応用力学論文集 Vol.7,pp.185-190　(2004 年 8 月)　土木学会

拡張した一般化逆行列による確率場の逆解析

Inverse analysis of stochastic field by using extended generalized inverse matrix

吉田郁政*
Ikumasa Yoshida

*工博, 東電設計（株）, 地盤・構造部（〒110-0015 東京都台東区東上野 3-3-3）

Estimation of uncertainties is one of the important issues in civil engineering problems recently. K-L (Karhunen-Loeve) expansion is known to represent stochastic field and used in Spectral Stochastic FEM. K-L expansion has a close relation to the theory of generalized inverse matrix. The new method with K-L expansion is proposed for inverse analysis of stochastic field. In the method, the generalized inverse matrix is applied to stochastic field and extended to the case with apriori information on another field which has a relation with the field of unknown parameter.

Key Words: inverse problem, generalized inverse matrix, singular value decomposition, stochastic field

1. はじめに

地盤や構造物の挙動評価において不確定性の影響評価は重要な問題として認識されるようになり，重要構造物では確率的安全性評価(Probabilistic Safety Assessment, PSA)が注目されるようになってきた [1]．また，ISO2394[2]やEuroCode[3]などの設計コードの国際標準でも不確定性の考慮は必要とされている．不確定性を有する場（以下，確率場と記す）の解析方法としていくつかの方法が知られているが，最近では Spectral Stochastic FEM[4),5),6)]が注目されている．こうした方法では確率場の統計的性質を入力として与え，その応答の確率的性質を調べることができる．これに対してその応答の一部が観測されたときに確率場がどのように推定（事前情報の更新）されるかは確率的逆問題として考えることができる．

限られた観測情報から多くの未知量を推定する場合，情報の付加が必要となる．一般化逆行列を用いる方法[7),8)]（あるいは特異値分解）が知られているが，これも本質的には情報を付加していることと同じであり，付加している情報の意味を十分に理解しておく必要がある．一般化逆行列による方法では未知パラメタ空間の基底変換を行い，ある部分空間を張る基底の展開係数だけを推定していると解釈することができ，その補空間はノルム最小の条件から決められる[9),10)]．なお，一般化逆行列にもいくつかの定義があるが，本論文では情報が不足している問題に限定し，一般化逆行列と記した場合ノルム最小型を意味することとする．このノルム最小条件が対象としている問題に対して妥当であればよい解が得られるが，そうでなければ補空間を決める条件，すなわち事前情報の与え方を変更する必要がある．また，特異値分解において考慮する次数（逆解析の対象とする部分空間の次元）が問題となるが，確率論から解釈すると特異値は展開係数の分散に相当するため，事前情報と観測情報から決めた場合の分散の比較，あるいは情報エントロピーから適切な次数を決めることができる．

確率場の表現法として Karhunen-Loeve 展開（以下 K-L 展開と記す）が知られており，Spectral Stochastic FEM ではこの考え方が用いられている．K-L 展開は関数空間における基底変換であり，一般化逆行列の理論と密接な関係を持っている．本論文では一般化逆行列の理論を上述のように確率論から解釈し，確率場を K-L 展開して逆解析する定式化を示す．また，事前情報の与え方について拡張を行った一般化逆行列の考え方も提案する．事前情報は未知量空間そのものに関して与えることが一般的であるが，未知量空間と何らかの関係をもつ別の空間に関して事前情報を与えることも考えられる．事前情報空間としては問題に応じて様々なものが考えられるが，一例として，未知量空間そのものではなく，その差分に関する空間に対して事前情報を与えた定式化を示す．事前情報として未知量空間の期待値と滑らかさを表す自己相関関数（あるいは共分散行列）の両方を与えると観測情報の感度が小さい領域では事前情報として与えた期待値がそのまま推定値となってしまう場合がある．差分に関する空間に対して事前情報を与えることによって，この問題を回避することができる．

¶ Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

2. 確率場の逆解析のための定式化

2.1 確率場の表現

確率場をK-L展開することにより，独立な不確定性を有する変数の和として確率場を表すことができる[4]．確率場は強度や剛性，単位体積重量の場など任意である．位置 t における値を$p(t,\theta)$と表す．θは確率空間において対応する事象を表す．

