

3次せん断変形理論に基づく spline 要素法を用いた 直交異方性厚板の振動解析

Free vibration of orthotropic thick plates using the spline element method
based on high-order shear deformation theory

名木野 晴暢* 水澤 富作** 三上 隆***

Harunobu NAGINO, Tomisaku MIZUSAWA, Takashi MIKAMI

*北海道大学大学院 博士後期課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

**大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町40)

***北海道大学大学院 教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

This paper presents free vibration of orthotropic thick plates using the spline element method based on the Reddy's shear deformation theory. The orthotropic plates are made of Aragonite crystal and wood (sitka spruce). To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods based on the theory of elasticity, high-order shear deformation plate theory and Mindlin plate theory. Good convergence and accuracy are obtained. The effects of thickness/width ratio, shear elastic modulus ratio and elastic modulus ratio on frequency parameters of orthotropic thick plates are investigated. Lastly, the applicable limitation of the Reddy's shear deformation theory for strong orthotropic plates is also shown.

Key Words: high-order shear deformation theory, spline element method, orthotropic, thick plates, free vibration, coverage of high-order shear deformation theory

1. まえがき

3次元弾性体でモデル化した直交異方性厚板を有限要素解析する際には、形状関数の次数や要素分割数を増大させると非常に大きな未知数を取り扱うことになるので、計算時間や計算機の容量の制限を大きく受ける。

このような問題を回避するために、著者ら¹⁾は、3次元問題を2次元問題または1次元問題に低減できる3次元 spline 帯板要素モデルを定式化し、直交異方性厚板の自由振動解析への適用について検討を行ってきた。しかしながら、3次元 spline 帯板要素の適用にあたっては、①境界条件に制限を受ける、②中間支持条件を容易に扱うことができない、などの欠点がある。

したがって、任意の境界条件を取り扱える直交異方性厚板の解析手法の開発が重要な課題になる。また、実務設計では、簡便で、面外せん断変形や回転慣性の影響を考慮した直交異方性板理論の適用が必要になる。

これまでに、せん断修正係数 κ を導入した1次せん断変形理論で知られている Mindlin 板理論^{2),3)}を用いた直交異方性厚板の自由振動解析が多数報告されている。こ

の板理論では、面外せん断変形の影響をせん断修正係数 κ で補正する必要がある。等方性板の振動問題を対象にしたせん断修正係数 κ は $\pi^2/12$ になるが、直交異方性板では、2方向で異なる値になり、また、その値を評価する方法が必ずしも明らかにされていない。この問題を克服するために、Levinson-Murthy-Reddy の3次せん断変形理論^{4),5),6)}、Lo-Christensen-Wu の高次せん断変形理論⁷⁾、Kant らの高次せん断変形理論⁸⁾や平島らの一般化高次せん断変形理論⁹⁾などの種々の高次せん断変形板理論が提案されてきている。これらの高次せん断変形理論では、一次せん断変形理論で導入されるせん断修正係数を必要としないが、Lo-Christensen-Wu の高次せん断変形理論では、たわみに関して厚さ方向には2次多項式が、Kant らの高次せん断変形理論では3次多項式が仮定される。しかし、前者は11個、後者は12個もの未知量を取り扱うことになり、また物理的に意味の持たない高次の断面力やひずみ量が導入されることになる。また、これらの物理量に対応した境界条件の定義が明確ではないように思われる。

一方、Reddy の3次せん断変形理論では、2方向の面

内変位が厚さ方向の3次多項式で仮定され、また面外せん断変形の影響を近似的に考慮するせん断修正係数が必要でなくなる利点を有している。また、面内の変位を無視した曲げ問題では、独立した変位関数が3つ (W , ϕ_x , ϕ_y) になり、最終的に得られる系の未知数の数が Mindlin 板理論と同じ未知数になる利点もある。

Reddy ら⁹⁾は、3次せん断変形理論を用いて周辺単純支持された等方性板と直交異方性板および積層板の自由振動解析を行っており、厳密解を示している。また、水澤ら¹⁰⁾は、3次せん断変形理論に基づく spline 帯板法を用いて、積層板の自由振動解析に適用し、精度の高い結果を示している。しかしながら、これらの解析手法では、境界条件に大きな制限が見られる。その他にも Reddy の3次せん断変形理論を用いた研究報告は、積層板を対象にして、多く発表がなされているが、直交異方性板に適用した研究報告は、比較的少ないように思われる。

本論文では、任意の境界条件の導入を考慮できる Reddy の3次せん断変形理論に基づく spline 要素法を定式化し、直交異方性厚板の振動解析への適用について検討を行っている。本手法の収束性や解析精度について検討を行い、また強い異方性を有する直交異方性厚板の振動解析における本理論の適用範囲についても検討を行っている。

2. Reddy-spline 要素モデルの定式化

Reddy の3次せん断変形理論とポテンシャルエネルギー-最小の原理を用いて、Reddy-spline 要素モデルを導く。

式の定式化にあたり、以下のような解析仮定を設ける。

- (a) 微小変形を仮定する。
- (b) 厚板は直交異方性、線形弾性であると仮定する。
- (c) 長方形板の板厚は、一定であると仮定する。
- (d) 面内振動は無視し、曲げ振動のみを考慮する。

また、図-1に示す無次元直交座標 (ξ , η , ζ) を用いて、式の定式化を行う。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h \quad (1)$$

ここで、 a は厚板の幅、 b は長さ、 h は厚さである。

Reddy の3次せん断変形理論では、それぞれ独立した次式のような変位関数が仮定される^{4),5),6)}。

$$u(\xi, \eta, \zeta) = h \begin{bmatrix} U(\xi, \eta) + \zeta \phi_x(\xi, \eta) \\ -\left(\frac{4}{3}\right) \zeta^3 \left\{ \left(\frac{h}{a}\right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \phi_x(\xi, \eta) \right\} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = h \begin{bmatrix} V(\xi, \eta) + \zeta \phi_y(\xi, \eta) \\ -\left(\frac{4}{3}\right) \zeta^3 \left\{ \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \phi_y(\xi, \eta) \right\} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

$$w(\xi, \eta, 0) = hW(\xi, \eta) \quad (2c)$$

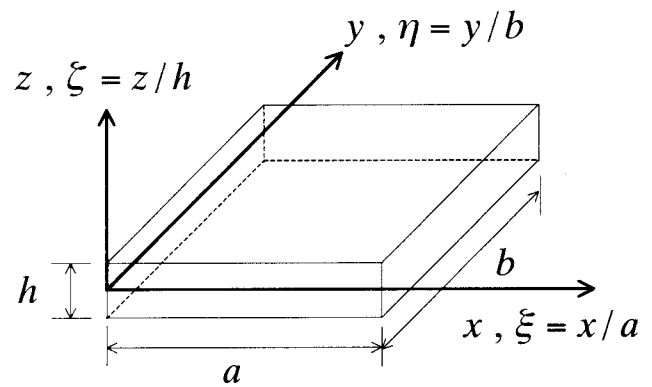


図-1 直交異方性厚板と無次元座標系

ここで、 h は、板厚であり、 $U(\xi, \eta)$, $V(\xi, \eta)$ は面内変位、 $\phi_x(\xi, \eta)$, $\phi_y(\xi, \eta)$ は、それぞれ、 y 軸まわりおよび x 軸まわりの回転角、 $W(\xi, \eta)$ は、中立面でのたわみである。

