

Spline 選点最小二乗法を用いた厚板の振動解析

Vibrational analysis of thick plates using spline collocation least square method

水澤富作*, 後藤大輔**

Tomisaku MIZUSAWA and Daisuke GOTO

*大同工業大学工学部 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学大学院 院生 建設工学専攻 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents vibration analysis of thick plates on the basis of the Mindlin plate theory and the theory of elasticity by using the spline collocation least square method which is an alternative free mesh method. No numerical integration is required in the formulation and the resulting matrix has the advantage of always being symmetrical. To demonstrate an accuracy and convergence of the present numerical method, some numerical examples are solved and the results are compared with those obtained by analytical method and other numerical methods. It is seen that good accuracy and stable convergence are obtained.

Key Words: spline collocation least square method, vibration, Mindlin plate, elasticity, rectangular plate

1. まえがき

長方形厚板の振動問題は, Mindlin 板理論¹⁾や3次元弾性論²⁾などにに基づき導かれる連立偏微分方程式を与えられた境界条件のもとで, 古くから解析的³⁾または数値解析的に解かれており, また多くの研究成果が報告されている^{4) 5)}.

厚板の振動解析法には, 系の支配方程式と等価な汎関数を極値化する Ritz 法^{6)-9), 11), 19)}や半解析的な有限要素法¹²⁾⁻²⁰⁾が用いられている. また, Galerkin 法などの重みつき残差法も古くから用いられている. これらの方法では, 変位場や応力場で仮定される試験関数(補間関数)の選定が, 解析上重要な問題になる. 一方, 偏微分方程式を直接数値的に解く解法として, 数値積分公式を必要としない差分法²¹⁾や選点法などが適用されてきている.

三上ら²²⁾は, 選点法を用いて, 相対する2辺が単純支持された変厚長方形 Mindlin 板の振動解析を行っている.

最近, 偏微分方程式を数値的に解く解法として, Differential Quadrature 法(DQ法)が Mindlin 板²³⁾や弾性体²⁴⁾⁻²⁶⁾の振動解析に適用されている¹⁰⁾. DQ法は, 関数の微分係数(導関数)を領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として表し, 支配方程式と境界条件式を線形代数方程式に置き換えて解く数値解析法であり, 差分法と選点法を一般化した数値解析法でもある. 数値積分公式を必要としない選点法やDQ法では,

場の関数や重み係数行列の計算に必要な補間多項式に Lagrange 多項式などの全体関数を用いるので, 得られる係数行列が密行列になり, また非対称行列になるので, 離散点の数が增大すると, 解の不安定が見られるので, より数値安定性の高い数値解析法の開発が望まれている.

水澤ら²⁷⁾は, 選点法で定式化される係数行列の非対称性を対称化するために, 選点法と最小二乗法を組み合わせた選点最小二乗法を用いて, 厚板の曲げ解析を行っている. ここでは, 高階の導関数を含む支配方程式を解くために, 高次の連続性と局所基底を有する B-spline 関数を変位関数に適用している. しかしながら, 選点最小二乗法を用いた厚板の振動解析に関する報告が見られず, また活発に研究されているメッシュレス法²⁸⁾の一つの手法でもあるので, spline 選点最小二乗法の有用性について

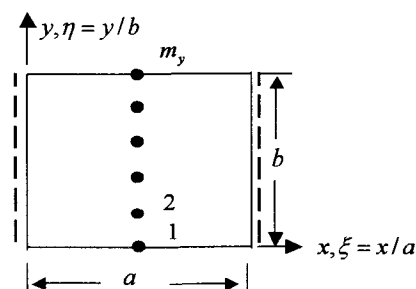


図-1 長方形 Mindlin 板

て検討する価値があるものと思われる。

本論文では、高次の連続性と局所基底を有する B-spline 関数を変位関数に仮定した選点最小二乗法を用いて、2階の3元連立偏微分方程式で表される Mindlin 板と弾性直方体の振動解析を行う。

Mindlin 板の定式化では、図-1に示すような y 軸に平行な相対する2辺が単純支持された場合を仮定して、また単級数法を用いて、3元連立常微分方程式に変換している。また、周面をダイヤフラム型の単純支持を仮定した弾性厚板は、二重級数法を適用して、3元連立常微分方程式に変換している。

本手法の収束性や解析精度について検討を行い、解に与える離散点の数や重み係数 we の影響について明らかにしている。

2. 選点最小二乗法による定式化

ここでは、3元連立偏微分方程式で与えられる長方形 Mindlin 板¹⁾と3次元弾性論²⁾に基づく厚板の振動方程式を数値的に解くために、固有関数の直交性と重みつき残差法を適用した半解析的な spline 選点最小二乗法の定式化について示す。

2.1 spline 選点最小二乗法

ここでは、B-spline 関数を基底関数に仮定した選点最小二乗法の定式化を示す。

3元連立の線形境界値問題を記述する支配方程式と境界条件は、微分演算子 L, B を用いて、それぞれ次式で表される。

$$L(w, \varphi_x, \varphi_y) = q(y) \quad \text{領域}[0 \leq y \leq b] \quad (1)$$

$$B(w, \varphi_x, \varphi_y) = g(y) \quad \text{境界}[y=0, y=b] \quad (2)$$

ここで、 w, φ_x, φ_y は、それぞれ独立した変位関数であり、

また $q(y), g(y)$ は、与えられた関数である。したがって、

領域残差 R_L と境界残差 R_B は、それぞれ次式で表される。

$$R_L = L(w, \varphi_x, \varphi_y) - q(y) \quad (3)$$

$$R_B = B(w, \varphi_x, \varphi_y) - g(y) \quad (4)$$

これらの残差を領域内の選点 (m_y 個) と各境界点に導入される境界条件の総数 (M 個) について求めると、次式で示される。

$$R_L(y_i) = L(w_i, \varphi_{x_i}, \varphi_{y_i}) - q(y_i) : i = 1, 2, \dots, 3m_y \quad (5)$$