K-L展開を用いて，確率過程$p(t,\theta)$を，

$$p(t,\theta) = p_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} r_i(\theta)\sqrt{\lambda_i}\, p_i(t) \tag{1}$$

と表す．ここで，p_0はp の期待値である．λ_iと$p_i(t)$は，共分散関数$M(t,s)$の固有値及び固有関数であり，

$$\int_D M(t,s) p_i(s) ds = \lambda_i p_i(t) \tag{2}$$

の解として得られる．また，$r_i(\theta)$は，正規直交性を有する独立Gauss確率変数であり，

$$E[r_i(\theta)] = 0.0,\ E[r_i(\theta) r_j(\theta)] = \delta_{ij} \tag{3}$$

を満たす．ここで，E[・]は期待値を表す． K-L展開で用いる基底関数 $p_i(t)$は，対象とする領域をDとして

$$\int_D p_i(t) p_j(t) dt = \delta_{ij} \tag{4}$$

の意味で直交する関数である．δ_{ij}はKronecker のデルタを意味する．

以上は連続の確率場$p(t,\theta)$に関する表現であるが，場を離散化しベクトル場と考えて同様の表現を行う．確率場をn 点で離散化して考えn 次元の確率ベクトル$\boldsymbol{x}(\theta)$とし，その期待値を$\boldsymbol{x}_0$，共分散行列を$\boldsymbol{M}$ で表す．離散化することで式(2)は次の固有値問題となる．

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}_i = \lambda_i \boldsymbol{w}_i \tag{5}$$

固有ベクトル$\boldsymbol{w}_i$用いて確率ベクトル$\boldsymbol{x}(\theta)$は以下のように表すことができる．

$$\boldsymbol{x}(\theta) - \boldsymbol{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i(\theta)\sqrt{\lambda_i}\,\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}(\theta) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \boldsymbol{0} \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_0$は期待値ベクトル，$\boldsymbol{W}$ は基底ベクトル $\boldsymbol{w}_i$を横に並べた行列であり，$\boldsymbol{r}(\theta)$は基底ベクトルの展開係数から成る確率ベクトルである．式(6)を変形し，

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}^T\left(\boldsymbol{x}(\theta) - \boldsymbol{x}_0\right) \tag{8}$$

を得る．$\boldsymbol{r}(\theta)$に関する期待値や共分散行列$\boldsymbol{M}_{(r)}$は次に示すように正規直交化されている．このことが後述の事後の基底変換において重要な意味を持つ．

$$E[\boldsymbol{r}(\theta)] = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{(r)} &= E[\boldsymbol{r}(\theta)\boldsymbol{r}(\theta)^T] \\ &= \boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}^T E\left[(\boldsymbol{x}(\theta) - \boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}(\theta) - \boldsymbol{x}_0)^T\right]\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$\boldsymbol{0}$は全ての成分が0.0 のベクトルを$\boldsymbol{I}$は単位行列を表す．

一般に$\boldsymbol{r}$ と$\boldsymbol{x}$ とは一致しないので，以下，$\boldsymbol{x}$ を未知パラメタベクトル，$\boldsymbol{r}$ を未知量ベクトルと呼び区別する．また，簡略化のためθを省く．

2.2 逆解析の基本的定式化

確率論から定式化を行う逆解析の基本的考え方は既往の文献[9]などに述べてあるので，ここでは結果だけを簡単に示す．未知パラメタベクトル$\boldsymbol{x}$ について期待値とその共分散行列が事前情報として与えられているとする．

$$\boldsymbol{x}_0 = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{M} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}] \tag{11}$$

観測量z が次式で与えられ，

$$z = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) + v \tag{12}$$

v は観測量誤差を表し，その共分散行列が与えられるとする．

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{E}[\ vv^{\mathrm{T}}\ ] \tag{13}$$

未知パラメタと観測量誤差が互いに独立な正規分布に従うとの仮定の下で逆解析のための目的関数は次のように誘導される．

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(z - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}(z - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})) \end{aligned} \tag{14}$$

目的関数の最小化には多くの方法の適用が可能であり，基本的にはどの方法を用いてもよい．

観測方程式が次式のように線形の場合には目的関数の

最小化が極めて簡単になる.

$$z = Hx + v \tag{15}$$

目的関数の最小点は極値の条件によって次式で簡単に求まる.

$$x = \bar{x} + PH^T R^{-1}(z - H\bar{x}) \tag{16}$$

$$P = (H^T R^{-1} H + M^{-1})^{-1} \tag{17}$$

式(16)(17)はカルマンゲインを用いた形に変形することができるが，数学的な変形を施しただけで（逆行列補題として有名な変形）本質的には全く等価である．また，式(17)は事後の共分散行列を表している.

