defining Step, ②Fitting Step, ③Rezoning Stepにより解析メッシュの再構築を行う。
- 4) 自由表面をオフセットすることにより質量補正を行う。
- 5) GMRES法により線形の連立方程式(15)を解き、流速及び圧力の近似解を求解する。

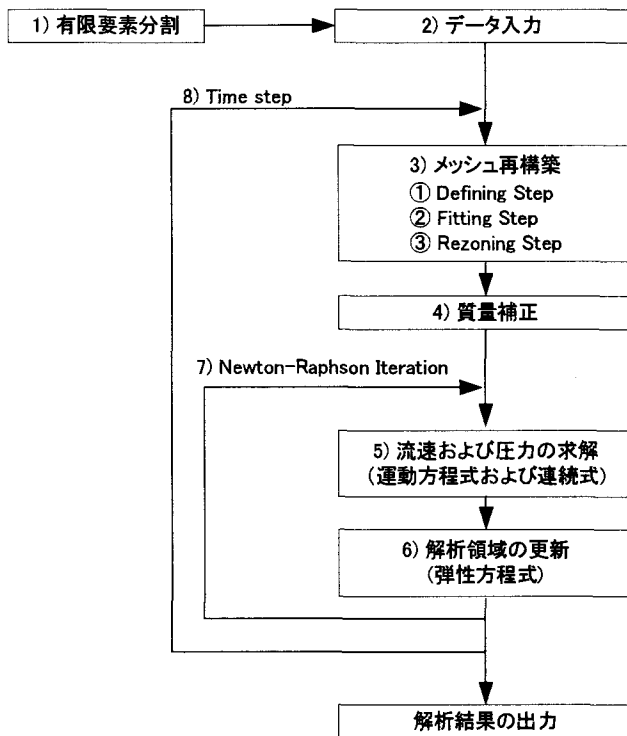


図-6 フローチャート

- 6) 運動学的条件により求めた自由表面位置を境界条件として弾性方程式 (21) を E-By-E SCG 法により解き、解析領域を更新する。
- 7) 解が収束するまで Newton-Raphson 法の反復 5)~6) を繰り返す。
- 8) 時間進行を行い、時間ステップが終了するまで 3)~7) を繰り返す。

3. 数値解析例

本手法の妥当性および有効性を検討するため、本手法を矩形貯槽内のスロッシング問題とダムブレイク問題に適用し、実験結果や従来の手法による計算結果と比較を行った。また、応用例として噴水流問題を取り上げた。

3.1 矩形貯槽内スロッシング問題

解析条件として、図-7の解析モデルに示すような幅 1.0[m]、高さ 1.0[m] の貯槽に 30% 貯まった流体に式 (29) で表わされる水平加速度を与える。

$$f_x = A\omega^2 \sin \omega t, \quad (29)$$

ここで、振幅 A は 0.0093[m]、角速度 ω は 4.761[rad/s] とした。流体は水と仮定し、密度 ρ および動粘性係数 ν はそれぞれ、 1.0×10^3 [kg/m³]、 1.0×10^{-6} [m²/s] とした。壁面上の境界条件は節点移動を考慮するため free-slip 条件を与えた。また、有限要素分割には、バックグラウンドメッシュとして貯水槽の各辺を 40 分割した有

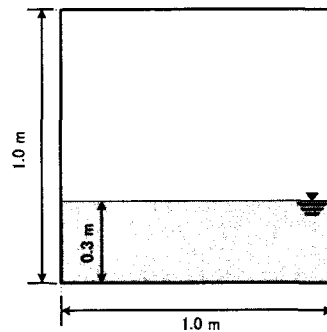


図-7 計算モデル

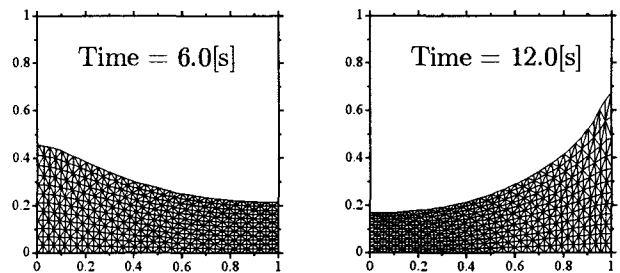


図-8 流体領域形状 (メッシュ再構築無し)