$$we R_B(y_{3m_y+j}) = we \{B(w_{3m_y+j}, \varphi_{x_{3m_y+j}}, \varphi_{y_{3m_y+j}}) - g(y_{3m_y+j})\};$$

$$j = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

ここで、 we は、領域残差に対する境界残差の重み係数である²⁷⁾。

独立した3つの変位関数 w, φ_x, φ_y は、B-spline 関数を用いて、それぞれ次式で仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(y), \quad \varphi_x = \sum_{m=1}^N D_m N_{m,k}(y)$$

$$\varphi_y = \sum_{m=1}^N E_m N_{m,k}(y) ; N = m_y + k - 2 \quad (7)$$

ここで、 $N_{m,k}(y)$ は、正規化された B-spline 関数であ

り、 m_y と $k-1$ は、それぞれ区分点の数と spline 次数である。また、 C_m, D_m, E_m は、それぞれ未定係数である。

したがって、式 (7) を式 (5), (6) に代入して、これをマトリックス表示すると、次式が得られる。

$$\{R\} = \{R_L\} + we \{R_B\} = [Z]\{C\} - \{P\} \quad (8)$$

ここで、係数マトリックス $[Z]$ の大きさは、

$(3m_y + M) \times 3N$ になり、また $3N \leq (3m_y + M)$ になるの

で、 $[Z]$ は長方形マトリックスになる場合もある。

また、

$$\{C\}^T = \{C_1, C_2, \dots, C_N, D_1, D_2, \dots, D_N, E_1, E_2, \dots, E_N\}$$

である。

式 (8) で与えられる残差の二乗誤差 I_d は、最小二乗法を適用すると、次式で与えられる。

$$I_d = \sum_{i=1}^{3m_y} [R_L(C_m, D_m, E_m, y_i)]^2$$

$$+ we^2 \sum_{i=3m_y+1}^{3m_y+M} [R_B(C_m, D_m, E_m, y_i)]^2 = \{R\}^T \{R\} \quad (9)$$

したがって、式 (9) を極値化すれば、次式の代数方程式が導ける。

$$\frac{\partial I_d}{\partial \{C\}} = [Z]^T [Z] \{C\} - [Z]^T \{P\}$$

$$= [K] \{C\} - \{F\} = 0 \quad (10)$$

ここで、 $[K] = [Z]^T [Z]$ は、対称マトリックスであり、その大きさは、 $3N \times 3N$ になる。

2.2 長方形 Mindlin 板の支配方程式

面外せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板の自由振動問題では¹⁾, 任意の点 (x, y, z) の変位は, それぞれ独立した 3 つの変位関数を用いて, 次式で仮定される。

$$\begin{aligned} u &= z\psi_x(x, y)e^{i\alpha x} \\ v &= z\psi_y(x, y)e^{i\alpha x} \\ w &= w(x, y)e^{i\alpha x} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, ψ_x, ψ_y, w は, それぞれ独立した x, y, z 方向の変位関数である。また, ω は円振動数である。

したがって, 図-1 に示すように, 等方性である長方形 Mindlin 板の自由振動方程式は, 次式のように 2 階の 3 元連立偏微分方程式で表される¹⁾。

$$\frac{(1-\nu)D}{2} \nabla^2 \psi_x + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \kappa Gh \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\rho h^3 \omega^2}{12} \right) \psi_x \quad (12a)$$

$$\frac{(1-\nu)D}{2} \nabla^2 \psi_y + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \kappa Gh \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\rho h^3 \omega^2}{12} \right) \psi_y \quad (12b)$$

$$\kappa Gh \left(\nabla^2 w + \frac{\phi}{D} \right) = -\rho h \omega^2 w \quad (12c)$$

ここで,

$$\phi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \nabla^2 \bullet = \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bullet}{\partial y^2} \quad (13)$$

である。また, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, ω は円振動数, E, G はそれぞれヤング係数とせん断弾性係数であり, ρ は密度, h は板厚, ν はポアソン比, κ はせん断弾性係数である。

また, 曲げモーメントとせん断力は, それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M_x &= D(\partial \psi_x / \partial x + \nu \partial \psi_y / \partial y) \\ M_y &= D(\partial \psi_y / \partial y + \nu \partial \psi_x / \partial x) \\ M_{xy} &= D(\partial \psi_x / \partial y + \partial \psi_y / \partial x) \\ Q_y &= \kappa Gh(\psi_y + \partial w / \partial y) \\ Q_x &= \kappa Gh(\psi_x + \partial w / \partial x) \end{aligned} \quad (14)$$

次に, 次式の無次元直交座標系を用いる。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, w' = w/h \quad (15)$$

ここで, w はたわみであり, a, b は長さと同幅である。

式 (15) を用いて, 式 (12a) - (12c) を無次元座標系で表すと,

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \eta^2} \right] + \frac{(1+\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} + (a/b) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi \partial \eta} \right] \\ &- 6\kappa(1-\nu) \left[(b/h)^2 (a/b)^2 \psi_x + (b/h)(a/b) \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right] \\ &= -(\rho h/12D) \omega^2 a^4 (h/a)^2 \psi_x \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \eta^2} \right] + \frac{(1+\nu)}{2} \left[(a/b) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \eta} + (a/b) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \eta^2} \right] \\ &- 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 \left[\psi_y + (h/b) \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right] \\ &= -(\rho h/12D) \omega^2 a^4 (h/a)^2 \psi_y \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(\kappa Gh)}{D} \left[(h/a)^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \xi^2} + (h/b)^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \eta^2} + (h/a) \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + (h/b) \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \right] \\ &= -(\rho h^2/D) \omega^2 w' \end{aligned} \quad (16c)$$