ここで、解析仮定に基づき面内変位を無視すると、変位関数は、次式ようになる。

$$u(\xi, \eta, \zeta) = h \left[\zeta \phi_x(\xi, \eta) - \left(\frac{4}{3}\right) \zeta^3 \left\{ \left(\frac{h}{a}\right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \phi_x(\xi, \eta) \right\} \right] \quad (3a)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = h \left[\zeta \phi_y(\xi, \eta) - \left(\frac{4}{3}\right) \zeta^3 \left\{ \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \phi_y(\xi, \eta) \right\} \right] \quad (3b)$$

$$w(\xi, \eta, 0) = hW(\xi, \eta) \quad (3c)$$

したがって、Reddy-spline 要素モデルで仮定される3つの変位関数は、B-spline 関数を用いて、それぞれ次式で仮定する。

$$\phi_x(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{ \delta_A \}_{mn} \quad (4a)$$

$$\phi_y(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{ \delta_B \}_{mn} \quad (4b)$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{ \delta_C \}_{mn} \quad (4c)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$, $N_{n,k}(\eta)$ は $k-1$ 次の正規化された B-spline である。また、

$$[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi) \cdot N_{1,k}(\eta), \dots, N_{i_x,k}(\xi) \cdot N_{i_y,k}(\eta)] \quad (5)$$

であり、未定係数ベクトルは、

$$\{ \delta_A \}_{mn} = \{ A_{11}, A_{12}, \dots, A_{i_x i_y} \}_{mn}^T \quad (6a)$$

$$\{\delta_B\}_{mn} = \{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{i_x i_y}\}_{mn}^T \quad (6b)$$

$$\{\delta_C\}_{mn} = \{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{i_x i_y}\}_{mn}^T \quad (6c)$$

になる。ここで、 $i_x = k-1+M_x$, $i_y = k-1+M_y$, M_x と M_y は、それぞれ x と y 方向の要素の分割数であり、また $k-1$ は spline 次数である。

式 (4) をマトリックス表示すれば、次式で表される。

$$\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (7)$$

ここで、

$$\{d\} = \{u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta), w(\xi, \eta, 0)\}^T,$$

$$\{\Delta\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn}, \{\delta_B\}_{mn}, \{\delta_C\}_{mn}\}^T$$

である。

また、 $[S]_{mn}$ は、次式で表される。

$$[S]_{mn} = h \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left[\xi - \left(\frac{4}{3}\right) \zeta^3 \right] \\ \times N_m \cdot N_n \end{array} \right\} & 0 & \left\{ -\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{h}{a}\right) \zeta^3 \right\} \\ 0 & \left\{ \left[\xi - \left(\frac{4}{3}\right) \zeta^3 \right] \right\} & \left\{ -\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{h}{b}\right) \zeta^3 \right\} \\ 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{l} \times \dot{N}_m \cdot \dot{N}_n \\ N_m \cdot N_n \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、 $N_m = N_{m,k}(\xi)$, $N_n = N_{n,k}(\eta)$,

$\dot{N}_m = \partial N_{m,k}(\xi)/\partial \xi$, $\dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta)/\partial \eta$ である。

次に、3 次せん断変形理論で定義される垂直ひずみおよびせん断ひずみは、それぞれ無次元直交座標系を用いて次式で表される。

$$\varepsilon_x = \zeta \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \zeta^3 \left[-\left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \left(\frac{h}{a}\right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\} \right] \quad (9a)$$

$$\varepsilon_y = \zeta \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \zeta^3 \left[-\left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\} \right] \quad (9b)$$

$$\gamma_{zx} = \phi_x(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \zeta^2 \left[-4 \left\{ \phi_x(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\} \right] \quad (9c)$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \zeta^2 \left[-4 \left\{ \phi_y(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\} \right] \quad (9d)$$

$$\gamma_{xy} = \zeta \left\{ \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\} + \zeta^3 \left\{ \begin{array}{l} \left[2 \left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \right] \\ - \left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \left(\frac{h}{a}\right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right. \\ \left. + \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\} \right\} \quad (9e)$$

ここで、

$$\gamma_{0zx} = \phi_x(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$\gamma_{0yz} = \phi_y(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad K_{1x} = \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$K_{1y} = \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad K_{1xy} = \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \eta}$$

$$K_{2zx} = -4 \left\{ \phi_x(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{a} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\}, \quad K_{2yz} = -4 \left\{ \phi_y(\xi, \eta) + \left(\frac{h}{b} \right) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\},$$

$$K_{3x} = -\left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \left(\frac{h}{a}\right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\},$$

$$K_{3y} = -\left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}$$

$$K_{3xy} = -\left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \begin{array}{l} 2 \left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \\ + \left(\frac{h}{a}\right) \frac{\partial \phi_y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ + \left(\frac{h}{b}\right) \frac{\partial \phi_x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{array} \right\}$$

と表せば、次式のようにも表される。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{0zx} \\ \gamma_{0yz} \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} K_{1x} \\ K_{1y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \zeta^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{2zx} \\ K_{2yz} \end{Bmatrix} + \zeta^3 \begin{Bmatrix} K_{3x} \\ K_{3y} \\ K_{3xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [T] \{\varepsilon_0\} \quad (10)$$

ただし、 $\{\varepsilon_0\} = \{K_{1x}, K_{1y}, K_{1xy}, \gamma_{0zx}, \gamma_{0yz}, K_{2zx}, K_{2yz}, K_{3x}, K_{3y}, K_{3xy}\}^T$

であり, $[T]$ は, 次式で表される.

$$[T] = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ひずみ $\{\varepsilon_0\}$ は, 式 (4) を用いれば, 次のように表される.

$$\{\varepsilon_0\} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (12)$$

ここで, $[B]_{mn}$ は, ひずみマトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[B]_{mn} = \sum_{m=1}^{i_1} \sum_{n=1}^{i_2} \begin{bmatrix} \left(\frac{h}{a}\right) \dot{N}_m \cdot N_n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{h}{b}\right) N_m \cdot \dot{N}_n & 0 \\ \left(\frac{h}{b}\right) N_m \cdot \dot{N}_n & \left(\frac{h}{a}\right) \dot{N}_m \cdot N_n & 0 \\ N_m \cdot N_n & 0 & \left(\frac{h}{a}\right) \dot{N}_m \cdot N_n \\ 0 & N_m \cdot N_n & \left(\frac{h}{b}\right) N_m \cdot \dot{N}_n \\ -4 \cdot N_m \cdot N_n & 0 & -4 \left(\frac{h}{a}\right) \dot{N}_m \cdot N_n \\ 0 & -4 \cdot N_m \cdot N_n & -4 \left(\frac{h}{b}\right) N_m \cdot \dot{N}_n \\ -\frac{4}{3} \left(\frac{h}{a}\right) \dot{N}_m \cdot N_n & 0 & -\frac{4}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \ddot{N}_m \cdot N_n \\ 0 & -\frac{4}{3} \left(\frac{h}{b}\right) N_m \cdot \dot{N}_n & -\frac{4}{3} \left(\frac{h}{b}\right)^2 N_m \cdot \dot{N}_n \\ -\frac{4}{3} \left(\frac{h}{b}\right) N_m \cdot \dot{N}_n & -\frac{4}{3} \left(\frac{h}{a}\right) \dot{N}_m \cdot N_n & -\frac{8}{3} \left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{h}{b}\right) \dot{N}_m \cdot \dot{N}_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし, $N_m = N_{m,k}(\xi)$, $N_n = N_{n,k}(\eta)$,
 $\dot{N}_m = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$, $\dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta) / \partial \eta$,
 $\ddot{N}_m = \partial^2 N_{m,k}(\xi) / \partial \xi^2$, $\ddot{N}_n = \partial^2 N_{n,k}(\eta) / \partial \eta^2$ である.