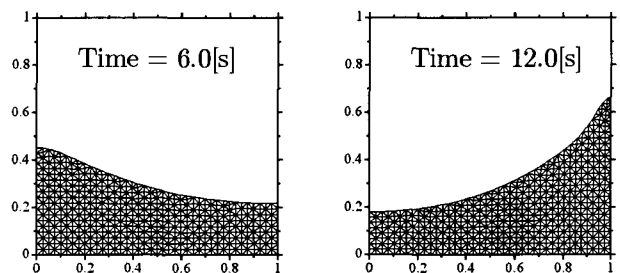


図-9 流体領域形状 (メッシュ再構築有り)

限要素を用い、微小時間増分量は 1.0×10^{-3} [s] とした。メッシュ再構築手法の有効性を検討するため、メッシュ再構築を行うものを行わないものとの比較を行う。なお、メッシュ再構築を行わないものは、自由表面上の節点移動方向を鉛直方向とし、質量補正は行わないものとした。図-8にメッシュ再構築を行わない場合 (従来の手法)、図-9にメッシュの再構築を行った場合の各時刻における流体領域形状を示す。これらの図より、各場合での両者の水面形状はほぼ完全に一致しており、また、図-10に示す左壁での水位の時刻歴の比較において、実験値⁵⁾とも良い一致を示していることがわかる。これらの結果より、本手法の妥当性が検証できた。なお、本解析例において、メッシュ再構築を行った場合の計算時間は、再構築を行わない場合に対して、約 25% の増加となった。図-11に質量保存率の時刻歴の比較を示すが、メッシュ再構築を行わない場合、およびメッシュ再構築を行い、かつ質量補正を行った場合では、質量がほぼ 100% を保っているのに対して、メッシュ再構築を行い、かつ質量補正を行わない場合では、計算時