ここで, y 軸に平行な 2 辺が単純支持された長方形 Mindlin 板では, Levy 法を適用すると, 変位関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} \psi_x &= \sum \sum A_{mn} N_{n,k}(\eta) \cos m\pi\xi \\ &= \sum [N]\{A\} \cos m\pi\xi \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \psi_y &= \sum \sum B_{mn} N_{n,k}(\eta) \sin m\pi\xi \\ &= \sum [N]\{B\} \sin m\pi\xi \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} w' &= \sum \sum C_{mn} N_{n,k}(\eta) \sin m\pi\xi \\ &= \sum [N]\{C\} \sin m\pi\xi \end{aligned} \quad (17c)$$

ここで, $[N] = [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_y,k}(\eta)]$,

$$\{A\}^T = \{A_1, A_2, \dots, A_{i_y}\}, \{B\}^T = \{B_1, B_2, \dots, B_{i_y}\},$$

$$\{C\}^T = \{C_1, C_2, \dots, C_{i_y}\}, i_y = m_y + k - 2$$

であり, m_y は y 軸方向に配置される離散点の数である。また, m は, x 方向に展開される固有関数の級数項である。

式(17a) - (17c)を, 式(16a) - (16c)に代入すると, 次に示す 3 元連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)}{2} \left[-(m\pi)^2 [N]\{A\} + (a/b)^2 [N']\{A\} \right] \\ &+ \frac{(1+\nu)}{2} \left[-(m\pi)^2 [N]\{A\} + (a/b)(m\pi)[N']\{B\} \right] \\ &- 6\kappa(1-\nu) \left[(b/h)^2 (a/b)^2 [N]\{A\} + (b/h)(a/b)(m\pi)[N]\{C\} \right] \\ &= -(\rho h/12D) \omega^2 a^4 (h/a)^2 [N]\{A\} \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)}{2} \left[-(m\pi)^2 [N]\{B\} + (a/b)^2 [N'']\{B\} \right] \\ &+ \frac{(1+\nu)}{2} \left[(a/b)(-m\pi)[N']\{A\} + (a/b)[N'']\{B\} \right] \\ &- 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 \left[[N]\{B\} + (h/b)[N']\{C\} \right] \\ &= -(\rho h/12D) \omega^2 a^4 (h/a)^2 [N]\{B\} \end{aligned} \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} &6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 \left[\{(m\pi)^2 [N]\{C\} - (a/b)^2 [N']\{C\}\} \right. \\ &\left. + (a/h)\{(m\pi)[N]\{A\} - (a/b)[N]\{B\}\} \right] \\ &= (\rho h/D) \omega^2 a^4 [N]\{C\} \end{aligned} \quad (18c)$$

ここで,

$$[N'] = \partial[N] / \partial \eta, [N''] = \partial^2[N] / \partial \eta^2 \quad (19)$$

である.

先に述べたように, y 軸に平行な 2 辺は単純支持を仮定しているが, x 軸に平行な他の 2 辺の境界条件は, 以下に示すように独立した 3 つの条件式で定義される.

$\eta = 0$ の辺での境界条件式は, 以下のようになる.

1) 固定辺 (C) : $\eta = 0$

$$w' = 0, \psi_x = 0, \psi_y = 0 \quad (20a)$$

2) 単純支持辺 (S or SS) : $\eta = 0$

Mindlin 板理論では, 単純支持モデルとして, ハードタイプ (S) とソフトタイプ (SS) の 2 種類が定義される.

i) ハードタイプ

$$w' = 0, \psi_x = 0, M_y = 0 \quad (20b)$$

ii) ソフトタイプ

$$w' = 0, M_y = 0, M_{xy} = 0 \quad (20c)$$

3) 自由辺 (F) : $\eta = 0$

$$M_y = 0, M_{xy} = 0, Q_y = 0 \quad (20d)$$

したがって, 式 (14) と式 (17a) - (17c) を用いれば, $\eta = 0$ では, それぞれ次式で表される.

1) 固定辺 (C) :

$$[N]\{C\} = 0, [N]\{A\} = 0, [N]\{B\} = 0 \quad (21a)$$

2) 単純支持辺 (S or SS) :

i) ハードタイプの単純支持辺

$$[N]\{C\} = 0, [N]\{A\} = 0, \nu(m\pi)[N]\{A\} - (a/b)[N']\{B\} = 0 \quad (21b)$$

ii) ソフトタイプの単純支持辺

$$[N]\{C\} = 0, \nu(m\pi)[N]\{A\} - (a/b)[N']\{B\} = 0, (a/b)[N']\{A\} + (m\pi)[N]\{B\} = 0 \quad (21c)$$

3) 自由辺 (F) :

$$\nu(m\pi)[N]\{A\} - (a/b)[N']\{B\} = 0, (a/b)[N']\{A\} + (m\pi)[N]\{B\} = 0, (h/b)[N']\{C\} + [N]\{B\} = 0 \quad (21d)$$

同様に, $\eta = 1$ についても定式化できる.

したがって, 領域内の各離散点で式 (18a), (18b), (18c) から内部残差が求められ, また 2 辺の境界条件を表す式 (21a), (21b), (21c), (21d) から, 境界残差が導かれるので, 残差 R は,

$$R = R_L + w e R_B = [Z]\{X\} + \omega^2 [Y]\{X\} \quad (22)$$

で求められる. ただし, $[Z], [Y]$ は, 係数行列であり,

$\{X\}^T = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}\}$ である.