以下，観測方程式が線形の場合に限って議論を進めるが，非線形の場合にはある代表点の周りで線形化することにより同様の議論をすることができる[9].

2.3 逆解析のための基底変換

未知パラメタベクトル x に対して式(16)(17)を直接用いて解を求めることも考えられるが，観測情報の質と量によって推定できる確率場の細かさに限界が存在する．離散化された空間で述べると一般に x は大次元のベクトルとなっており，観測情報だけから全次元を決めることは通常不可能である．そこで，観測情報に従って再び基底変換を行い，逆解析のための部分空間を設定する．こうした方法は特異値分解，一般化逆行列による方法として知られている.

式(16)(17)について式(8)に示した未知量ベクトル r を用いて書き換える．まず，観測方程式を次式で定義し直す.

$$\begin{aligned} & z' = H_{(r)} r + v \\ & \text{ここで}, z' = z - Hx_0, \quad H_{(r)} = HWA^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{18}$$

未知量ベクトル r について観測情報だけから推定を行う式は次のように与えられる.

$$r = P_{(r)} H_{(r)}{}^T R^{-1} z' \tag{19}$$

$$P_{(r)} = (H_{(r)}{}^T R^{-1} H_{(r)})^{-1} \tag{20}$$

基底変換を行うため次の固有値問題を考える.

$$P_{(r)} u = \lambda u \tag{21}$$

$P_{(r)}$ は未知量ベクトル r についての共分散行列を表しているが，観測情報が十分でない場合には $H_{(r)}{}^T R^{-1} H_{(r)}$ の逆行列が求められなくなる．そこで，代わりに次の固有値問題を解く.

$$(P_{(r)})^{-1} u = \mu u \tag{22}$$

$P_{(r)}$ が存在する場合には式(22)に左から $P_{(r)}$ を乗じて整理することにより式(21)と(22)の固有ベクトルは一致し，固有値は $\lambda = 1/\mu$ の関係を持つことが容易にわかる．0.0 となる μ が存在する，すなわち無限大となる λ が存在する場合には式(20)，つまり $H_{(r)}{}^T R^{-1} H_{(r)}$ の逆行列が定義できない状態である．λ は展開係数の不確定性（分散）を表していることを考えると，ある基底に関して不確定性が無限大となり解が求められない状態と解釈することができる.

ちなみに，事前情報と観測情報の両方から求める場合には，未知量ベクトル r の事前情報が式(9)(10)に示すように正規化されていることに注意すると，事後の共分散行列 $P_{(r)}{}^*$ は次式で求められる.

$$P_{(r)}{}^* = (H_{(r)}{}^T R^{-1} H_{(r)} + I)^{-1} \tag{23}$$

次の固有値問題を解き固有モード u を求める.

$$(P_{(r)}{}^*)^{-1} u = (H_{(r)}{}^T R^{-1} H_{(r)} + I) u = \mu^* u \tag{24}$$

式(22)(24)より明らかなように $\mu^* - 1 = \mu$ の関係があり，$P_{(r)}{}^*$ に対する固有値 λ^* は $\lambda^* = \lambda/(\lambda - 1)$ の関係がある．すなわち，λ に関しては 0.0 から無限大の範囲をとり得るが λ^* は 0.0 から 1.0 の間の数値となり，事前情報が与えられている場合には観測情報を与えることにより不確定性が増えることはないという（ごく当たり前の）ことが数値的に示されている.