したがって, 式 (10) と式 (4) を用いれば, 次式が成り立つ.

$$\{\varepsilon\} = [T][B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (14)$$

3 次せん断変形理論に基づく直交異方性板の構成式は, 次式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = E_x \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (15)$$

また, マトリックスで表わせば, 次式となる.

$$\{\sigma\} = [d] \{\varepsilon\} \quad (16)$$

ここで, $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \ \tau_{zx} \ \tau_{yz}\}^T$,
 $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{yz}\}^T$ である. また,
 C_{ij} ($i, j = 1, \dots, 5$)は次式で与えられる.

$$C_{11} = 1 / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$$

$$C_{12} = C_{21} = \nu_{yx} / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$$

$$C_{22} = (E_y / E_x)(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}), \quad C_{33} = G_{xy} / E_x,$$

$$C_{44} = G_{yz} / E_x, \quad C_{55} = G_{zx} / E_x \quad (17)$$

ただし, E_i ($i = x, y$)はヤング係数, ν_{xy}, ν_{yx} はポアソン比, G_{ij} ($i, j = x, y, z$)はせん断弾性係数である.

さらに, 直交異方性体においては, 以下に示すような相反定理が成り立つ.

$$\nu_{xy} / E_x = \nu_{yx} / E_y \quad (18)$$

等厚な直交異方性長方形板のひずみエネルギー U_p は, 無次元直交座標系を用いれば, 次式で表される.

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} (abh) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} (abh E_x) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \{\varepsilon\}^T [d] \{\varepsilon\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \{\Delta\}_{mn}^T [K]_{mni j} \{\Delta\}_{ij} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで, $[K]_{mni j}$ は, 剛性マトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[K]_{mni j} = (abh E_x) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} [B]_{mn}^T [T]^T [d] [T] [B]_{ij} d\xi d\eta d\zeta \quad (20)$$

また, 運動エネルギー T は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} T &= (\rho \omega^2) (abh) \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \{u^2 + v^2 + w^2\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \{\Delta\}_{mn}^T [M]_{mni j} \{\Delta\}_{ij} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで, $[M]_{mni j}$ は, 質量マトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[M]_{mni j} = (\rho abh^3) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} [S]_{mn}^T [S]_{ij} d\xi d\eta d\zeta \quad (22)$$

ただし, ρ は長方形厚板の密度, ω (rad/sec)は円振動数である.

表-1 アラゴナイトクリスタルとシトカスプルーースの物性値^{6),15)}

材種名	ヤング係数		せん断弾性係数			ポアソン比
	E_x	E_y	G_{xz}	G_{yz}	G_{xy}	ν_{xy}
アラゴナイトクリスタル ⁵⁾	144	75.2	25.6	42.7	42.1	0.44
	[GPa]		[GPa]			-
シトカスプルーース柁目板 ¹⁶⁾	$E_x(E_R)$	$E_y(E_L)$	$G_{xz}(G_{RT})$	$G_{yz}(G_{LT})$	$G_{yx}(G_{LR})$	$\nu_{yx}(\nu_{LR})$
	0.90	11.6	0.03	0.72	0.76	0.37
	[GPa]		[GPa]			-

境界条件は、仮想バネ法を用いて導入する^{1),10),11),12)}。境界辺での変位 W 、 ϕ_x 、 ϕ_y 、 $\partial W / \partial \xi$ 、 $\partial W / \partial \eta$ に対応する仮想バネ係数 α 、 β 、 δ 、 λ 、 κ を導入する。これらの仮想バネによるひずみエネルギー U_b は、次式で与えられる。

$$U_b = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[\alpha \cdot W^2(\xi, \eta) + \beta \cdot \phi_x^2(\xi, \eta) + \delta \cdot \phi_y^2(\xi, \eta) \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{a^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle^2 + \frac{\kappa}{b^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle^2 \right]_{\xi=0} \\ + \left[\alpha \cdot W^2(\xi, \eta) + \beta \cdot \phi_x^2(\xi, \eta) + \delta \cdot \phi_y^2(\xi, \eta) \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{a^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle^2 + \frac{\kappa}{b^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle^2 \right]_{\xi=1} \\ + \left[\alpha \cdot W^2(\xi, \eta) + \beta \cdot \phi_x^2(\xi, \eta) + \delta \cdot \phi_y^2(\xi, \eta) \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{a^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle^2 + \frac{\kappa}{b^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle^2 \right]_{\eta=0} \\ + \left[\alpha \cdot W^2(\xi, \eta) + \beta \cdot \phi_x^2(\xi, \eta) + \delta \cdot \phi_y^2(\xi, \eta) \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{a^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle^2 + \frac{\kappa}{b^2} \cdot \left\langle \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle^2 \right]_{\eta=1} \end{array} \right. \quad (23)$$

ここで、仮想バネ係数は、

(a) 固定辺では、 $\alpha = \beta = \delta = \lambda = \infty$ 、または、

$$\alpha = \beta = \delta = \kappa = \infty$$

(b) 単純支持辺では、 $\beta = \delta = \infty$ 、または、

$$\alpha = \delta = \infty$$

(c) 自由辺では、 $\alpha = \beta = \delta = \lambda = \kappa = 0$

になる。

したがって、直交異方性板の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_p + U_b - T \quad (24)$$

ここで、 U_p はひずみエネルギー、 U_b は仮想バネによるひずみエネルギー、また T は運動エネルギーである。

ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いれば、次式の固有方程式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\}_{mn}^T} = \left([K]_{mnij} - \omega^2 [M]_{mnij} \right) \{\Delta\}_{ij} = 0 \quad (25)$$

ここで、剛性マトリックス、 $[K]_{mnij}$ は、次式のようなサブ剛性マトリックスから構成されている。

$$[K]_{mnij} = \begin{bmatrix} [K]_{\phi_x \phi_x} & [K]_{\phi_x \phi_y} & [K]_{\phi_x W} \\ [K]_{\phi_y \phi_x} & [K]_{\phi_y \phi_y} & [K]_{\phi_y W} \\ [K]_{W \phi_x} & [K]_{W \phi_y} & [K]_{WW} \end{bmatrix} \quad (26)$$

また、質量マトリックス、 $[M]_{mnij}$ は、

$$[M]_{mnij} = \begin{bmatrix} [M]_{\phi_x \phi_x} & 0 & [M]_{\phi_x W} \\ 0 & [M]_{\phi_y \phi_y} & [M]_{\phi_y W} \\ [M]_{W \phi_x} & [M]_{W \phi_y} & [M]_{WW} \end{bmatrix} \quad (27)$$

になる。

サブ剛性マトリックス、 $[K]_{i,j}$ および、サブ質量マトリックス、 $[M]_{i,j}$ は Legendre-Gauss の数値積分公式により求めている。また、ここで、 $[K]_{mnij}$ と $[M]_{mnij}$ の大きさは、 $3 \times (k-1+M_x) \times (k-1+M_y)$ で表される。ただし、先にも述べたように、 $k-1$ は、spline 次数、 M_x と M_y はそれぞれ x と y 方向の要素分割数である。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、本手法を用いて、任意の境界条件を有する直交異方性厚板の自由振動解析を行い、解の収束性と精度比較について検討する。数値計算に用いる直交異方性板の材料は、表-1に示すような物性値を持つアラゴナイトクリスタル材とシトカスプルーース材である。

また、直交異方性厚板の境界条件は、CF-FSのように表し、それぞれ x 方向の2つの直線辺($\xi=0, 1$)で固定辺(C)、自由辺(F)であり、 y 方向の2つの直線辺($\eta=0, 1$)で自由辺(F)、単純支持辺(S)に相当している。