したがって, 残差の二乗誤差 I_d を求め, これを極値化すれば, 次式の代数方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \partial I_d / \partial \{X\} &= [Z]^T [Z] \{X\} - \omega^2 [Z]^T [Y] \{X\} \\ &= [K] \{X\} - \omega^2 [M] \{X\} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, $[K] = [Z]^T [Z], [M] = [Z]^T [Y]$ であり, $[K]$ は対称な係数行列になる.

したがって, 式 (23) の固有値計算を行えば, 振動数と固有ベクトルが求められる.

2.3 長方形厚板の支配方程式

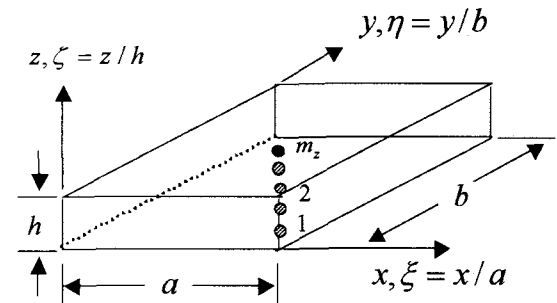


図-2 長方形厚板

図-2 に示すように, 調和振動を仮定した等方性直方体の自由振動方程式は, それぞれ x, y, z 方向の変位を u, v, w を用いて表すと, 次式の 3 元連立偏微分方程式で与えられる²⁾.

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\rho \omega^2 u}{G} = 0 \quad (24a)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\rho \omega^2 v}{G} = 0 \quad (24b)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\rho \omega^2 w}{G} = 0 \quad (24c)$$

ここで,

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である. ただし, ν, G は, それぞれポアソン比とせん断弾性係数であり, また ρ, ω は, 密度と円振動数 (rad/sec) である.

以下に示す無次元直交座標を用いて,

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h \quad (25)$$

式 (24a), (24b), (24c) を書き換えると, 以下のように表

される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \\ & + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a/b) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + (a/h) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} \right\} \\ & + \frac{\rho \omega^2}{G} a^2 u = 0 \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \\ & + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ (a/b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (a/h)(a/b) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} \right\} \\ & + \frac{\rho \omega^2}{G} a^2 v = 0 \end{aligned} \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \\ & + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ (a/h) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + (a/b)(a/h) \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \eta} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right\} \\ & + \frac{\rho \omega^2}{G} a^2 w = 0 \end{aligned} \quad (26c)$$

6 面体で表される長方形厚板の上, 下面を除く, 周面がダイヤフラム型の単純支持であると仮定すると, 変位関数 u, v, w は, 2 方向に固有関数を Fourier 級数展開しまた厚さ方向に spline 関数を仮定すれば, それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum \sum \sum A_{mnl} N_{l,k}(\zeta) \cos m\pi\xi \times \sin n\pi\eta \\ &= \sum \sum [N]\{A\} \cos m\pi\xi \times \sin n\pi\eta \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum \sum \sum B_{mnl} N_{l,k}(\zeta) \sin m\pi\xi \times \cos n\pi\eta \\ &= \sum \sum [N]\{B\} \sin m\pi\xi \times \cos n\pi\eta \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum \sum \sum C_{mnl} N_{l,k}(\zeta) \sin m\pi\xi \times \sin n\pi\eta \\ &= \sum \sum [N]\{C\} \sin m\pi\xi \times \sin n\pi\eta \end{aligned} \quad (27)$$

ここで, $[N] = [N_{1,k}(\xi), N_{2,k}(\xi), \dots, N_{i_z,k}(\xi)]$ であり,

$$\begin{aligned} \{A\}^T &= \{A_1, A_2, \dots, A_{i_z}\}, \{B\}^T = \{B_1, B_2, \dots, B_{i_z}\}, \\ \{C\}^T &= \{C_1, C_2, \dots, C_{i_z}\} \end{aligned} \quad (28)$$

である。また, $i_z = m_z + k - 2$, m_z は厚さ方向の離散点の数であり, m, n は, それぞれ x 方向と y 方向に展開される固有関数の級数項である。

式 (27) で仮定した変位関数を, 式 (26a–26c) の 3 元連立偏微分方程式に代入すると, それぞれ次式に示す常

微分方程式が求められる。

$$\begin{aligned} & -[N]\{A\}(m\pi)^2 - (a/b)^2 [N]\{A\}(n\pi)^2 \\ & + (a/h)^2 [N']\{A\} + \frac{1}{1-2\nu} \{-[N]\{A\}(m\pi)^2 \\ & + (a/b)[N]\{B\}(m\pi)(-n\pi) + (a/h)[N']\{C\}(m\pi)\} \\ & + \frac{\rho \omega^2}{G} a^2 [N]\{A\} = 0 \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} & -[N]\{B\}(m\pi)^2 - (a/b)^2 [N]\{B\}(n\pi)^2 \\ & + (a/h)^2 [N']\{B\} + \frac{1}{1-2\nu} \{-(a/b)[N]\{A\}(m\pi)(n\pi) \\ & - (a/b)^2 [N]\{B\}(n\pi)^2 + (a/b)(a/h)[N']\{C\}(n\pi)\} \\ & + \frac{\rho \omega^2}{G} a^2 [N]\{B\} = 0 \end{aligned} \quad (29b)$$

$$\begin{aligned} & -[N]\{C\}(m\pi)^2 - (a/b)^2 [N]\{C\}(n\pi)^2 \\ & + (a/h)^2 [N']\{C\} + \frac{1}{1-2\nu} \{-(a/h)[N']\{A\}(m\pi) \\ & - (a/b)(a/h)[N]\{B\}(n\pi) + (a/h)^2 [N']\{C\}\} \\ & + \frac{\rho \omega^2}{G} a^2 [N]\{C\} = 0 \end{aligned} \quad (29c)$$