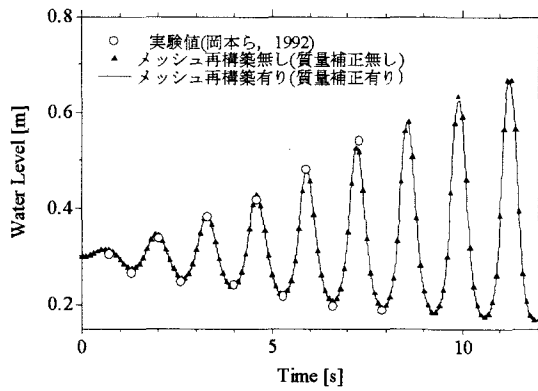


図-10 左壁での水位の時刻歴

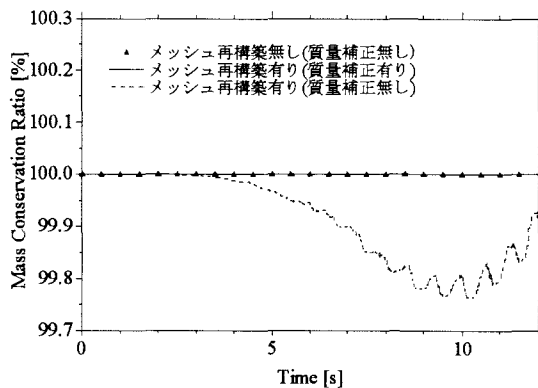


図-11 質量保存率の時刻歴

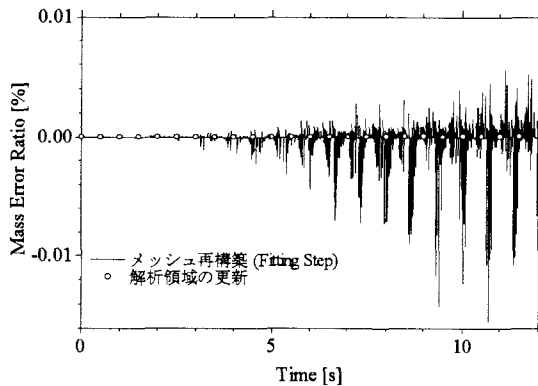


図-12 各時刻ステップにおける質量誤差率

間が進むにつれて質量が保存されていないことがわかる。この原因について考慮するため、図-12に本解析手法においてメッシュが変形するFitting Step(フローチャート3)②と解析領域の更新(フローチャート6))時での各時刻ステップにおけるその処理で発生する誤差の初期質量に対する割合をそれぞれ示す。図より、メッシュ更新時においては大きな誤差は見られず、Fitting Step時において大きな誤差が発生していることがわかる。この誤差の累積が、図-11における質量誤差となって現れている。

3.2 ダムブレイク問題

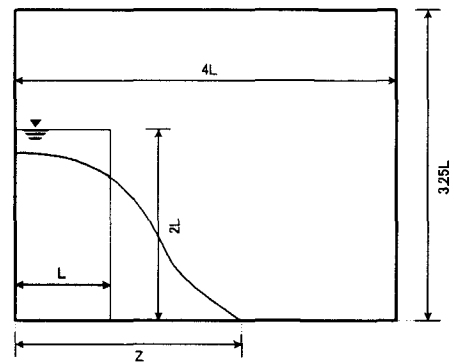


図-13 解析モデル

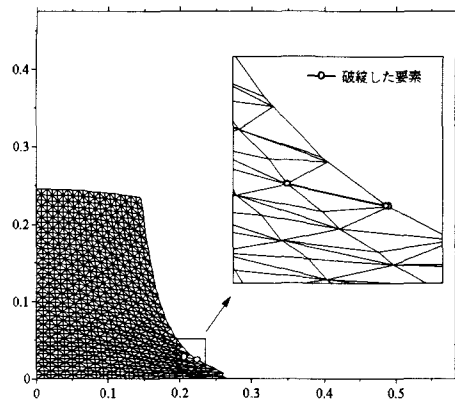


図-14 流体領域形状(メッシュ再構築無し)

本メッシュ再構築手法の有効性を検討するために、自由表面形状が大きく変形するダムブレイク問題の計算を行った。初期条件として、図-13に示す静止状態の幅: $L=0.146m$ 、高さ: $2L$ の水柱を考える。水槽は、幅: $4L$ 、高さ: $3.25L$ とし、境界条件として壁面でfree-slip条件を課した。有限要素分割には、バックグラウンドメッシュに 80×65 分割(水平方向×鉛直方向)の構造格子を用い、微小時間増分量は、 $2.0 \times 10^{-4}[s]$ とした。この問題をメッシュ再構築を行わない方法で解析した場合には、図-14に示すように、計算の初期段階で、面積が零以下となる要素が発生し、解析メッシュに破綻が生じ、解析が不能となった。メッシュ再構築手法を導入した場合には、図-15に示すように安定な計算結果が得られた。なお比較のため、界面捕捉法の一つであるCIVA/VOF法³⁾による解析結果も示している。図より、計算が破綻することなく安定に解析を進めることができていたことがわかり、CIVA/VOF法による計算結果とも良い一致を示している。また、物理量も図-16に示す流速ベクトル図と圧力コンター図より、安定に計算されていることがわかる。一方、定量的な評価として図-17に示す水際線移動の時刻歴についても、本解析結果は、実験値¹⁶⁾およびCIVA/VOF法の計算結果と良い一致を示していることがわかる。図-18に質量保存率の時刻歴を示す。図より、質量補正を行わ

