

列車走行に伴う環境振動解析のための 2.5-D・3-D 高速多重極境界要素・結合解法の開発

Development of the coupling method of a 2.5-D boundary element method and a 3-D fast multipole boundary element method for environmental vibration analysis.

斎藤 隆泰*・土戸 研一**・廣瀬 壮一***

Takahiro SAITOH, Ken-ichi TSUCHIDO and Sohichi HIROSE

*学生会員 工修 東京工業大学大学院情報理工学研究科 情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

**非会員 工修 東京工業大学大学院情報理工学研究科 情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

***正会員 工博 東京工業大学大学院情報理工学研究科教授 情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

It is essential to predict train-induced vibration level by a numerical analysis with development of railroad technology. A 3-D analysis is required to obtain environmental vibration properties around a barrier with finite length produced by a moving load. In practice, however, a 3-D analysis using the conventional boundary element method requires too much computational time and memory. Therefore, it is necessary to develop a more effective numerical method for a 3-D environmental vibration analysis. In this paper, we propose the coupling method of a 2.5-D boundary element method and a 3-D Fast Multipole Boundary Element Method (FMBEM) to improve the computational efficiency for the dynamic problem due to a moving load. Firstly, a 2.5-D analysis is used to obtain the solution of a wave field produced by a moving load on a half space. Secondly, an FMBEM analysis for the time harmonic scattering problem by a finite barrier is carried out using the 2.5-D solution as an incident wave field. Finally, the time variation of the wave field for a train load moving in a parallel direction to the barrier is calculated by using the Fourier transform as numerical examples.

Key Words : fast multipole boundary element method, moving load, finite vibration barrier, 2.5-D analysis.

1. はじめに

近年の鉄道の飛躍的な高速化に伴い、鉄道沿線の振動レベルの予測を行うことは非常に重要である。しかし、鉄道施設の建設は、大規模かつ多くのコストを必要とすることから、施設の建設前に予め環境振動レベルを予測し、その対策を講じることは非常に重要である。

列車走行に伴う環境振動問題の、最も単純な解析モデルとして、半無限地盤の地表面を走行する点荷重問題を考えることが出来る。しかしながら、このような単純なモデルに対しても、解析的に閉じた解を得ることは難しい。¹⁾従って、より複雑な環境振動問題を解くためには、有限要素法や境界要素法といった数値解析手法を用いる必要がある。

有限要素法は、一般的に、有限領域のみを扱うので、移動荷重による入射場の無限遠での挙動を、何らかの手法を用いて考慮しなければならない²⁾、直接的に解く事が困難であることから、環境振動問題に対しては必ずしも有効な数値解析手法であるとは言いがたい。一方、境界要素法は、無限遠における放射条件を基本解³⁾が自動的に満たすため、直接的に波動場を求められるという利点を持つ。従って、境界要素法は、環境振動問題のみならず、

波動解析に関する様々な分野における有効な数値解析手法として、幅広く用いられてきた³⁾。一般的に、ある方向に対して垂直な二次元断面内で、材料定数や解析モデルの幾何形状が一定である問題の三次元解析は 2.5 次元解析(擬似三次元解析)⁴⁾と呼ばれているが、列車進行方向に沿って平行に設置された、無限長さを持つ防振壁、防振溝の問題も、典型的な 2.5 次元問題の一つである。2.5 次元問題は、解析モデルが断面方向に一樣である性質を利用することから、通常の三次元解析に比べて、非常に効率的に三次元解析を実行することが可能である。このような背景から、環境振動問題においても、2.5 次元境界要素法の適用が行われてきた⁵⁾。しかし、より現実的なモデルを考慮した場合、例えば、有限長さの防振壁、防振溝周りの波動場を求めるといった場合には、断面方向に解析モデルが一樣でなければならないという 2.5 次元解析の性質上、2.5 次元解析を実行することは出来ない。従って、このような場合、三次元境界要素法解析が必要である。しかし、三次元動弾性境界要素法は、膨大な計算時間・記憶容量を必要とすることから、現実的な範囲内で計算を実行することは困難である。そこで、本研究では、大規模数値解析手法として近年急速に発達し続けている高速多重極法⁶⁾を境界要素法に適用した、高速多

† Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

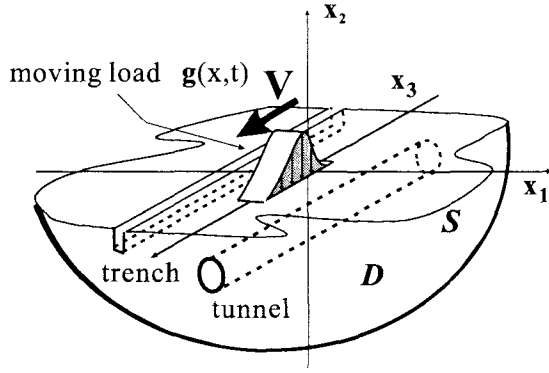


図-1 移動荷重が作用する 2.5-D 解析モデル

重極境界要素法⁷⁾を用いる。まず、三次元半無限地盤地表面を等速直線運動する移動荷重による周波数域での入射場を求める。この時、音響場解析を対象とした場合は、入射場を解析的に求めることが可能である⁸⁾が、弾性解析では困難である。従って、2.5次元境界要素法を用いて入射場を求める。次に、得られた入射場を利用して、有限長さの防振溝が設置されている時の波動場を三次元高速多重極境界要素法を用いて求める。これを 2.5-D・3-D 高速多重極境界要素・結合解法と呼ぶ。数値解析例として、防振溝が存在する場合の周波数域での波動場を求め、得られた周波数域の解を逆フーリエ変換することにより、時間域における防振溝周りの波動場を導く。なお、本研究では半無限地盤領域を表す境界を、有限長さの自由境界に置き換えて解析を行う。