Spline 次数は $k-1=4$ とし、要素分割は等分割($M_x = M_y$)を用いて、計算を行っている。

3.1 本手法の解の収束性と精度比較の検討

任意の境界条件を有する直交異方性厚板の振動解析を行い、解の収束性および精度比較について検討する。ただし、等方性板とシトカスプルーース柁目板の振動数パラメータは、 $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D_x}$ で表し、アラゴナイトク

リスタル板の振動数パラメータは、 $n^{**} = \omega h \sqrt{\rho/D_{11}}$ で定義する。ここで、 $D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ は板の曲げ剛性であり、また $D_{11} = E_x / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ である。

(a) 等方性板の振動数パラメータの収束性と精度比較

はじめに、本手法の解析精度を示すために、比較的研究結果が多数報告されている等方性厚板 ($\nu = 0.3$) の解析結果について示す。

表-2 は、周辺固定 (CC-CC) された等方性正方形板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える要素分割数 $M_x = M_y$ と板厚比 h/a の影響が示してある。ここで、要素分割数は、4 から 24 まで、板厚比 h/a は、0.01 から 0.5 まで変化させている。

これより、本手法を用いれば、板厚比 h/a に関わらず要素分割数を増大させると、低次から高次までの振動数パラメータ n^* は、一定値への安定した収束状態を示している。

表-3 には、周辺自由 (FF-FF), 周辺単純支持 (SS-SS) および周辺固定 (CC-CC) された等方性正方形板の振動数パラメータ n^{***} の精度比較が示してある。ここで、板厚比は 0.1 と 0.5 に仮定し、振動数パラメータは、 $n^{***} = \omega a \sqrt{\rho/E}$ で定義している。また、比較のために Dawe ら²⁰⁾ の厳密解、水澤ら¹¹⁾による Mindlin 板理論に基づく spline 要素法 (SEM) を用いた数値解、水澤ら¹⁰⁾, Lim ら¹⁴⁾による 3 次せん断変形理論に基づく数値解と 3 次元弾性論に基づく Srinivas ら¹⁶⁾の厳密解および Liew ら¹⁷⁾による数値解も示してある。ここで、Mindlin 板理論で仮定されるせん断修正係数 κ

は $\pi^2/12$ である。

これより、本手法で求めた解は、境界条件や板厚比 h/a の値に関わらず、水澤らや Lim らの 3 次せん断変形理論に基づく数値解と非常によく一致した結果を示している。また、3 次せん断変形理論に基づく数値解は、Mindlin 板理論に基づく数値解と比較して、やや大きめの値を示し、また板厚比が大きくなると 3 次元弾性論に基づく値と比較的近い結果を示している。

表-2 周辺固定された等方性正方形板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える要素分割数 $M_x=M_y$ と板厚比 h/a の影響 : $b/a=1.0, k=1, \nu=0.3$

h/a	Mx=My	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
0.01	4	35.95	74.41	74.41	107.0	163.0
	8	35.95	73.26	73.26	107.9	131.5
	12	35.94	73.24	73.24	107.9	131.2
	16	35.94	73.24	73.24	107.9	131.1
	20	35.94	73.24	73.24	107.9	131.1
0.2	4	26.92	47.17	47.18	62.05	73.93
	8	26.86	47.30	47.30	63.69	73.13
	12	26.82	47.18	47.18	63.56	72.82
	16	26.81	47.14	47.14	63.50	72.70
	20	26.80	47.12	47.12	63.47	72.66
0.5	4	26.80	47.11	47.11	63.46	72.64
	8	15.68	25.15	25.16	32.71	35.42
	12	15.66	25.07	25.07	32.98	36.27
	16	15.66	25.04	25.04	32.95	36.34
	20	15.66	25.03	25.03	32.94	36.35
24	15.66	25.03	25.03	32.93	36.36	

表-3 等方性板の振動数パラメータ n^{***} の精度比較 : $b/a=1.0, k=1, \nu=0.3, M_x=M_y=18$

h/a	B.C	Theory	Method	modes						
				1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	
0.1	FF-FF	Reddy	Present	0.38502	0.57328	0.70589	0.96635	0.96635	1.6755	
			Ritz method ¹⁴⁾	0.38501	0.57327	0.70586	0.96629	0.96629	1.6752	
			SEM ¹¹⁾	0.38487	0.57314	0.70573	0.96576	0.96576	1.6742	
	SS-SS	Reddy	Present	0.57671	1.3761	1.3761	2.1117	2.5734	2.5742	
			SSM ¹⁰⁾	0.57694	1.3765	1.3765	2.1125	2.5742	2.5742	
			Ritz method	0.57694	1.3765	1.3765	2.1125	2.5742	2.5742	
			Exact ⁶⁾	0.57738	1.3780	1.3780	2.1154	2.5787	2.5787	
			Mindlin	Exact ²⁰⁾	0.57680	1.3753	1.3753	2.1097	2.5700	2.5700
			Mindlin	SEM	0.57629	1.3747	1.3747	2.1083	2.5688	2.5700
			3D elasticity	Exact ¹⁶⁾	0.57769	1.3805	1.3805	2.1214	2.5870	2.5870
			3D elasticity	Ritz method ¹⁷⁾	0.57768	1.3805	1.3805	2.1214	2.5870	2.5870
			CC-CC	Reddy	Present	0.98648	1.8853	1.8853	2.6461	3.1212
Ritz method	0.98636	1.8848			1.8848	2.6457	3.1200	3.1485		
SEM	0.98316	1.8743			1.8743	2.6258	3.0929	3.1223		
3D elasticity	Ritz method	0.99203	1.8953	1.8953	2.6590	3.1354	3.1653			
0.5	FF-FF	Reddy	Present	1.3311	1.8883	2.2563	2.6708	2.6708	3.2537	
			Ritz method	1.3311	1.8881	2.2559	2.6705	2.6705	3.2534	
			SEM	1.3250	1.8817	2.2437	2.6486	2.6486	3.2270	
	SS-SS	Reddy	Present	1.8586	3.4459	3.4459	4.3577	4.3577	4.6166	
			SSM	1.8594	3.4465	3.4465	4.3589	4.3589	4.6176	
			Ritz method	1.8594	3.4465	3.4465	4.3566	4.3566	4.6176	
			Mindlin	SEM	1.8461	3.3930	3.3930	4.3555	4.3555	4.5079
			3D elasticity	Ritz method	1.8801	3.4813	3.4813	4.3567	4.3567	4.6413
			Reddy	Present	2.3696	3.7874	3.7874	4.9830	5.5017	5.5017
	CC-CC	Reddy	Ritz method	2.3696	3.7269	3.7269	4.9830	5.5020	5.5020	
			Mindlin	SEM	2.2387	3.5084	3.5084	4.5823	5.4845	5.4845
			3D elasticity	Ritz method	2.3141	3.6432	3.6432	4.4449	5.4574	5.4574

(b) アラゴナイト結晶板の振動数パラメータの収束性と精度比較の検討

表-4には、比較的異方性の小さな周辺単純支持(SS-SS)および周辺固定(CC-CC)されたアラゴナイト結晶板正方形板($b/a=1.0$)の振動数パラメータ n^{**} の収束性に与える要素分割数 $M_x = M_y$ と板厚比 h/a の影響が示してある。ここで、要素分割数は、4から24まで、板厚比 h/a は、0.01から0.5まで変化させている。