ただし,

$$[N'] = \partial[N]/\partial\zeta, [N''] = \partial^2[N]/\partial\zeta^2 \quad (30)$$

である。

また, 長方形厚板の上面 ($\zeta = 1$) と下面 ($\zeta = 0$) は, 自由表面であるので, 次式の境界条件が指定される。

$$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0 \quad (31)$$

これらの式は, それぞれ次式で表される。

$$\sigma_z = \frac{\gamma\nu}{a} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\gamma\nu}{b} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\gamma(1-\nu)}{h} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \quad (32)$$

$$\tau_{xz} = \frac{G}{h} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{G}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (33)$$

$$\tau_{yz} = \frac{G}{h} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{G}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (34)$$

ここで, $\gamma = 2G/(1-\nu)$ である。

したがって, 上式に式 (27) で仮定した変位関数を代入すれば, それぞれ次式のように表せる。

$$\begin{aligned} & \nu[N]\{A\}(-m\pi) + \nu(a/b)[N]\{B\}(-n\pi) \\ & + (1-\nu)(a/h)[N']\{C\} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$(a/h)[N']\{A\} + [N]\{C\}(m\pi) = 0 \quad (36)$$

$$(a/h)[N']\{B\} + (a/b)[N]\{C\}(n\pi) = 0 \quad (37)$$

で表される。

領域内の各離散点で式(29a), (29b), (29c)から内部残差が求められ,また厚板の上面,下面の境界条件式(35), (36), (37)から境界残差が導かれる。

したがって,先に示した選点最小二乗法を適用すると,固有方程式に対応した線形代数方程式が求められる。

3. 数値計算例および考察

3.1 Mindlin 板の振動解析

ここでは,相対する2辺が単純支持され,他の2辺が任意の境界条件を有する長方形Mindlin板の振動解析への spline 選点最小二乗法の適用性について示す。また,長方形Mindlin板の振動特性に与える幅厚比や境界条件などの影響について示す。なお,相対する他の2辺の境界条件はC-Fのように表し,それぞれ2辺($\eta=0, 1.0$)が固定辺(C)と自由辺(F)に相当している。

以下の数値計算例では, spline 次数 $k-1$ は, 3 次に固定し, ポアソン比 ν は 0.3, せん断修正係数 κ は $\pi^2/12$ に仮定している。また, 重み係数 w_e は, 10^2 に仮定するが, この重み係数の取り扱いについては, 3.2 で詳細に検討を行う。

図-3と4には,それぞれ他の相対する2辺が固定(C-C)および自由(F-F)である正方形板の1次と比較的高次の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ の収束性に与える離散点の数 m_y の影響が示してある。ただし, 振動数パラメータは, Spline 帯板法(SSM)¹²⁾ で求めた解に対する相対誤差(%)で示してある。また幅厚比は, $b/h=10$ に仮定している。これより, m_y を増大させると, 一定値への安定した収束状態が得られている。また, 比較的高次の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ は, 離散点の

数を 40 程度に取れば, 1%以内の精度が得られている。また, 表-1には, 種々の境界条件と幅厚比を有する正方形Mindlin板の振動数パラメータの精度比較が示してある。比較のために, differential quadrature 法(DQM)を用いた近藤らの数値解²³⁾, 水澤の spline 帯板法(SSM)

表-1 種々の境界条件と幅厚比を有する Mindlin 板の

振動数パラメータの精度比較: $a/b=1.0, m_y=51$

境界条件	b/h	1st	2nd	3rd	Modes 4th	5th	6th
C-C	5	22.31	39.76	44.48	58.36	65.57	70.31
	DQM	22.31	39.76	44.47	58.36	65.57	70.29
	SSM	22.31	39.76	44.47	58.36	65.57	70.29
	10	26.65	49.07	59.15	78.71	86.72	101.2
	DQM	26.65	49.06	59.12	78.68	86.72	101.2
	SSM	26.65	49.06	59.12	78.68	86.72	101.2
	CM	26.64	49.06	59.10	78.68	86.71	
	100	28.91	54.69	69.20	94.38	102.0	128.7
	DQM	28.90	54.71	69.20	94.39	102.0	128.7
C-F	5	11.35	25.71	32.85	44.62	48.38	60.69
	DQM	11.35	25.71	32.83	44.62	48.37	60.62
	SSM	11.35	25.71	32.83	44.62	48.37	60.62
	10	12.24	30.39	38.62	55.73	62.68	78.50
	DQM	12.25	30.39	38.60	55.75	62.65	78.43
	SSM	12.25	30.39	38.61	55.74	62.65	78.43
	100	12.67	32.91	41.63	63.15	72.21	90.48
	DQM	12.96	32.88	41.60	63.25	72.17	90.45
	SSM	12.68	33.01	41.65	62.89	72.24	90.43
S-F	5	10.69	23.12	32.67	43.48	45.22	60.63
	DQM	10.69	23.12	32.66	43.48	45.21	60.56
	SSM	10.69	23.12	32.66	43.48	45.21	60.56
	10	11.37	26.14	38.27	53.19	55.60	78.34
	DQM	11.37	26.14	38.26	53.20	55.58	78.27
	SSM	11.37	26.14	38.26	53.20	55.58	78.27
	100	11.69	27.72	41.15	58.98	61.76	90.15
	DQM	11.70	27.71	41.14	59.00	61.71	90.13
	SSM	11.68	27.72	41.15	58.96	61.75	90.11
F-F	5	8.977	14.08	29.10	31.23	35.91	49.46
	DQM	8.977	14.08	29.10	31.22	35.89	49.45
	SSM	8.977	14.08	29.10	31.22	35.89	49.45
	10	9.438	15.38	33.85	36.35	42.76	62.05
	DQM	9.439	15.38	33.84	36.33	42.76	62.08
	SSM	9.439	15.38	33.84	36.33	42.76	62.08
	100	9.627	16.10	36.64	38.92	46.67	70.56
	DQM	9.633	15.97	36.64	38.88	46.79	70.79
	SSM	9.628	16.11	36.64	38.91	46.66	70.54