2. 2.5-D 境界要素法解析

2.1 解くべき問題

図-1に示されるように、均質等方な地盤 D の地表面上を、移動荷重が等速度 V で運動する問題を考える。移動荷重 g は荷重の分布を変えずに x_3 方向に運動するとする。また、解析モデルの幾何形状や材料定数等は、移動荷重進行方向の断面 x_3 内で常に一定であると仮定する。この時、地盤 D 内の任意の点 x における時刻 t での、変位 $u_i(x, t)$ は次の Navier-Cauchy の方程式を満たす。

$$L_{ik}(\partial_x)u_k(x, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(x, t), x \in D \quad (1)$$

ただし、 ρ は密度であり、 $L_{ik}(\partial_x)$ は次式で定義された微分演算子である。

$$L_{ik}(\partial_x) = C_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \quad (2)$$

ここで C_{ijkl} は弾性定数であり、ラメ定数 λ, μ を用いて、 $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ で表される。一般的に、式 (1) における境界条件は次のように表される。

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= h_i(x, t), x \in S_u \\ t_i(x, t) &\equiv \bar{T}_{ik}^n(\partial_x) u_k(x, t) \\ &= g_i(x, t), x \in S_t = S \setminus S_u \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 h_i, g_i は与えられた境界値である。また $\bar{T}_{ik}^n(\partial_x)$ は表面力作用素であり、 $\bar{T}_{ik}^n(\partial_x) = C_{ijkl} n_j(x) \partial / \partial x_l$ で表される。ここに、 $n(x)$ は x における外向き法線を表す。今、 x_3, t に関するフーリエ変換を次のように定義する。

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, t) e^{-i\xi_3 x_3} dx_3 \quad (4)$$

$$\hat{f}(x_1, x_2, x_3, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, t) e^{i\omega t} dt \quad (5)$$

ここで、式 (4), (5) を式 (1), (3) に適用すれば、次のような二次元空間 $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ における支配方程式

$$\begin{aligned} L_{ik}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, i\xi_3) \hat{u}_k(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) \\ = -\rho \omega^2 \hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega), \mathbf{X} \in \bar{D} \end{aligned} \quad (6)$$

と、対応する境界条件

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) &= \hat{h}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega), \mathbf{X} \in \partial S_u \\ \hat{t}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) &= \hat{g}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega), \mathbf{X} \in \partial S_t = \partial S \setminus S_u \end{aligned} \quad (7)$$

を得ることが出来る。ここで、 $\bar{D}$ は x_1 - x_2 面内における境界 $\partial S_u, \partial S_t$ で囲まれた二次元領域を表す。もし、式 (6), (7) で定義された二次元境界値問題の解 $\hat{u}_i$ が求まれば、三次元空間の位置 x , 時刻 t における解 $u_i(x, t)$ は、形式的に、次の逆フーリエ変換により求まる。

$$u_i(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) e^{i(\xi_3 x_3 - \omega t)} d\omega d\xi_3 \quad (8)$$

しかしながら、式 (8) における計算では、全ての ω, ξ_3 に関する二次元の解 $\hat{u}_i$ を必要とすることから計算効率上好ましくない。今、移動荷重は x_3 軸に沿って一定の速度・荷重分布で移動すると仮定していることから、境界 S_t に関する表面力 $g_i(x, t)$ は $g_i(x, t) = g_i(\mathbf{X}, x_3 - Vt, t)$ と表すことが出来る。さらに、解析モデルは x_3 軸に垂直な断面において一定であることから、時刻 t における変位

$u_i(\mathbf{x}, t)$ は、 $g_i(\mathbf{x}, t)$ と同様に、次のように表せる。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{X}, x_3 - Vt, t) \quad (9)$$

ここで、式 (9) を、式 (4)、(5) を用いてフーリエ変換すれば、

$$\hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) = 2\pi \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) \delta(\omega - \xi_3 V) \quad (10)$$

を得ることが出来る。ただし、 $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数であり、 $\hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega)$ は $\omega = \xi_3 V$ の条件下における方程式 (6) の解である。式 (10) を式 (8) に代入すれば、変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, V\xi_3) e^{i(x_3 - Vt)\xi_3} d\xi_3 \quad (11)$$