これより、等方性板の結果と同様、境界条件や板厚比に関わらず要素分割数を増大させれば、低次から高次の振動数パラメータ n^{**} の安定した収束状態が得られている。表-5には、周辺単純支持(SS-SS)および周辺固定(CC-CC)されたアラゴナイト結晶板正方形板の振動数パラメータ n^{**} の精度比較が示してある。ここで、板厚比 h/a は、0.01から0.5まで変化させている。表中の(m,n)のm,nはそれぞれ x, y 方向のモード次数である。また、比較のために、近藤ら¹²⁾のMindlin板理論に基づくspline要素法(SEM)を用いた数値解、Reddy⁶⁾の高次せん断変形理論に基づく厳密解(Exact)および3次元弾性論に基づくSrinivas¹⁸⁾の厳密解(Exact)、さらに名木野ら¹⁾の3次元spline帯板法(SLM)を用いた数値解とTeoら¹⁹⁾のDQ法(DQM)による数値解も示してある。ここで、Mindlin板理論で仮定されるせん断修正係数 κ は $\pi^2/12$ である。これより、周辺単純支持板では、本手法の解は、

Reddyらの厳密解と非常によく一致した結果を示しており、また、3次元弾性論とMindlin板理論による解ともよく一致した結果を示している。

周辺固定された場合では、本手法による結果は、板厚比に関わらず3次元弾性論に基づくTeoら²⁰⁾のDQ法による数値解よりもやや大きめの値を示しているが、弾性論に基づく数値解に近い結果が示されている。

表-4 周辺固定されたアラゴナイト結晶板正方形板の振動数パラメータ n^{**} の収束性に与える要素分割数 $M_x=M_y$ と板厚比 h/a の影響： $b/a=1.0, k=1=4$

h/a	Mx=My	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
0.01	4	0.00090	0.00168	0.00203	0.00268	0.00372
	8	0.00090	0.00166	0.00201	0.00271	0.00288
	12	0.00090	0.00166	0.00201	0.00271	0.00287
	16	0.00090	0.00166	0.00201	0.00271	0.00287
	20	0.00090	0.00166	0.00201	0.00271	0.00287
24	0.00090	0.00166	0.00201	0.00271	0.00287	
0.1	4	0.0793	0.1402	0.1555	0.2010	0.2379
	8	0.0791	0.1415	0.1557	0.2076	0.2330
	12	0.0790	0.1414	0.1554	0.2073	0.2325
	16	0.0790	0.1413	0.1552	0.2070	0.2323
	20	0.0790	0.1412	0.1551	0.2069	0.2320
24	0.0790	0.1412	0.1551	0.2069	0.2320	
0.5	4	0.8887	1.4034	1.4640	1.8551	2.0643
	8	0.8886	1.4072	1.4564	1.8806	2.0791
	12	0.8885	1.4065	1.4541	1.8789	2.0783
	16	0.8885	1.4065	1.4536	1.8784	2.0782
	20	0.8885	1.4064	1.4534	1.8783	2.0781
24	0.8885	1.4064	1.4534	1.8783	2.0781	

表-5 アラゴナイト結晶板の振動数パラメータ n^{**} の精度比較： $b/a=1.0, k=1=4, M_x=M_y=18$

B.C	h/a	Theory	Method	modes						
				1st	2nd	3rd	4th	5th		
SS-SS	0.01	Reddy	Present	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)		
				0.0004962	0.0011188	0.0013514	0.0019819	0.0021502		
				Mindlin	SEM ¹²⁾	0.000496	0.001119	0.001351	0.001982	0.002150
	3D elasticity	SLM ¹⁾	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(1,3,0)			
			0.0004964	0.0011190	0.0013517	0.0019827	0.0021503			
			Reddy	Present	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	
	0.1	Reddy	Exact ⁶⁾	0.04736	0.10313	0.11872	0.16914	0.18842		
				Mindlin	SEM	0.0473	0.1030	0.1185	0.1688	0.1882
				3D elasticity	SLM	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(1,3,0)
	0.3	Reddy	Present	(1,1)	(1,2)	(*)	(2,1)	(2,2)		
				0.33134	0.64748	*	0.65686	0.89722		
				Mindlin	SEM	0.3300	0.6436	*	0.6489	0.8852
CC-CC	0.01	Reddy	Present	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)		
				0.000905	0.001660	0.002009	0.002712	0.002866		
				Mindlin	SEM ¹²⁾	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)
	0.1	Reddy	Present	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)		
				0.07897	0.14116	0.15505	0.20686	0.23201		
				Mindlin	SEM	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)
	0.3	Reddy	Present	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)		
				0.45041	0.73941	0.76309	0.99427	1.0999		
				Mindlin	SEM	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
	3D elasticity	DQM ¹⁹⁾	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)			
			0.0785	0.1403	0.1532	0.2045	0.2303			
			0.44253	0.71315	0.74996	0.96568	1.0223			

(c) シトカスプルス柁目板の振動数パラメータの収束性と精度比較の検討

ここでは、シトカスプルス柁目板の振動解析を行い、解の収束性と精度比較について検討する。この木板の E_t (繊維方向の弾性係数) は、他の弾性係数と比較して非常に大きく、また G_{RT} (接線方向と放射方向の断面のせん断弾性係数) が他の断面のせん断弾性係数と比較して非常に小さな値を示す。

表-6 には、周辺単純支持 (SS-SS) および周辺固定 (CC-CC) されたシトカスプルス柁目正方形板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える要素分割数と板厚比 h/a の影響が示してある。ここで、要素分割数は、4 から 24 まで変化させ、板厚比 h/a は、それぞれ 0.01, 0.1, 0.2 としている。

これより、本手法で求めた解は、板厚比に関わらず要素分割数を増大させれば、低次から高次の振動数パラメータ n^* の一様な収束状態を示している。

表-7 には、周辺固定 (CC-CC) されたシトカスプルス柁目正方形板の振動数パラメータ n^* の精度比較が示してある。ここで、板厚比 h/a は、0.01 から 0.2 まで変化させている。表中の(m,n)の m,n はそれぞれ x, y 方向のモード次数である。また、比較のために近藤ら¹²⁾の Mindlin 板理論 (MPT) に基づく spline 要素法を用いた数値解、水澤ら¹⁰⁾の高次せん断変形理論に基づく spline 帯板法による結果 (RSSM) と名木野ら¹¹⁾の 3 次元弾性論に基づく 3 次元 spline 帯板法 (SLM) を用いた数値解も示してある。ここで、Mindlin 板理論で用いるせん断修正係数 κ は、 $\pi^2/12$ である。

これより、本手法による値は、板厚比が 0.05 以内であれば、水澤らの高次せん断変形理論に基づく数値解および 3 次元弾性論による解とよく一致している。

しかしながら、板厚比が 0.1 を越えると、固有値および固有モードが 3 次元弾性論や Mindlin 板理論による結果と合わなくなってくる。この原因としては、せん断変形の影響を比較的高次のひずみ成分で考慮するために、数値計算にともなう桁落ちが生じていると考えられる。しかしながら、(a), (b) で示したように非常によい解析精度が得られているため、3 次せん断変形理論を直交異方性厚板の振動解析に適用する場合には、板厚比と異方性パラメータにより、適用範囲を設ける必要があると思われる。

3.2 3 次せん断変形理論の適用範囲

ここでは、名木野ら¹¹⁾の 3 次元弾性論に基づく数値解を基準値にとり、3 次せん断変形理論の適用範囲について、詳細に考察する。比較の対象とした板は、等方性板、アラゴナイトクリスタル板とシトカスプルス柁目板である。表-8 には、計算に用いた異方性材の異方性パラメータが示してある。これよりシトカスプルス柁目板は面内および面外に大きな異方性を有しており、またアラゴナイトクリスタルの異方性は比較的小さい。なお、数値計算例に用いた要素分割数は、 18×18 としている。