基底ベクトル w_i で張る空間について上述の固有モード u を用いてさらに基底変換を行い，新しい展開係数ベクトル s を定義する.

$$r = \sum_{i=1}^{n} u_i s_i = Us \tag{25}$$

ここで，U は固有ベクトル u_i を横に並べた行列である．未知量ベクトル s の事後の共分散行列 $P_{(s)}$ は対角行列となり対角成分は固有値 λ となる．一方，その事前の共分散行列 $M_{(s)}$ も対角化されている.

$$M_{(s)} = U^T M_{(r)} U = U^T U = I \tag{26}$$

未知パラメタベクトル x に関しては一般に事前も事後も共分散行列が対角化されない．未知量ベクトル r については事後の共分散行列が対角化されていない．つまり各基底が独立していないため，逆解析の対象とする部分空間を定めるのが困難になっている．一方，未知量ベクトル s の事前，事後の共分散行列はそれぞれ対角化されているため，各基底について個別に逆解析の対象とすべきかを議論することができる．未知量ベクトル s に関する事後の共分散行列の固有値 λ が小さいほど観測情報がその基底の推定に対して有効に機能していることを意味し，逆に大きいほど観測情報が役に立っていないことを意味する．そこで，固有値が小さい順に固有ベクトルを並べ，そのうちの上位のいくつかの固有ベクトルから，逆解析の対象とする部分

空間を作成する．事前情報に関しては各基底の展開係数の分散が1.0になるように正規直交化されているため，観測情報だけから定めたλが1.0よりも小さければその固有モードを逆解析の対象とする部分空間の基底ベクトルとして採用し，1.0よりも大きければ事前情報から定めればよい．

有効な次数についてはモデル全体の不確定性を表す情報エントロピー[12),13)]から解釈することもできる．情報エントロピーはモデルの不確定性を表す量であり，値が大きいほど不確定性が大きいことを表している．情報エントロピー $S(\boldsymbol{x})$ は未知パラメタベクトル$\boldsymbol{x}$に関する確率密度関数$p(\boldsymbol{x})$を用いて次式で定義される．

$$S(\boldsymbol{x}) = -\int p(\boldsymbol{x}) \log p(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{27}$$

$\boldsymbol{x}$が正規分布に従う場合はその共分散行列から求めることができる．観測情報によって更新されたモデルの情報エントロピーはその共分散行列$\boldsymbol{P}$を用いて次式で算定される．

$$S(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\log\{(2\pi e)^n \det \boldsymbol{P}\} \tag{28}$$

ここで，$\det \boldsymbol{P}$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の行列式を，e は自然対数の底を表している．

事後の共分散行列 $\boldsymbol{P}$ は観測情報だけから決める部分空間の次元数に応じて変化するため，情報エントロピーと次元数の関係を調べ情報エントロピーが最小となる次元数を選べばよい．展開係数$\boldsymbol{s}$に関しては事前情報に関する共分散行列は単位行列，事後の共分散行列も対角行列となっており小さい順に並べられていることに注意すると，その行列式$\det \boldsymbol{P}_{(s)}$は次式で表される．

$$\det \boldsymbol{P}_{(s)} = \prod_{i=1}^{n1} \lambda_i \tag{29}$$

ここで，n_1は逆解析の対象となる部分空間の次元を表している．つまり，$\lambda_i<1$ となる基底だけを選ぶと言うことは情報エントロピーの最小化という意味も持っていることがわかる．

2.4 基底変換を考慮した推定式

逆解析の対象として選ばれた n_1 個の基底ベクトルを並べた行列を $\boldsymbol{U}_1$，選ばれなかった n_2個のベクトルから成る行列を $\boldsymbol{U}_2$とする．したがって，$\boldsymbol{U}_1$は$n\times n_1$の行列，$\boldsymbol{U}_2$は$n\times n_2$の行列，$n_1+n_2=n$ である．

$$\boldsymbol{U} = [\,\boldsymbol{U}_1 \quad \boldsymbol{U}_2\,] \tag{30}$$

未知量ベクトルは基底ベクトルの展開係数なので $\boldsymbol{U}_1$，$\boldsymbol{U}_2$ に対応して，$\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$ に分けることができる．$\boldsymbol{s}_2$ は逆解析の対象にはせずに事前情報から定めることから，式(9)に注意すると，$\boldsymbol{r}$ は次のように表される．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^T E[\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{s}_1 \tag{31}$$