DQM: Differential quadrature 法²³⁾, SSM: Spline strip 法¹²⁾, CM: Collocation 法²²⁾

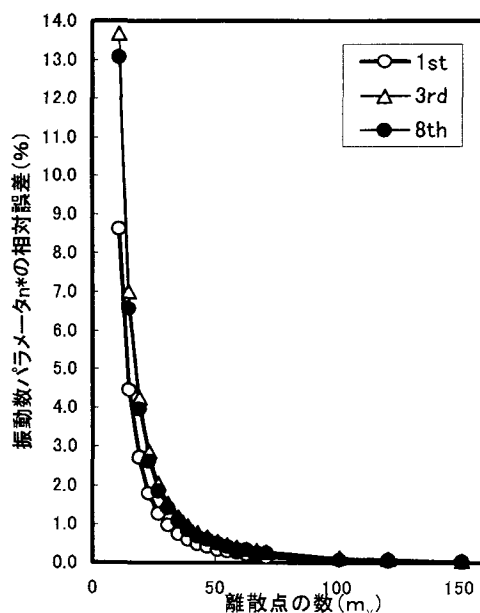


図-3 振動数パラメータの収束性;
SS-CC, $a/b=1.0, b/h=10$

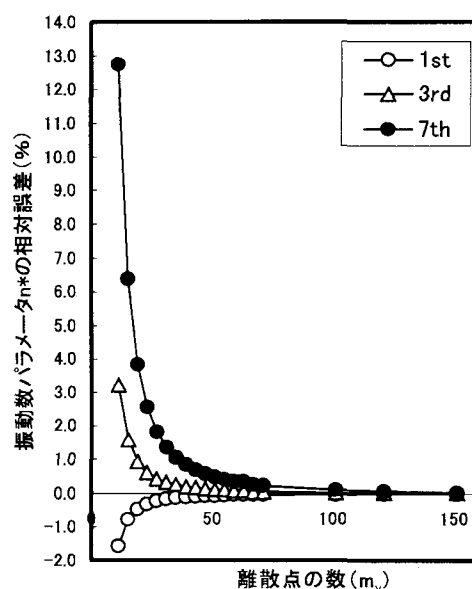


図-4 振動数パラメータの収束性;
SS-FF, $a/b=1.0, b/h=10$

による数値解¹²⁾と選点法を用いて求めた三上らの数値解²⁰⁾も示してある。

これより、本手法で求めた値は、他の数値解析法で求めた解と、良く一致した結果を示している。

3.2 厚板の振動解析

ここでは、周面がダイヤフラム型の単純支持を有する長方形厚板の振動解析への spline 選点最小二乗法の適用性について示す。また、以下の数値計算例では、spline 次数 $k-1$ は 3 次を用い、またポアソン比 ν は 0.3 に仮定している。

表-2 には、種々の幅厚比を有する正方形板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ に与える重み係数 we^2 の影響が示してある。この係数は、領域残差に対する境界残差の重みを示すものであり、係数の値が大きいくほど、境界残差をより正確に評価できる。ここでは、 we^2 を 1 から 40000 まで変化させている。ただし、離散点の数 m_z は、91 に固定している。

これより、幅厚比が大きくなると、 we^2 の値を 10^4 以上にすれば、重み係数の影響が見られなくなる。また、板厚が大きくなる（幅厚比が小さくなる）と、振動数パラメータは、重み係数の値に依存しなくなる。

これらの結果を踏まえて、以後の計算例では、重み係数 we^2 を 10000 に仮定している。

表-3 には、幅厚比 $b/h=100$ である正方形板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ の収束性に与える厚さ方向の離散点 m_z の影響が示してある。また、比較のために、水澤の spline 帯板法による解¹²⁾と DQ 法を用いた近藤らの数値解²⁰⁾も示してある。また、表-4 には、幅厚比 $b/h=10$ を持つ正方形板の振動数パラメータの収束性に与える厚さ方向の離散点 m_z の影響も示してある。

比較のために、3次元弾性論に基づく Srinivas らの解析解²⁾、DQ 法²⁶⁾や WE 法²⁹⁾の数値解も示してある。これより、離散点を増加させると、 n^* は、一定値への安定し

表-2 正方形厚板の振動数パラメータ n^* に与える重み係数 we^2 の影響 : $m_z = 91, \nu = 0.3$

b/h	we^2	Modes							
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
100	1	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(1,3,0)	(3,1,0)	(2,3,0)	(3,2,0)
	100	19.68	76.25	48.94	61.40	109.3	98.29	118.9	124.7
	10000	19.73	48.46	49.29	78.68	98.41	98.51	127.9	128.0
	40000	19.73	49.29	49.29	78.83	98.51	98.51	128.0	128.0
10	1	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(1,3,0)	(3,1,0)	(1,1,1)	(2,3,0)
	100	19.09	45.61	45.61	70.10	85.48	85.48	91.05	107.4
	10000	19.09	45.61	45.61	70.09	85.48	85.48	91.05	107.4
	10000	19.09	45.61	45.61	70.09	85.48	85.48	91.05	107.4
5	1	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(1,1,1)	(2,2,0)	(1,3,0)	(3,1,0)	(1,2,1)
	100	17.52	38.48	38.48	45.53	55.78	65.99	65.99	71.48
	10000	17.52	38.48	38.48	45.53	55.78	65.99	65.99	71.48
	10000	17.52	38.48	38.48	45.53	55.78	65.99	65.99	71.48