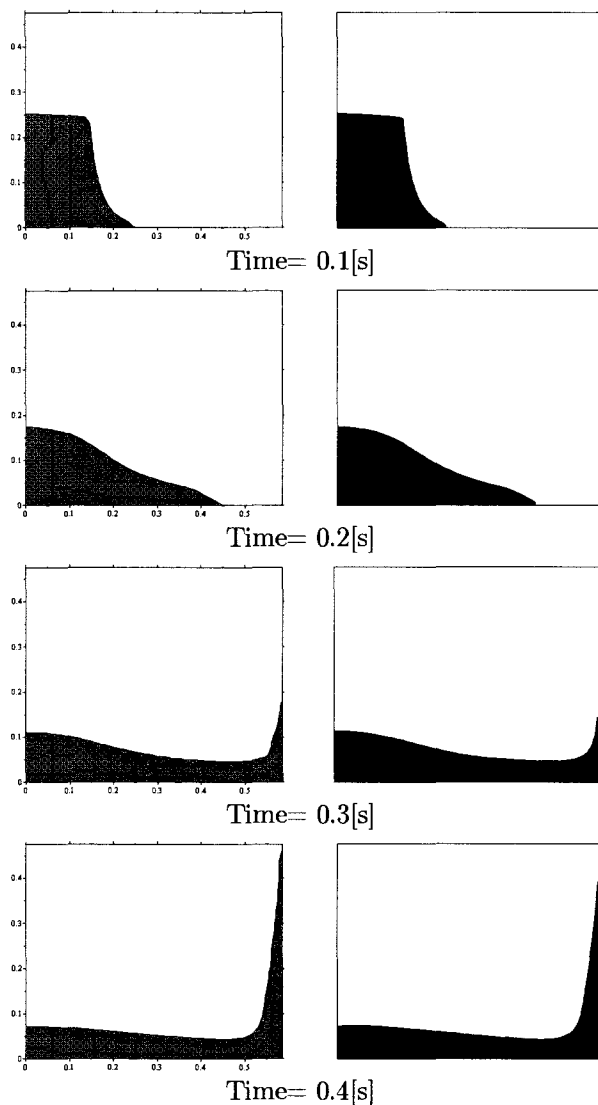


図-15 流体領域形状の比較 (左:本手法, 右:CIVA/VOF 法)

い場合では、時間が進むにつれて質量が増加しており、特に流体が右壁を駆け上がる時刻0.25[s]付近からその誤差は著しく大きくなっているが、質量補正を行うことにより質量保存を満たしていることがわかる。また、図-19に時刻0.4[s]における質量補正を行った流体領域形状と、質量補正を行わない場合での水面形状の比較を示す。この図から質量補正の影響により、水面形状に若干の差異が見られるものの、質量補正が自由表面形状を大きく変えていないことがわかる。

3.3 噴水流問題

最後に応用例として、流入境界を有しかつ複雑な自由表面形状を呈する噴水流問題に本手法を適用した。解析モデルとして、図-20に示すように、高さ:2.0の位置にある幅:1.0の噴出口から鉛直方向に向かい流体を噴出させる。解析条件として、鉛直流入速度 U_{in} 、重力加速度 g 、および密度 ρ はそれぞれ単位量とし、粘性係数 μ は0とした。また、微小時間増分量は 1.0×10^{-3} と