$\boldsymbol{s}_1$が求めるべき未知量ベクトルとなるので，$\boldsymbol{s}_1$を用いて観測方程式を次のように書き換える．

$$\begin{aligned} &z' = \boldsymbol{H}_{(s1)}\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{v} \\ &\text{ここで}, z' = z - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{H}_{(s1)} = \boldsymbol{H}_{(r)}\boldsymbol{U}_1 \end{aligned} \tag{32}$$

式(19)(20)の下添え字を(r)から$(s1)$に変更するだけで $\boldsymbol{s}_1$ に関する推定式を得ることができる．それに式(31)(32)及び式(18)(6)の関係を代入すると未知パラメタ$\boldsymbol{x}$に関する次の推定式を得る．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{(r)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}_{(r)}\boldsymbol{U}_1)^{-1}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{(r)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}(z-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0) \\ &= \boldsymbol{x}_0 + \\ &\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{U}_1)^{-1}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}(z-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0) \end{aligned} \tag{33}$$

式(33)は特異値分解，一般化逆行列として知られる方法を確率論から解釈し，重みに関して観測量誤差や事前情報の統計的性質を考慮して一般化した式ということができる．

3. 拡張した事前情報による逆解析

3.1 事前情報の拡張

事前情報を与えることによって推定を安定させることができるが，確率場の期待値分布も事前情報として与えてしまうと推定値分布に大きな影響を与えてしまう場合がある．そのため，滑らかさだけを事前情報として与えたい問題もある．また，事前情報が対象とする確率場の情報そのものを与えるのではなくなんらかの関連をもった別の確率場の情報を事前情報として与えたい場合もある．こうした問題設定に対応できる一般的な事前情報の定式化について提案する．

事前情報として別の確率場を離散化したベクトル$\boldsymbol{y}$に関して与えられるとする．推定したい確率場と事前情報を与える確率場になんらかの関係があり，離散化されたベクトルに関して次式が成立するとする．これを事前情報式と呼ぶことにする．

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}_y \tag{34}$$

$\boldsymbol{v}_y$ がガウス分布に従い，その期待値が $\boldsymbol{0}$，共分散行列が$\boldsymbol{M}_y$で与えられるとする．式(14)と同様にして逆解析のための目的関数は次式で与えられる．

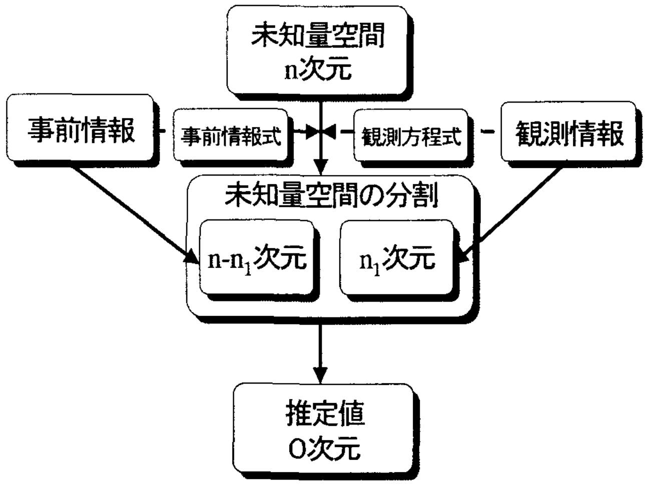

図-1　空間の分割と推定値

$$J=\frac{1}{2}(y-G(x))^{\mathrm{T}}M_y^{-1}(y-G(x)) + \frac{1}{2}(z-H(x))^{\mathrm{T}}R^{-1}(z-H(x)) \tag{35}$$