と求まる。従って、移動荷重により支配される三次元空間における変位場 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、 $\omega = \xi_3 V$ なる条件下で二次元境界値問題を解くことに帰着され、式 (11) のように ξ_3 に関する $\hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, V\xi_3)$ の一度の逆フーリエ変換を実行することにより得られることがわかる。数値計算上では、その逆フーリエ変換は高速フーリエ変換 (FFT) により実行される。

2.2 2.5-D 動弾性境界要素法の定式化

前節で述べたように、三次元空間における変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ を求めるために、本研究では、まず式 (6)、(7) で定義された二次元境界値問題を境界要素法を用いて解く。なお、本節では、総和規約における下付き添え字は 1, 2 の値のみ有効であるとする。境界要素法における、いわゆる基本解 $U_{jk}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ は、次の運動方程式を満たす。

$$L_{ij}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, -i\xi_3) U_{jk}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \delta_{ik} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = -\rho \omega^2 U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (12)$$

この時、基本解 U_{jk} は Li ら⁹⁾により次の形式で与えられる。

$$U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{i}{4\mu} \left[H_0^{(1)}(\tilde{k}_T R) \delta_{ik} + M_{ik} \left\{ H_0^{(1)}(\tilde{k}_T R) - H_0^{(1)}(\tilde{k}_L R) \right\} \right] \quad (13)$$

ここで、 $H_0^{(1)}$ は 0 次の第一種ハンケル関数を表し、 M_{ik} は微分演算子、

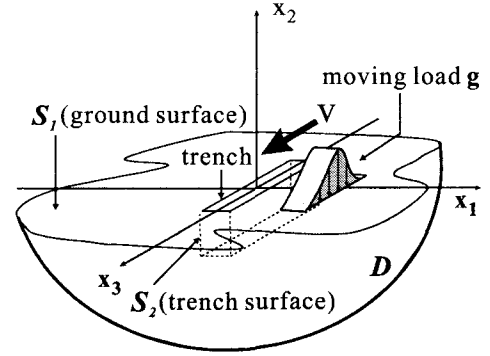


図-2 移動荷重が作用する 3-D 解析モデル

$$M_{ik} = \frac{1}{k_T^2} \left\{ \delta_{\alpha k} \delta_{\beta i} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - i\xi_3 (\delta_{3k} \delta_{\alpha i} + \delta_{3i} \delta_{\alpha k}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \xi_3^2 \delta_{3k} \delta_{3i} \right\} \quad (14)$$

で表される。ただし、 $R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ 、 $\tilde{k}_T = \sqrt{k_T^2 - \xi_3^2}$ 、 $\tilde{k}_L = \sqrt{k_L^2 - \xi_3^2}$ である。また、 k_L 、 k_T はそれぞれ P 波、S 波の波速 c_L 、 c_T を用いて $k_L = \omega/c_L$ 、 $k_T = \omega/c_T$ で定義される波数である。式 (6) に $U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を、式 (12) に $\hat{u}_i(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega)$ をかけて、前式から後式の差を取り、領域 $\bar{D}$ について積分し、整理すれば、次の積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2} \hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) = \int_{\partial S} \left\{ U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \hat{t}_k(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega) - T_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \hat{u}_k(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega) \right\} dS_Y, \mathbf{X} \in \partial S \quad (15)$$

ただし、 $T_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \tilde{T}_{ij}(\partial_{y_1}, \partial_{y_2}, -i\xi_3) U_{jk}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ である。境界積分方程式 (15) は離散化され、代数方程式に帰着することにより、境界条件 (7) の下で解かれる。こうして、式 (11) から三次元問題の解は、 $\omega = \xi_3 V$ の条件下で解かれた二次元問題の解 $\hat{u}_i(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega)$ を用いて得ることが出来る。

3. 三次元動弾性境界要素法解析

3.1 解くべき問題

2.5-D 解析は、移動荷重により支配される地盤の動的解析には非常に有効な手法であるが、荷重の移動方向に対して、解析モデルが常に一定の断面でなければならないという非常に大きな制約条件が課されている。従って、2.5-D 解析では、防振講、防振壁は x_3 方向に無限長さであると仮定しなければならない。しかし、より現実的なモデルや実現象を考慮した場合、有限長の防振講、防振

壁に対して解析を行なう必要がある。そこで、今、図-2で表されるような、移動荷重により支配される有限長さの防振溝を要する三次元半無限解析モデルを考える。防振溝表面における境界条件を除いて、移動荷重や密度、各材料定数等の条件は2.5-D問題と同一であるとする。従って、もし、有限長さの防振溝が存在しなければ、問題は既に与えられた半無限弾性地盤 D 上の移動荷重による2.5-D問題と等価である。図-2で表される三次元問題は、次のように二つの問題に帰着できる。一つは、防振溝が存在しない地盤上を移動する、移動荷重による放射問題であり、もう一つは有限長さの防振溝による散乱問題である。以下、三次元境界要素法の定式化を示す。