た収束状態が得られている。また、その収束値は、他の解析解や数値解と良く一致した結果を示している。

表-5 は、種々の幅厚比を有する正方形板の振動数パラメータ n^* の精度比較を示している。また、比較のために、3次元弾性論に基づく解析解²⁾や数値解²⁰⁾、²⁶⁾、²⁹⁾も示してある。これより、比較的薄い板から極厚板まで、本手法で求めた値は、解析解や数値解と良く一致した結果を示している。

表-3 正方形厚板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える離散点の数 m_z の影響 : $b/h = 100, \nu = 0.3$

m_z	Modes					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
11	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(1,3,0)	(3,1,0)
21	19.51	48.72	48.74	79.94	97.40	97.40
31	19.68	49.16	49.16	78.62	98.24	98.24
41	19.71	49.21	49.21	78.74	98.40	98.40
51	19.72	49.27	49.27	78.79	98.45	98.45
61	19.72	49.28	49.28	78.81	98.48	98.48
71	19.73	49.28	49.28	78.82	98.49	98.49
81	19.73	49.29	49.28	78.83	98.50	98.50
91	19.73	49.30	49.28	78.83	98.51	98.51
SSM ¹²⁾	19.73	49.30	49.30	78.84	98.51	98.51
DQM ²³⁾	19.73	49.30	49.30	78.80	98.43	98.43

表-4 正方形厚板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える離散点の数 m_z の影響 : $b/h = 10, \nu = 0.3$

m_z	Modes					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
9	(1,1,0)	(2,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)	(1,3,0)	(3,1,0)
13	18.76	44.84	44.84	68.93	84.06	84.06
17	18.94	45.27	45.27	69.58	84.86	84.86
21	19.01	45.43	45.43	69.81	85.13	85.13
25	19.03	45.50	45.50	69.92	85.26	85.26
29	19.05	45.53	45.53	69.97	85.33	85.33
33	19.06	45.56	45.56	70.01	85.37	85.37
37	19.06	45.57	45.57	70.03	85.40	85.40
41	19.07	45.58	45.58	70.05	85.42	85.42
45	19.07	45.59	45.59	70.06	85.43	85.43
49	19.08	45.59	45.59	70.07	85.44	85.44
53	19.08	45.60	45.60	70.07	85.45	85.45
57	19.08	45.60	45.60	70.08	85.45	85.45
61	19.09	45.60	45.60	70.08	85.45	85.45
3D-Exact ²⁾	19.09	45.62	45.62	70.10	85.49	85.49
3D-DQM ²⁶⁾	19.09	45.65	45.65	70.14	85.49	85.49
WEM ²⁹⁾	19.09	45.62	-	70.10	85.49	-

表-5 正方形厚板の振動数パラメータ n^* の精度比較 : $\nu = 0.3, m_z = 91$

b/h	Modes					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
100	19.73	49.29	49.29	78.83	98.51	98.51
SLM ²⁰⁾	19.73	49.30	49.30	78.84	98.51	98.51
3D-DQM ²⁶⁾	19.73	49.30	49.30	78.80	98.43	98.43
10	19.09	45.61	45.61	70.09	85.48	85.48
3D-Exact ²⁾	19.09	45.62	45.62	70.10	85.49	85.49
3D-DQM ²⁶⁾	19.09	45.65	45.65	70.14	85.49	85.49
WEM ²⁹⁾	19.09	45.62	-	70.10	85.49	-
5	17.52	38.48	38.48	45.53	55.78	65.99
3D-DQM ²⁶⁾	17.53	38.49	38.49	45.53	55.80	64.39
SLM ²⁰⁾	17.53	38.48	38.48	45.53	55.79	66.00
WEM ²⁹⁾	17.53	38.48	38.48	-	55.79	66.00
2	12.42	-	-	18.21	23.00	23.00
3D-DQM ²⁶⁾	12.43	12.88	12.88	18.21	23.01	23.01

以上, Mindlin 板と厚板の振動解析への Spline 選点最小二乗法の適用について検討し, 限定した境界条件の下に, 本手法の収束性や解析精度について示した。

一方, 厚板解析における本数値解析法の問題点を挙げると, 以下ようになる。① 離散点の数が比較的少ないと, 数値誤差が大きく現れる。② 得られる係数行列は対称になるが, 一般化固有値計算が必要になる。③ ステップ状の変厚板の問題では, 平板領域を要素に分割する必要があり, プログラミングに工夫が必要になる。

4. あとがき

本論文では, 高次の連続性と局所基底を有する B-spline 関数を変位関数に仮定した選点最小二乗法を用いて, 2階の3元連立偏微分方程式で表される Mindlin 板と弾性直方体の振動解析を行った。Mindlin 板および弾性直方体の振動解析では, それぞれ Levy 法と Navier 法を適用して得られる2階の3元連立常微分方程式を spline 選点最小二乗法を用いて解いている。