表-6 周辺固定されたシトカスプルス柁目板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える要素分割数 $M_x=M_y$ と板厚比 h/a の影響 : $b/a=1.0, k=1=4$

B.C	h/a	Mx=My	modes				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
0.01	0.01	4	80.75	103.7	195.1	205.3	206.2
		8	80.63	105.6	155.3	194.8	213.9
		12	80.57	105.5	154.7	194.4	213.6
		16	80.54	105.5	154.6	194.3	213.4
		20	80.52	105.5	154.6	194.2	213.3
	24	80.51	105.4	154.6	194.1	213.2	
	0.1	4	32.05	53.67	63.33	78.33	83.52
		8	32.12	54.21	63.55	81.08	82.71
		12	32.13	54.21	63.54	81.08	82.70
		16	32.13	54.21	63.52	81.07	82.70
20		32.13	54.21	63.51	81.06	82.70	
24	32.13	54.21	63.51	81.06	82.70		
0.2	0.1	4	25.21	39.30	51.58	60.35	63.99
		8	25.28	39.94	51.73	62.36	62.69
		12	25.27	39.93	51.64	62.33	62.63
		16	25.27	39.93	51.60	62.33	62.60
		20	25.27	39.93	51.58	62.32	62.58
	24	25.27	39.92	51.57	62.32	62.57	

表-7 シトカスプルス柁目板の振動数パラメータ n^* の精度比較 : $b/a=1.0, k=1=4, M_x=M_y=18$

B.C	h/a	Method	modes				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
0.01	0.01	Present	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
		RSSM ¹⁰⁾	41.05	65.35	111.5	138.0	156.9
		SLM ¹¹⁾	(1,1,0)	(2,1,0)	(3,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)
		MPT ¹²⁾	41.05	65.37	111.5	138.0	156.9
		CPT	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
		Present	41.04	65.34	111.4	137.9	156.7
		CPT	41.73	66.23	112.7	147.2	166.9
		Present	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
		RSSM	31.40	54.38	72.41	89.96	97.96
		SLM	(1,1,0)	(2,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)	(3,1,0)
0.05	0.05	RSSM	31.41	54.40	72.42	90.00	97.98
SLM		(1,1,0)	(2,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)	(3,1,0)	
MPT		31.42	54.44	72.18	89.80	98.12	
Present		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	
MPT		31.22	54.17	70.98	88.54	97.73	
Present		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	
RSSM		22.49	44.68	45.70	64.69	71.06	
SLM		(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(1,3,0)	
MPT		22.45	43.36	45.77	63.76	65.06	
Present		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	
0.1	0.1	MPT	22.12	41.93	45.37	62.14	62.43
Present		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	
RSSM		16.17	30.39	38.09	49.90	50.41	
SLM		(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(1,3,0)	(2,2,0)	
MPT		16.19	30.42	38.10	49.95	50.44	
Present		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	
RSSM		15.94	27.12	38.17	38.53	47.99	
SLM		(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(1,3,0)	(2,2,0)	
MPT		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)	
Present		15.60	26.07	36.68	37.67	46.79	
0.01	0.01	Present	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
		RSSM	80.51	105.4	154.6	194.1	213.2
		SLM	(1,1,0)	(2,1,0)	(3,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)
		MPT	80.28	105.2	154.3	192.8	211.8
		Present	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
		RSSM	44.47	74.26	82.40	106.7	126.0
		SLM	(1,1,0)	(2,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)	(1,3,0)
		MPT	42.46	72.74	75.97	101.2	114.4
		Present	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)
		0.1	0.1	RSSM	32.13	54.20	63.50
SLM	(1,1,0)	(1,2,0)		(2,1,0)	(1,3,0)	(2,2,0)	
MPT	29.91	46.48		62.08	65.47	75.39	
Present	(1,1)	(1,2)		(2,1)	(2,2)	(1,3)	
RSSM	25.27	39.92		51.56	62.32	62.56	
SLM	(1,1,0)	(1,2,0)		(1,3,0)	(2,1,0)	(1,4,0)	
MPT	23.07	30.69		39.68	48.81	49.97	

また、振動数パラメータの相対誤差は、次式で定義している。

$$(n_{Reddy}^* - n_{3D}^*) / n_{3D}^* \times 100 [\%]$$

$$(n_{Mindlin}^* - n_{3D}^*) / n_{3D}^* \times 100 [\%]$$

ここで、 n_{Reddy}^* 、 $n_{Mindlin}^*$ および n_{3D}^* は、それぞれ、Reddy の 3 次せん断変形理論、Mindlin 板理論¹²⁾ および 3 次元弾性論¹⁾ により求めた振動数パラメータである。

(a) 直交異方性厚板の振動数パラメータの相対誤差に与える板厚比と材種の影響

まず、板厚比 h/a の適用限界について検討するため、境界条件を周辺単純支持 (SS-SS) に仮定し、振動数パラメータの相対誤差を示す。

図-2 には、周辺単純支持された正方形板の振動数パラメータの相対誤差に与える板厚比と材種の影響が示してある。平板の材種は、等方性材 ($\nu = 0.3$) と表-1 に示すような物性値を持つアラゴナイトクリスタル材とシトカスブルース材である。また、板厚比 h/a は 0.01 から 0.3 まで変化させ、基本振動数と 5 次の振動数に対して検討している。ここで、面外と面内のせん断弾性係数比 G_{xz}/G_{xy} と面外のせん断弾性係数比 G_{zx}/G_{yz} は、それぞれ、等方性板では、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz} = 1.0$ 、アラゴナイトクリスタル板では、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz} = 0.6$ 、シトカスブルース材では、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz} = 0.05$ になる。

これより、基本振動数パラメータの相対誤差に与える板厚比と材種の影響は、等方性板とアラゴナイトクリスタル板では小さく、いずれも 1.0% 以内である。しかしながら、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz}$ の値が小さいシトカスブルース材では、板厚比 h/a が 0.05 以内であれば、相対誤差は小さいが、0.2 を越えると急に相対誤差が増大している。また、5 次の振動数パラメータの相対誤差は、板厚比 h/a の増大にとまらぬ、相対誤差の値が大きく変動する。これらの原因は、ひずみに高次の微係数を含むため、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz}$ の値が極端に小さな値を有する材料に対しては、桁落ち誤差が生じているためと考えられる。

得られた結果をまとめれば、以下の通りである。

- (1) 板厚比 h/a が、0.05 以下であれば、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz}$ の値に関係なく相対誤差は、3.0%以内である。
- (2) 板厚比 h/a が、0.1 以下になると、シトカスブルース材のように $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz}$ の値が極端に小さい材料では、相対誤差が大きく現れてくる。この原因は、高次のひずみ項による桁落ち誤差と考えられる。

表-8 各材料の異方性パラメータ^{6),15)}

材種名	異方性パラメータ			
	E_y/E_x	G_{xz}/E_x	G_{yz}/E_x	G_{xy}/E_x
アラゴナイトクリスタル ⁶⁾	0.523	0.178	0.297	0.293
シトカスブルース材 ¹⁵⁾	12.89	0.033	0.800	0.844