3.2 三次元動弾性境界要素法の定式化

移動荷重 g による入射波は、有限長さを持った防振溝、及び地表面により反射、散乱される。その時、散乱波成分 u^{sc} と対応する表面力 t^{sc} は、地表面 S_1 及び、防振溝表面 S_2 において次の積分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} & \int_S \{U_{ik}^{3D}(x, y)t_k^{sc}(y, \omega) - T_{ik}^{3D}(x, y)u_k^{sc}(y, \omega)\} dS_y \\ &= \frac{1}{2}u_i^{sc}(x, \omega), x \in S = S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 $U_{ik}^{3D}(x, y)$ は、三次元動弾性問題の基本解であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} U_{ik}^{3D}(x, y) = & \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_{rr}}}{r} \delta_{ik} \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left\{ \frac{e^{ik_{rr}}}{r} - \frac{e^{ik_{Lr}}}{r} \right\} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $r = |x - y|$ であり、 $T_{ik}^{3D}(x, y)$ は、

$$T_{ik}^{3D}(x, y) = T_{ij}^n(\partial_y)U_{jk}^{3D}(x, y) \quad (18)$$

で定義される。また、全変位 u^{3D} は次のように入射場 u^{in} と散乱場 u^{sc} の和で表される。

$$u^{3D} = u^{in} + u^{sc} \quad (19)$$

式(19)を式(16)に代入し、境界条件 $t^{3D}(x, \omega) = 0$ for $x \in S_2$, $t^{3D}(x, \omega) = t_{in}(x, \omega)$ for $x \in S_1$ を考慮すれば、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_i^{3D}(x, \omega) + \int_{S_1+S_2} T_{ik}^{3D}(x, y)u_k^{3D}(y, \omega)dS_y \\ &= \frac{1}{2}u_i^{in}(x, \omega) + \int_{S_1} T_{ik}^{3D}(x, y)u_k^{in}(y, \omega)dS_y \\ &+ \int_{S_2} \{-U_{ik}^{3D}(x, y)t_k^{in}(y, \omega) \\ &+ T_{ik}^{3D}(x, y)u_k^{in}(y, \omega)\} dS_y \end{aligned} \quad (20)$$

これまで述べたように、式(20)における入射波成分 u^{in} は、三次元半無限弾性地盤の表面を一定の速度 V で移動する、移動荷重による2.5-D問題の周波数域の解である。周波数域における2.5-D問題の解は、次のように式(11)から得られる。式(11)において、積分変数を ξ_3 に関して、 $\xi_3 = V\omega$ と変数変換すると、次の式を得る。

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{V} \hat{u}_i'(X, \frac{\omega}{V}, \omega) e^{i\omega \frac{x_3}{V}} e^{-i\omega t} d\omega \quad (21)$$

さらに、式(21)は逆 Fourier 変換の形をしているから、周波数域における入射波 $u_i^{in}(x, \omega)$ は、形式的に、

$$u_i^{in}(x, \omega) = \frac{1}{V} \hat{u}_i'(X, \frac{\omega}{V}, \omega) e^{i\omega \frac{x_3}{V}} \quad (22)$$

と得ることが出来る。このように、式(20)により得られる三次元問題の解は2.5次元問題の解を用いて求めることが出来る。

4. 三次元動弾性高速多重極境界要素法

式(20)を解く際に必要な u^{in} , t^{in} は、2.5次元解析により効率的に求められることはこれまでに述べた。しかしながら、式(20)を直接従来の境界要素法で解く事は、計算時間・記憶容量が膨大となることから好ましくない。そこで、本研究では、近年急速に発達し続けている高速多重極法⁶⁾を境界要素法に適用した高速多重極境界要素法⁷⁾を用いる。高速多重極境界要素法を用いた解析は、二次元 Helmholtz 方程式¹⁰⁾における散乱問題や、移動音源に伴う三次元音響場解析⁸⁾といった Helmholtz 方程式に関して多くの解析例を見ることが出来るが、三次元動弾性問題に対する高速多重極法の境界要素法への適用は、これまでに吉田・西村ら¹¹⁾によるクラック問題に対する解析はどしき行われていない。高速多重極境界要素法の詳細は³⁾⁷⁾によって参照出来ることから、ここでは、定式化で重要となる部分のみを述べるにとどめる。なお、高速多重極境界要素法の元となる高速多重極法は、その性

質上、高周波問題に対して、diagonal form¹²⁾といった別の定式化が存在する。しかし、本研究で必要となるのは低周波部分であることから、diagonal form を用いない高速多重極境界要素法について述べる。高速多重極境界要素法では、まず基本解 (17), (18) を変数 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に関する分離系で表すことを考える。Epton, Dembart¹³⁾ に習い、式 (17), (18) に含まれる $e^{ik_\beta r}/r$ の項を、次の多重極展開で表す。

$$\frac{e^{ik_\beta r}}{r} = ik_\beta \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \bar{I}_n^m(k_\beta, \mathbf{y} - \mathbf{o}) O_n^m(k_\beta, \mathbf{x} - \mathbf{o}) \quad (23)$$