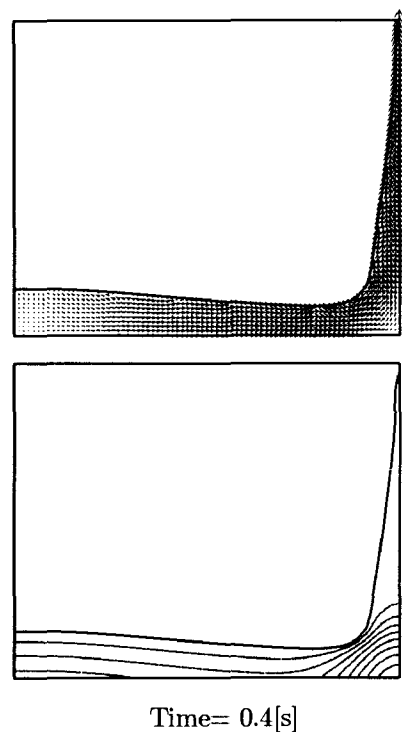


図-16 流速ベクトル図および圧力コンター図

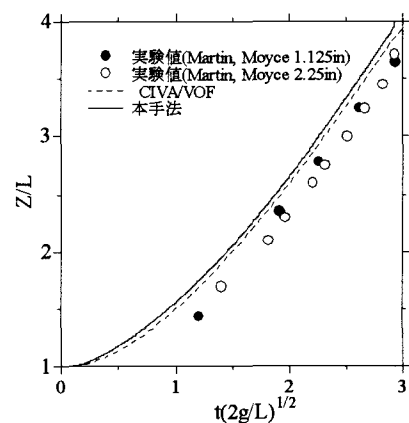


図-17 水際線移動の時刻歴

した。解析結果として、図-21に各無次元時刻における流体領域形状を示す。この図より、時間進展とともに発達する噴水現象を安定に解析できていることがわかる。今後は、このような複雑な自由表面問題における解析精度の定量的な評価を行う予定である。

4. おわりに

本論文では、複雑な自由表面形状を有する自由表面流れに対して適応可能なALE法に基づく界面追跡手法を構築することを目的とし、新しいメッシュ再構築手法の提案を行った。数値解析例として2次元矩形貯槽内スロッシング問題、ダムブレイク問題および噴水流問題を取り上げ、本手法の妥当性および有効性について

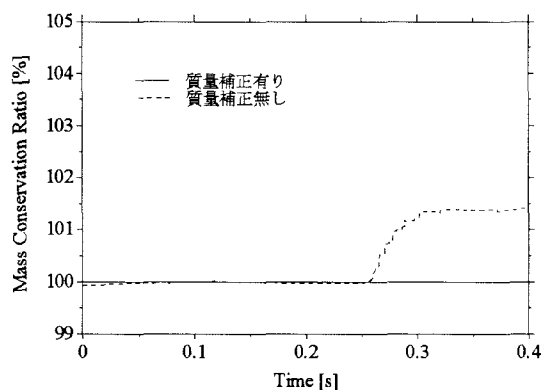


図-18 質量保存率の時刻歴

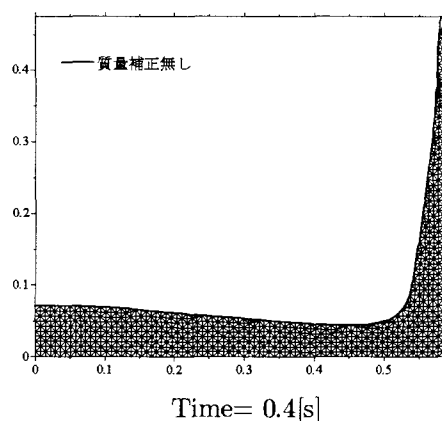


図-19 質量補正の影響

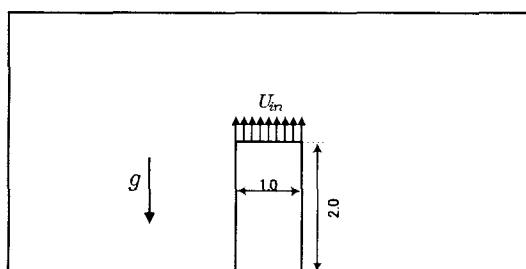


図-20 解析モデル

て検討した。その結果、以下の結論が得られた。

- 本手法による計算結果は実験値および従来の手法による計算結果と良い一致を示し、計算精度の観点から本手法の妥当性が確認できた。
- メッシュ再構築手法を導入することにより、大変形を伴う現象を解析することが可能となった。
- 本手法は界面を直接的に表現しているため、界面捕捉法に比べて流体力等の評価を行うことが容易であり、構造物の計画・設計等に有利である。

以上のより、本解析手法は複雑な自由表面形状を有する流れ解析に対して有効な手法といえる。今後は、本手法の3次元への拡張を行うとともに、Fitting Stepにおける投影誤差について検討を行う予定である。