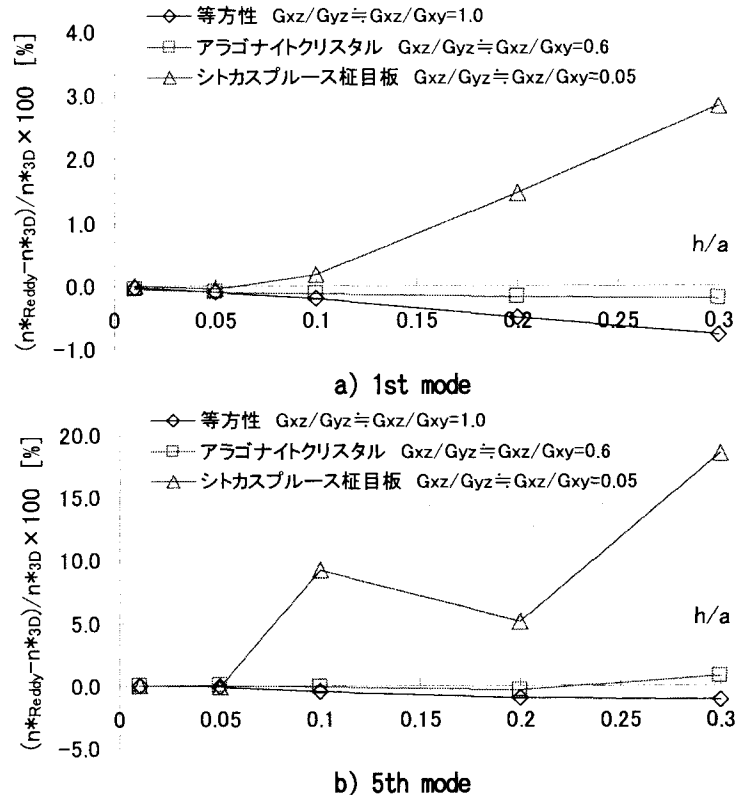


図-2 周辺単純支持された正方形板の振動数パラメータの相対誤差に与える板厚比と材種の影響：
 $b/a=1.0, k=1=4$

- (3) (1) と (2) より、Reddy の 3 次せん断変形理論を用いた直交異方性板の振動解析の相対誤差は、板厚比 h/a と $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz}$ の値に大きく依存すると考えられる。

(b) 直交異方性厚板の振動特性に与えるせん断弾性係数比の影響

弾性係数比 E_x/E_y が 10~40 になる繊維強化型積層板の振動解析⁶⁾ では、先に述べたような問題が生じていない。これは、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz}$ の値が、通常のグラフィット/エポキシ材やガラス繊維積層板では 0.8~1.2 程度の値になるので、3 次せん断変形理論の適用範囲内に入っているからと考えられる。

しかしながら、自然材料である木材では、 $G_{zx}/G_{xy} = G_{xz}/G_{yz}$ の値が 0.05 という極端に小さくなる。

これらの問題点を検討した研究報告が見られないので、以下に、3 次せん断変形理論の適用範囲に与える

$G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz}$ と板厚比 h/a の影響について検討を行う。

図-3には、周辺単純支持された直交異方性正方形板の振動数パラメータの相対誤差に与えるせん断弾性係数比 $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz}$ の影響が示してある。材種は、アラゴナイトクリスタルとシトカスプルス材である。ここで、板厚比 h/a は 0.01 と 0.2 に仮定し、せん断弾性係数比 $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz}$ は、0.05 から 10 まで変化させている。ただし、実際の物性値は、アラゴナイトクリスタルでは $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz} = 0.6$ 、シトカスプルス材では $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz} = 0.05$ である。また、対象とした振動モードは、基本振動モード (1,1) と (1,2) を採用した。

まず、基本振動モード (1,1) の相対誤差は、 $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz}$ の値に無関係に 1.4% 以内になる。この誤差は、理論誤差を考慮すれば、適用範囲内であると思われる。一方、板厚比が 0.2 の場合、せん断弾性係数比 $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz}$ の値が非常に小さくなると、(1,2) モードの相対誤差が大きく生じてくる。また、シトカスプルス材のせん断弾性係数比が $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz} = 0.4$ よりも小さくなると、相対誤差が 5% 程度になり、またシトカスプルス材の物性値 ($G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz} = 0.05$) を用いた場合には、相対誤差が 12% にも達する。この原因は、先に示したような数値計算にともなう桁落ち誤差によるものと考えられる。

図-4には、周辺単純支持されたシトカスプルス材正方形板の振動数パラメータの相対誤差に与える弾性係数比 E_y/E_x の変動の影響が示してある。ここで、板厚比 h/a は 0.2 に仮定し、弾性係数比 E_y/E_x は、0.5 から 40 まで変化させている。また、比較のために近藤ら¹²⁾の Mindlin 板理論に基づく spline 要素法による解の相対誤差も示してある。採用した振動モードは、先と同様、(1,1) と (1,2) である。

これより、3 次せん断変形理論の相対誤差の値は、実材料の物性値 ($G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz} = 0.05$) であっても、弾性係数比 E_y/E_x が小さくなるにつれて、小さくなっている。また、(1,2) モードでは、弾性係数比 E_y/E_x が大きくなるにつれて非常に

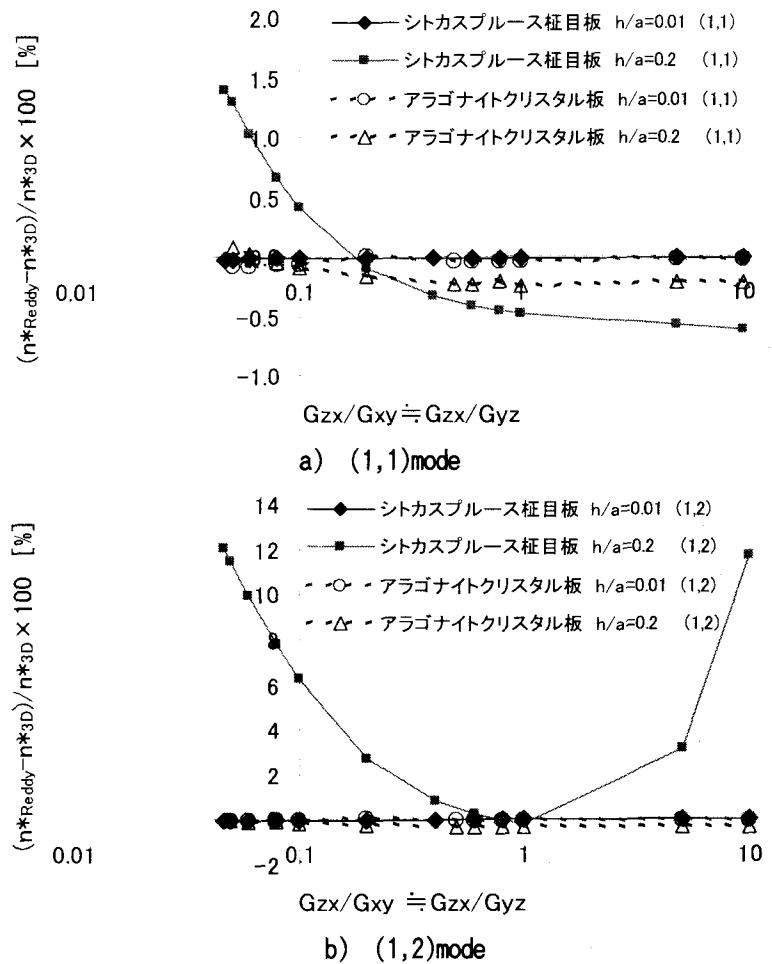


図-3 周辺単純支持された直交異方性正方形板の振動数パラメータの相対誤差に与えるせん断弾性係数比 $G_{zx}/G_{xy} \cong G_{zx}/G_{yz}$ の影響: $b/a=1.0, k-1=4$