ただし、 k_β は k_L , または k_T を代表して表す。また、 $\bar{\cdot}$ は複素共役を表す。点 $\mathbf{o}$ は、 $|\mathbf{x} - \mathbf{o}| > |\mathbf{y} - \mathbf{o}|$ を満たす点であり、多重極点である。関数 $O_n^m, \bar{I}_n^m$ は次の式で定義される。

$$O_n^m(k_\beta, \mathbf{x} - \mathbf{o}) = h_n^{(1)}(k_\beta |\mathbf{x} - \mathbf{o}|) Y_n^m\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{o}}{|\mathbf{x} - \mathbf{o}|}\right) \quad (24)$$

$$\bar{I}_n^m(k_\beta, \mathbf{y} - \mathbf{o}) = j_n^{(1)}(k_\beta |\mathbf{y} - \mathbf{o}|) Y_n^m\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{o}}{|\mathbf{y} - \mathbf{o}|}\right) \quad (25)$$

ここで $h_n^{(1)}, j_n^{(1)}$ はそれぞれ球ハンケル関数と球ベッセル関数¹⁴⁾であり、球面調和関数 Y_n^m は次のように定義する。

$$Y_n^m\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{o}}{|\mathbf{x} - \mathbf{o}|}\right) = \kappa_m \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (26)$$

ただし、

$$\kappa_m = \begin{cases} (-1)^m & \text{when } m \geq 0 \\ 1 & \text{when } m < 0 \end{cases} \quad (27)$$

である。また、 θ, ϕ は点 $\mathbf{o}$ から見た点 $\mathbf{x}$ の極座標系における天頂角と方位角である。また、 P_n^m は Legendre 陪関数である。まず、式 (17) の基本解を次のように変形する。

$$U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu k_t^2} \left(\epsilon_{rqi} \epsilon_{rsk} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial y_s} \frac{e^{ik_T r}}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_k} \frac{e^{ik_L r}}{r} \right) \quad (28)$$

ここに、 ϵ_{ijk} は交代記号である。また、この変形は、後に説明する多重極モーメント $M_{n,m}^{U_L}, M_{n,m}^{U_T}, M_{n,m}^{T_L}, M_{n,m}^{T_T}$ の種類を定式化の段階で減少させる効果を持つ。式 (23)

を式 (28) の基本解に代入すると、次の変数 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に関する分離系で表された基本解の多重極展開表現を得ることが出来る。

$$\begin{aligned} \int_S U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) dS &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n \epsilon_{rqi} \\ &\times \frac{\partial}{\partial x_q} O_n^m(k_T, \mathbf{x} - \mathbf{o}) M_{r,n,m}^{U_T}(\mathbf{o}) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n \frac{\partial}{\partial x_i} O_n^m(k_L, \mathbf{x} - \mathbf{o}) M_{n,m}^{U_L}(\mathbf{o}) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、係数 A_n, B_n は、 $A_n = (2n+1)i/4\pi\mu k_T$, $B_n = (2n+1)ik_L/4\pi\mu k_T^2$ である。また、係数 $M_{r,n,m}^{U_T}(\mathbf{o}), M_{n,m}^{U_L}(\mathbf{o})$ は、

$$M_{r,n,m}^{U_T}(\mathbf{o}) = \int_S \epsilon_{rsk} \frac{\partial}{\partial y_s} \bar{I}_n^m(k_T, \mathbf{y} - \mathbf{o}) t_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (30)$$

$$M_{n,m}^{U_L}(\mathbf{o}) = \int_S \frac{\partial}{\partial y_k} \bar{I}_n^m(k_L, \mathbf{y} - \mathbf{o}) t_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (31)$$

で表され、観測点 $\mathbf{x}$ に依存しない係数である。これらは多重極モーメントと呼ばれる。同様に、式 (18) に対応する多重極モーメントは、

$$\begin{aligned} M_{r,n,m}^{T_T}(\mathbf{o}) &= \int_S \epsilon_{rsp} C_{jkpq} n_k(\mathbf{y}) \\ &\times \frac{\partial}{\partial y_q} \frac{\partial}{\partial y_s} \bar{I}_n^m(k_T, \mathbf{y} - \mathbf{o}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} M_{n,m}^{T_L}(\mathbf{o}) &= \int_S C_{jkpq} n_k(\mathbf{y}) \\ &\times \frac{\partial}{\partial y_q} \frac{\partial}{\partial y_p} \bar{I}_n^m(k_L, \mathbf{y} - \mathbf{o}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (33)$$

と求めることが出来る。これらの多重極係数は、次のような高速多重極アルゴリズム³⁾を用いて処理する。

1. 解析領域を、8 分木構造に対応した立方体のセルに分割した階層構造にする。
2. 式 (30)-(33) で分離された点 $\mathbf{y}$ に関する多重極モーメントを順に各セルの中心に移動 (M2M) させながら、レベル 2 の階層まで集める。
3. レベル 2 から順に多重極係数を局所展開係数に変換 (M2L) し、変換した局所展開係数を集めながら (L2L)、8 分木構造の葉のセルに含まれる全ての $\mathbf{x}$ についての影響を計算し、これらの計算に寄与しない全ての $\mathbf{y}$ からの影響を通常の境界要素法同様、直接計算して加える。