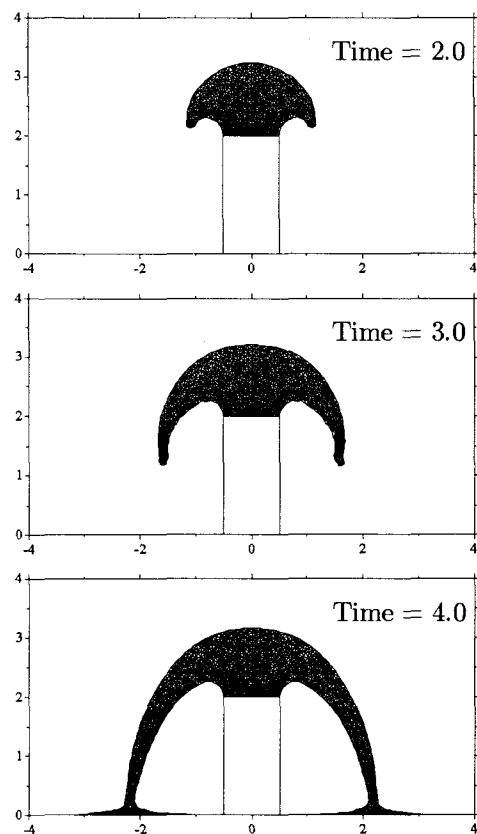


図-21 流体領域形状

参考文献

- 1) Hirt, C.W., Nichols, B.D. : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, **39**, pp.201-225, 1981.
- 2) Nakayama, T., Shibata, M. : A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problem, *Computational Mechanics*, **22**, pp.194-202, 1988.
- 3) 桜庭雅明, 弘崎聡, 樫山和男 : 自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, 土木学会, **6**, pp.215-222, 2001.
- 4) Sussman, M., Smereka, P., Osher, S. : A level set approach for computing solution for incompressible two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, **114**, pp.146-202, 1994.
- 5) 岡本隆, 川原陸人 : ALE 有限要素法による二次元スロッシング解析, 土木学会論文集, No.441/I-18, pp.29-48, 1992.
- 6) Nomura, T. : ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **112**, pp.291-308, 1994.
- 7) Behr, M., Tezduyar, T.E. : Finite element solution strategies for large-scale flow simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **112**, pp.3-24, 1994.
- 8) Güler, I., Behr, M. and Tezduyar, T.E. : Parallel finite element computation of free-surface flows, *Computational Mechanics*, **23**, pp.117-123, 1999.
- 9) 桜庭雅明, 田中聖三, 樫山和男 : PC クラスターを用いた ALE 並列有限要素法による非線形自由表面流れ解析, 応用力学論文集, 土木学会, **4**, pp.113-120, 2001.
- 10) Kashiwama, K., Tanaka, S., Sakuraba, M. : PC cluster finite element analysis of sloshing problem

- by earthquake using different network environments, *Communication in Numerical Methods in Engineering*, **18**, pp.681-690, 2002.
- 11) 田中聖三, 樫山和男 : ALE安定化有限要素法を用いた任意境界を有する自由表面流れ解析, 応用力学論文集, 土木学会, **6**, pp.223-230, 2003.
 - 12) Tezduyar, T.E. : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics*, **28**, pp.1-44, 1991.
 - 13) Johan, Z., Hughes, T.J.R., Mathur, K.K. and Johansson, S.L. : A data parallel finite element method for computational fluid dynamics on the Connection Machine system, *Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, pp.113-134, 1992.
 - 14) Saad, Y., Schultz, M. : GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Scientific and Statistical Computing*, **7**, pp.856-869, 1986.
 - 15) 田中伸厚 : 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 日本機械学会論文集(B編), **64-620**, pp103-110, 1998.
 - 16) Martin, J.C. and Moyce, W.J. : An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, **244**, pp.312-324, 1952.

(2004年4月16日 受付)