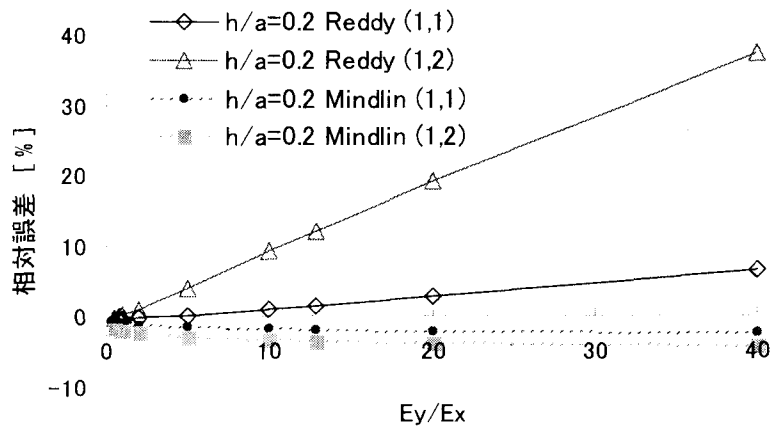


図-4 周辺単純支持されたシトカスプルス材正方形板の振動数パラメータの相対誤差に与える弾性係数比 E_y/E_x の変動の影響: $b/a=1.0, k-1=4$

大きな相対誤差が示されている。よって、 G_{zx}/G_{xy} の小さな異方性板では、ヤング係数比 E_y/E_x とせん断弾性係数比で適用範囲を設ける必要がある。

しかしながら、3 次せん断変形理論の相対誤差の値と

比較して Mindlin 板理論の相対誤差の値は、非常に小さく現れている。

以上の結果をまとめれば、以下の通りである。

- (1) 3次せん断変形理論を用いた直交異方性厚板の振動解析の適用範囲は、ヤング係数比 $E_y/E_x \leq 12.0$ であれば、板厚比 $h/a < 0.2$ かつ、 $0.6 \leq G_{zx}/G_{xy} \equiv G_{zx}/G_{yz} \leq 5.0$ であると考えられる。
- (2) ヤング係数比 $E_y/E_x > 12.0$ であれば、(1) で示した、板厚比やせん断弾性係数比の値の適用範囲も狭まる。逆に、ヤング係数比 E_y/E_x の値が小さくなれば、せん断弾性係数比の値が十分小さくても数値誤差は生じない。
- (3) 板厚比 $h/a \leq 0.05$ であれば、異方性の大きさを考慮せずに適用できる。

4. あとがき

本文では、3次せん断変形理論と直交異方性理論に基づく spline 要素法を用いて、任意の境界条件を有する直交異方性厚板の振動解析を行い、解の収束性や精度比較について検討を行った。また、直交異方性板の振動特性に与える板厚比、せん断弾性係数比とヤング係数比の変動の影響についても検討を行い、3次せん断変形理論の適用範囲についても明らかにしている。

本研究で得られた主な結果をまとめると、以下のとおりである。

- 1) 本手法を用いれば、直交異方性厚板の低次から高次までの振動数パラメータの安定した収束性が得られる。
- 2) 本手法により求めた等方性板とアラゴナイトクリスタル板の振動数パラメータは、他の厳密解や数値解と比較してよく一致している。
- 3) 異方性の大きなシトカスプルーズ柁目板の振動数パラメータは、板厚比が大きくなると大きな誤差を示す。これは、せん断変形に関する高次のひずみ項における数値誤差であると思われる。
- 4) 本手法による解は、Mindlin 板理論に基づく数値解と比較してやや大きめな値を示し、板厚比が大きくなると3次元弾性論に基づく数値解よりやや大きめな値を示している。
- 5) Reddy の3次せん断変形理論の適用限界は、板厚比と異方性パラメータに依存しており、ヤング係数比 $E_y/E_x = 12.0$ 程度であれば、板厚比 $h/a < 0.2$ かつ $0.6 \leq G_{zx}/G_{xy} \equiv G_{zx}/G_{yz} \leq 5.0$ の範囲であると思われる。ただし、板厚比 $h/a \leq 0.05$ であれば、異方性の大きさに依存せず適用できる。
- 6) Reddy の高次せん断変形理論を用いて異方性の大きな板を取り扱う際には、板厚比と異方性パラメータに留意し、その適用範囲に注意する必要がある。

参考文献

- 1) 名木野晴暢, 水澤富作: 3次元 spline 帯板法を用いた粘弾性直交異方性厚板の振動解析と損失正接について. 応用力学論文集. Vol. 6, pp. 321-330, 2003.
- 2) E.Reissner: On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation. Int. J. Solids and Structures, Vol. 11, pp. 569-573, 1975.
- 3) R.D.Mindlin: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J. Appl. Mech, Vol. 73, pp. 31-38, 1951.
- 4) M.Levinson: An accurate simple theory of the static and dynamics of elastic plates. Mech. Res. Commun., Vol. 7, pp. 343-350, 1980.
- 5) J.N.Reddy: A simple high-order theory for laminated composite plates. J. Appl. Mech, Vol. 45, pp. 745-752, 1984.
- 6) J. N. Reddy and N. D. Phan: Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a high-order shear deformation theory, Journal of Sound and Vibration, pp. 157-170, 1985.
- 7) K. H. Lo, R. M. Christensen, E. M. Wu: A higher-order theory of plate deformation-part I - Homogeneous plate. J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663-668, 1977.
- 8) T.Kant and B.S.Manjunatha: An unsymmetric FRC laminate C^0 finite element model with 12 degree freedom per node. Engng. Comput., Vol. 5, pp. 300-308, 1988.
- 9) 平島健一, 岸根嘉和: 応力および変位仮定に基づく平板の一般化高次理論の定式化. 土木学会論文集, 第350号/I-2, pp. 351-354, 1984.
- 10) 水澤富作, 鬼頭博史: 高次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いた積層複合板の振動解析について. 構造工学論文集, Vol. 40A, pp. 71-83, 1994.
- 11) 水澤富作, 近藤八重, 木村健一, 名木野晴暢: 平板の振動モードの縮退と連成挙動について. 応用力学論文集. Vol. 6, pp. 311-320, 2003.
- 12) 近藤八重, 水澤富作: Spline 要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析. 応用力学論文集, Vol. 4, pp. 183-194, 2001.
- 13) R.D.Mindlin, A.Schacknow, H.Deresiewicz: Flexural vibration of rectangular plates. ASEM Journal Applied Mechanics, 23, pp. 430-436, 1956.
- 14) C. W. Lim, K. M. Liew, S. Kitipornchai: Numerical aspects for free vibration of thick plates. Comput. Methods Appl. Engrg. 156, pp. 15-29, 1998.
- 15) 中戸莞二, 左道健: 新編木材工学. 養賢堂, 1995.
- 16) S. Srinivas, C. V. J. Rao and A. K. Rao: An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. Journal of Sound and Vibration, Vol. 12 (2), pp. 187-199, 1970.

- 17) K. M. Liew, K. C. Hung and M. K. Lim: A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates. *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 30(24), pp.3357-3379, 1993.
- 18) S. Srinivas and A. K. Rao: Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 6, pp. 1463-1481, 1970.
- 19) T. M. Teo, K. M. Liew : Three-dimensional elasticity solutions to some orthotropic plate problems, *Int. J. Solids Struct.* 36, pp. 5301-5326, 1999.
- 20) D.J.Dawe, R.W.Horsington, A.G.Kamtekar and G.H.Little: Aspect of the analysis plate structures. Clarendon Press, Oxford, 1985.

(2004年4月16日 受付)