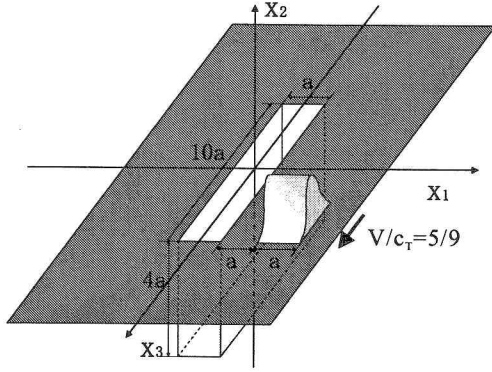


図-3 防振溝が一つの場合の解析モデル

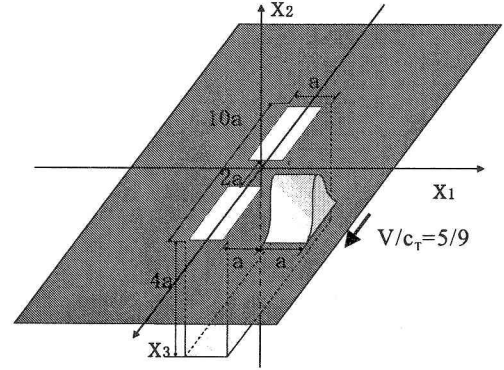


図-4 防振溝が二つの場合の解析モデル

各多重極係数の変換関係 M2M, M2L, L2L は、次の式から導かれる。まず次のような関数 $\tilde{Q}_n^m$ を定義する。

$$\tilde{Q}_n^m(k_\beta, a) = s_n(k_\beta |a|) Y_n^m\left(\frac{a}{|a|}\right) \quad (34)$$

ここで、 s_n は球ベッセル関数、球ハンケル関数を代表的に表す。この時、Epton, Dembart による関係式¹³⁾を使えば、式 (34) は、

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n^m(b+c) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-l}^l \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{(2l+1)(2n'+1)}{4\pi} \\ &\times i^{n'-n+l} E \begin{pmatrix} m & m' & -j \\ m & n' & l \end{pmatrix} \tilde{I}_{n'}^{-m'}(c) \tilde{Q}_l^j(b) \end{aligned} \quad (35)$$

と表される。ただし、 $j = m + m'$, $l = n + n' - 2\alpha$ であり、 α は正の整数である。また、 $E(\dots)$ は、Wigner-3j symbol¹⁵⁾を用いて、

$$E \begin{pmatrix} m & j & \mu \\ n & l & \nu \end{pmatrix} = 4\pi \kappa_m \kappa_j \kappa_\mu \begin{pmatrix} n & l & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l & \nu \\ m & j & \mu \end{pmatrix} \quad (36)$$

と表される。式 (35) は、Helmholtz 方程式における高速多重極法の各係数の変換関係式であり、式 (35) を用いれば、M2M, M2L, L2L といった多重極係数の移動公式を導くことが出来る。

5. 解析例

以下、本手法を用いた解析結果を示す。なお全ての解析結果は、防振溝の側を荷重が等速度 $V/c_T = 5/9$ で通過する場合の結果であり、その荷重は図-5に示すような、 $\sin^2(x_3 - Vt)$ の分布を x_3 方向に持つ。 x_1 方向には $1.5 < x_1/a < 2.5$ の範囲に一様に作用するものとする。また時刻 $c_T t/a = 0$ においてピークが x_1 軸上に到達するものとする。なお、地盤内の P 波と S 波の速度比は $c_L/c_T = 2$

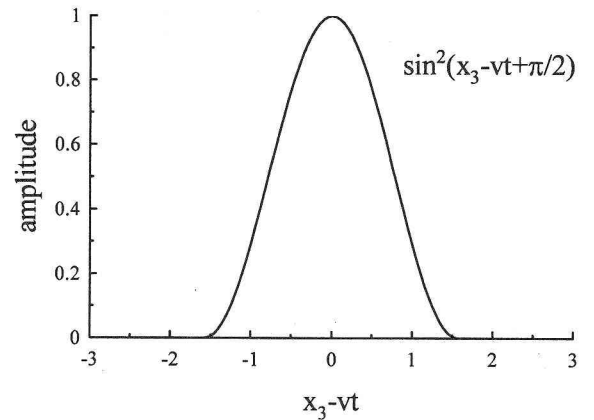


図-5 x_3 軸に沿って移動する移動荷重分布

とした。図-6-12は、 $x_1 - x_3$ 平面の鉛直方向変位場の時刻歴を示している。図-12のみ防振溝が存在しない場合の解析結果を示した。また、図-6-11における白抜き部分は防振溝に相当する部分である。式 (20) より離散化された代数方程式を解く為の反復法として、GMRES 法¹⁶⁾を用いた。GMRES 法はリスタートさせることなく、対角付近の成分のみを用いた行列を前処理行列として扱った。