本文で得られた主な結果をまとめると, 以下ようになる。

- 1) 局所基底を有する B-spline 関数を選点最小二乗法の試験関数に適用するので, 得られる係数行列は非密行列かつ対称行列になり, 数値安定性の高い解析結果が得られている。
- 2) spline 選点最小二乗法を適用すれば, 3元連立微分方程式で表される厚板の自由振動方程式と与えられた境界条件は, 容易に連立一次元方程式に離散化され, また境界条件が各境界辺で厳密に導入できる。
- 3) 本手法で定義した領域残差に対する境界残差の重み係数 we^2 は幅厚比に依存し, この値を 10^4 程度の大きさとれば, 幅厚比の大きさに関わらず, 精度の高い解析結果が得られる。
- 4) 本手法を用いて求めた振動数パラメータは, 離散点の数の増大とともに, 振動次数に関係なく, 安定した収束状態を示し, また一定値に収束する結果が得られている。
- 5) spline 選点最小二乗法を用いて求めた値は, 他の解析解や数値解と比較して, 幅厚比や境界条件にかかわらず, よく一致した結果が得られている。
- 6) 数値積分公式を用いる必要がないので, プログラミングが容易であり, また数値積分に必要な計算時間が短縮できる。

今後は, 平板と流体場や音場などの連成問題への本手法の適用について検討して行きたい。

参考文献

- 1) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- 2) Srinivas, S., Rao, C.V.J. and Rao, A.K.: An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. J. Sound and Vibr., Vol. 12(2), pp. 187-199, 1970.
- 3) Srinivas, S., Joga Rao, C.V. and Rao, A.K.: Some results from an exact analysis of thick laminates in vibration and buckling. J. Appl. Mech., ASME, vol. 37, pp. 868-870, 1970.
- 4) Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Research on thick plate vibration- a literature survey. J. Sound and Vibr., Vol. 180, pp. 163-176, 1995.
- 5) Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Transverse vibration of thick rectangular plates, I: comprehensive sets of boundary conditions. Comput. Struct., Vol. 49, pp. 1-29, 1993.
- 6) Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L.: Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. J. Sound and Vibr., Vol. 69, pp. 345-359, 1980.
- 7) McGee, O.G. and Leissa, A.W.: Three-dimensional free vibrations of thick skewed cantilevered plates. J. Sound Vib., Vol. 149(3), pp. 539-542, 1991.
- 8) Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K.: A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates. Int. J. Solids and Structures, Vol. 30(24), pp. 3357-3379, 1993.
- 9) Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K.: Three-dimensional vibration of rectangular plates-variance of simple support conditions and influence of in-plane inertia. Int. J. Solids and Structures, Vol. 31(23), pp. 3233-3247, 1994.
- 10) 板倉和則:任意境界条件を有する厚肉斜板の自由振動解析. 日本建築学会構造系論文集, 第 492, PP. 37-45, 1997.
- 11) Zhou, D., Cheung, Y.K., Au, F.T.K. and Lo, S.H.: Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, Int. J. Solids and Struct., Vol. 39, pp. 6339-6353, 2002.
- 12) Mizusawa, T.: Vibration of rectangular Mindlin plates by the spline strip method. J. Sound and Vibr., Vol. 163, pp. 193-205, 1993.
- 13) Cheung, Y.K. and Chakrabarti, S.: Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method. J. Sound Vibr., Vol. 21, pp. 277-284, 1972.

1) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and

- 14) Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M.: The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. Proc. Inst. Civil Engrs, Vol. 53, pp. 147-172, 1972.
- 15) Mizusawa, T. : Vibration of thick annular sector plates using semi-analytical methods. J. Sound Vib., Vol. 150, pp. 245-259, 1991.
- 16) 水澤富作, 高木信治: Spline Prism 法を用いた長方形厚板の振動解析について, 構造工学論文集, Vol. 39A, pp. 1-12, 1993.
- 17) Mizusawa, T. and Takagi, S.: Application of the spline prism method to analyse vibration of thick rectangular plates, Comm. Appl. Numer. Meth., Vol. 11, No. 1, pp. 1-11, 1995.
- 18) Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K.: Three-dimensional vibration of rectangular plates-effects of thickness and edge constraints. J. Sound and Vibr., Vol. 182(5), pp. 709-727, 1995.
- 19) 林 正, 渡辺力: 構造物の3次元応力解析と自由振動解析への節点プリズム法の応用, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp.339-348, 1998.
- 20) 水澤富作, 田中宏明: Spline layer 法を用いた扇形厚板の自由振動解析, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp.1-9, 1998.
- 21) Noor, A.K.: Mixed finite-difference scheme for analysis of simply supported thick plates. Computers and Structures, vol. 3, pp. 967-982, 1973.
- 22) Mikami,T. and Yoshimura,J.: Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates. Comput. Struct., Vol.18,pp. 425-431,1984.
- 23) 近藤八重, 高木信治, 水澤富作 : Differential Quadrature 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析. 応用力学論文集, Vol. 3, pp. 193-201, 2000.
- 24) Malik, M. and Bert, C.W.: Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method. Int. J. Solids Structures, Vol. 35, pp. 299-318, 1998.
- 25) Liew, K.M. and Teo, T.M.: Modeling via differential quadrature method: three-dimensional solutions for rectangular plates. Comput. Method Appl. Mech. Eng., Vol.159, pp.369-381,1998.
- 26) Liew, K.M. and Teo, T.M.: Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method. J. Sound and Vibr., Vol. 220(4), pp. 577-599, 1999.
- 27) Mizusawa,T. and Kajita,T.: Application of point least squares method with B-splines in solid mechanics problems. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 16, pp. 897-907, 1982.
- 28) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P.: Meshless methods- An overview and recent developments. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol. 139, pp. 3-47, 1996.
- 29) Filipich, C.P., Rosales, M.B. and Belles, P.M.: Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids. J. Sound and Vib., Vol. 212, pp. 599-610, 1998.

(2004年4月16日受付)