5.1 単一の防振溝の場合

図-3に示すように、有限長の大きさを持った一つの防振溝を考える。溝の大きさは荷重移動方向の長さ $10a$ 深さ $4a$ 、幅 a であるとする。解析結果を、図-6～図-8に示す。図-12と比べると、図-7において、荷重に対して溝の反対側で変位が小さくなっていることから防振溝の効果を確認出来る。荷重に対して溝の反対側の点をさらによく見ると、図-8 では、図-7で一度小さくなった変位が再度大きくなっており、図 6 と同様、防振溝に対する回折効果を確認することが出来る。

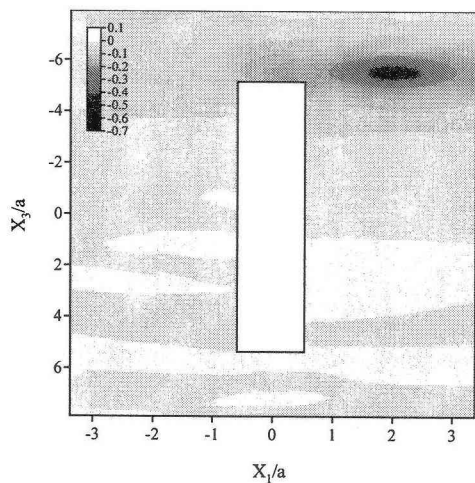


図-6 $x_1 - x_3$ 平面の変位場: $c_T t/a = -10.0$

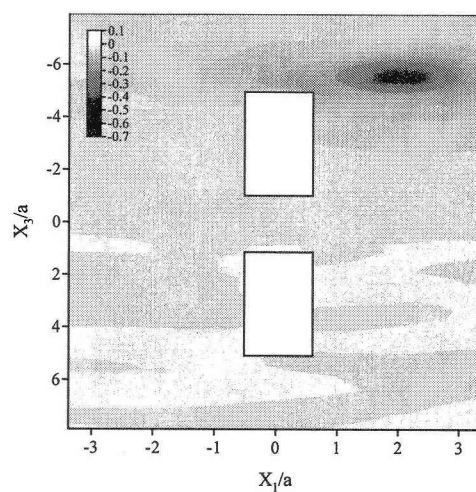


図-9 $x_1 - x_3$ 平面の変位場: $c_T t/a = -10.0$

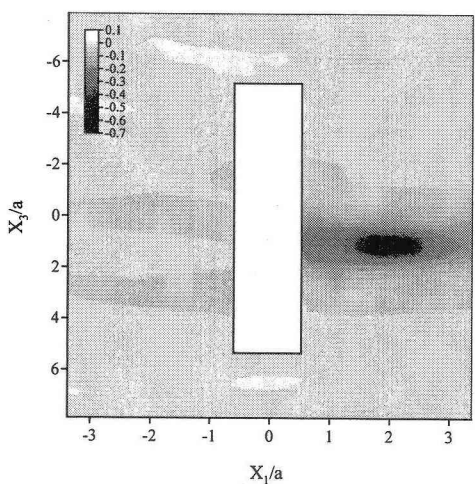


図-7 $x_1 - x_3$ 平面の変位場: $c_T t/a = 2.0$

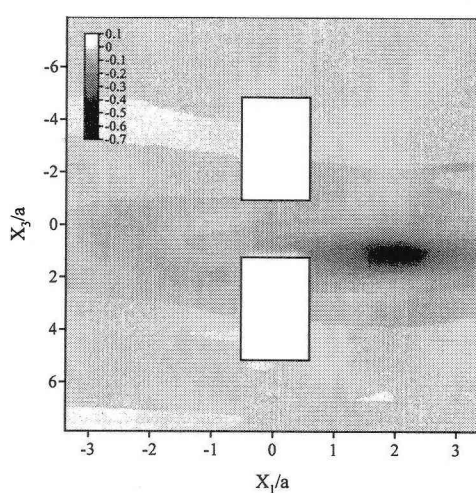


図-10 $x_1 - x_3$ 平面の変位場: $c_T t/a = 2.0$

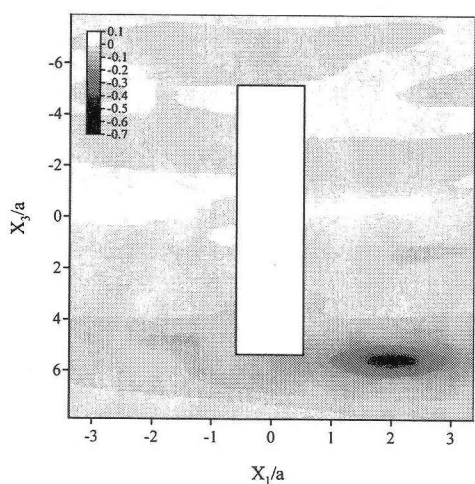


図-8 $x_1 - x_3$ 平面の変位場: $c_T t/a = 10.0$

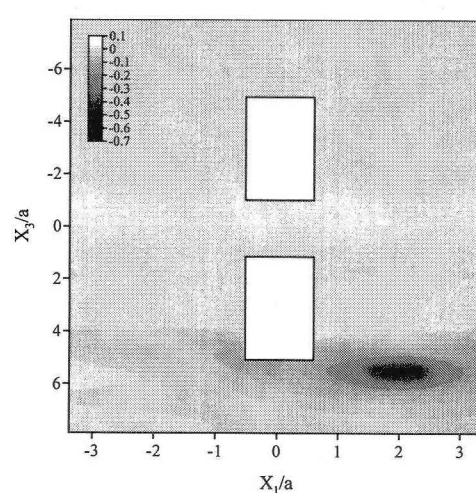


図-11 $x_1 - x_3$ 平面の変位場: $c_T t/a = 10.0$

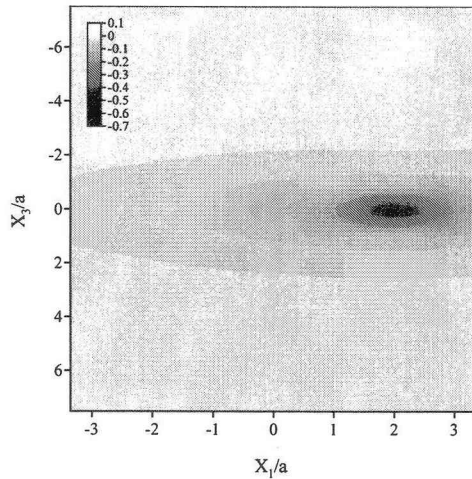


図-12 防振溝が存在しない場合の $x_1 - x_3$ 平面の変位場: $c_T t/a = 0.0$

5.2 防振溝が二つ存在する場合

次に、図-4に示すような、間隔 $2a$ で二つの防振溝が設置されている場合に、荷重がその側を通過する問題を考える。解析結果を図-9-11に示す。図-9,11において、防振溝の端部における回折現象を確認できる。また、図-10は、荷重が二つの防振溝の切れ目の部分に位置することから、二つの防振溝の間では、防振溝の効果は出ず、同様に回り込みの影響を見て取れる。なお、高速多重極境界要素法の導入により、従来の境界要素法に比べて計算時間・記憶容量共に、1/10 程減少させることが出来た。

6. 結言

本研究では、環境振動解析のための 2.5-D・3-D 高速多重極境界要素・結合解法の開発を行った。その結果、移動荷重問題に対し効率的に解析を行うことが出来た。また、本手法を用いて、時間と共に移動する荷重を再現し、防振溝による振動低減効果を確認することができた。しかし、高速多重極境界要素法の使用には、反復法における適切な前処理法の選択など、いくつか問題点が残されている。従って今後は、高速多重極境界要素法についての研究を進めながら、環境振動問題に対しては、荷重が振動しながら移動する問題や、防振壁に対する解析を行う予定である。

参考文献

- 1) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S.: *Elastodynamics Volume II Linear Theory*, New York, Academic Press(1975).
- 2) Hanazato, T. et al. : Three-dimensional analysis of traffic-induced ground vibrations, *J. Geotech. Eng. ASCE* **117** (1991), pp. 1133-1151.

- 3) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，(2000).
- 4) Hirose, S. and Kitahara, M. : Scattering from an interface defect between fiber and matrix, In D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds), *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* **14**, New York, Plenum Press (1995), pp. 99-106.
- 5) 廣瀬壮一・土戸研一：2.5D-3D 結合解析を用いた振動低減手法の検討に関する研究，第 10 回鉄道技術連合シンポジウム (2003), pp. 585-588.
- 6) Greengard, L. and Rokhlin, V. : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, **73** (1987), pp. 325-348.
- 7) Nishimura, N. : Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Applied Mechanics Rev.* **55** (2002), pp. 299-324.
- 8) 斎藤隆泰・廣瀬壮一：三次元高速多重極境界要素法を用いた移動音源に伴う音響場解析，境界要素法論文集，**20**(2003), pp. 67-72.
- 9) Li, Z. L. et al. : Refraction and transmission of obliquely incident surface waves by an edge of a quarter space: Theory and experiment, *J. Appl. Mech.* **59** (1992), pp. 349-355.
- 10) 福井卓雄・勝本順三：二次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用，境界要素法論文集，**14**(1997), pp. 81-86.
- 11) 吉田研一・西村直志・小林昭一：多重極積分方程式方を用いたクラックによる 3 次元弾性波動散乱問題の解析，応用力学論文集，**3**(2000), pp. 143-150.
- 12) Rokhlin, V. : Diagonal forms of translation operators for Helmholtz equation in three dimensions, *Appl. and comp. harmonic analysis* **1**(1993), pp. 82-93.
- 13) Epton, M. A. and Dembart, B. : Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, *SIAM J. Sci. COMPUT.*, **16** (1995), pp. 865-897.
- 14) Abramowitz, M. and Stegun, I. A. : *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1965).
- 15) Messiah, A. : *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons (North Holland), New York (1967).
- 16) Saad, Y. and Schultz, M. H. : GMRES: A Generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. STAT. COMPUT.*, **7**, No3 (1986), pp. 856-869.

(2004 年 4 月 16 日 受付)