観測方程式や事前情報式が線形の場合には，極値の条件より推定値は次のように求められる．

$$x=P(G^T M_y^{-1}y+H^T R^{-1}z) \tag{36}$$

$$P=(G^T M_y^{-1}G+H^T R^{-1}H)^{-1} \tag{37}$$

事前情報だけから決まる，未知パラメタベクトル x の共分散行列の逆行列 M_x^{-1} は次式で与えられる．

$$M_x^{-1}=G^{\mathrm{T}}M_y^{-1}G \tag{38}$$

M_x 自体は定義できない場合もある．例えば，y の次元が x の次元よりも小さければ明らかにはランク落ちとなり行列 M_x は定義できないことになる．そこで，次の固有値問題を考える．

$$M_x^{-1}w=(G^{\mathrm{T}}M_y^{-1}G)w=\mu w \tag{39}$$

M_x^{-1} の固有値 μ は M_x の固有値 λ の逆数と一致し，固有ベクトルもそれぞれ一致する．ランク落ちしている場合には M_x^{-1} の固有値が 0.0 となる基底が存在し M_x が定義できない．そこで μ が 0.0 となる基底は無条件で逆解析の対象とする部分空間の基底に含める．こうした基底は観測情報だけから推定するため λ の大きさは結果に影響を与えないので数値計算上は 1.0 としておく．式(7)では固有値 λ を対角成分に並べた対角行列 A を定義したが，λ が無限大（μ が 0.0）となる成分について 1.0 で置き換えた対角行列 B を定義し，次式で事前情報に関して直交化させる基底変換を行う．

$$x=WB^{\frac{1}{2}}r \tag{40}$$

事前情報ならびに観測方程式は以下のように書き直される．

$$y=G_{(r)}r+v, \qquad G_{(r)}=GWB^{\frac{1}{2}} \tag{41}$$

$$z=H_{(r)}r+v, \qquad H_{(r)}=HWB^{\frac{1}{2}} \tag{42}$$

あとは 2.で述べた方法と基本的には同様の手順で計算を行うことができる．観測情報だけから定めた共分散行列 $P_{(r)}$ に関して固有値問題を解き（式(21)(22)参照），その固有ベクトル u を用いて再び基底変換する（式(25)参照）．新たな基底に関する展開係数ベクトル（未知量ベクトル）s について，事前，事後の分散の大きさ（固有値の大きさ）を比較することにより，あるいはモデル全体の情報エントロピーに注目することにより，観測量だけから決める s_1 と事前情報だけから決める s_2 に分けて未知パラメタベクトル x を求めることができる．以上の手順をまとめると式(43)が得られる．

$$\begin{aligned}
x &= WB^{1/2}r = WB^{1/2}(U_1s_1+U_2s_2)\\
&= WB^{1/2}U_1(U_1^{\mathrm{T}}H_{(r)}^{\mathrm{T}}R^{-1}H_{(r)}U_1)^{-1}U_1^{\mathrm{T}}H_{(r)}^{\mathrm{T}}R^{-1}z\\
&\quad + WB^{1/2}U_2(U_2^{\mathrm{T}}G_{(r)}^{\mathrm{T}}M_y^{-1}G_{(r)}U_2)^{-1}U_2^{\mathrm{T}}G_{(r)}^{\mathrm{T}}M_y^{-1}y\\
&= WB^{1/2}U_1(U_1^{\mathrm{T}}B^{1/2}W^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}R^{-1}HWB^{1/2}U_1)^{-1}U_1^{\mathrm{T}}B^{1/2}W^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}R^{-1}z\\
&\quad + WB^{1/2}U_2(U_2^{\mathrm{T}}B^{1/2}W^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}M_y^{-1}GWB^{1/2}U_2)^{-1}U_2^{\mathrm{T}}B^{1/2}W^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}M_y^{-1}y
\end{aligned} \tag{43}$$

手法のイメージを図-1 に示す．このように事前情報と観測情報の質と量に応じて未知量空間を２つに分け，一つの空間は事前情報だけから，もう一つの空間は観測情報だけから求めている．図中０次元とあるのは未知量空間での点を表し，推定値がユニークに決められることを意味する．

3.2 チホノフの適切化の解釈と適用

事前情報を与える空間への写像 G としては様々なものが考えられる．ここではチホノフの適切化（Tikhonov regularization）[11]の解釈から，本論文で展開した理論に基づき滑らかさだけを導入する定式化を示す．一般に正則化を考慮した目的関数は以下の形で与えられる．

$$J=\left|z-H(p(t))\right|+L(p(t)) \tag{44}$$

ここで，t は位置を表す変数である．第１項は観測量 z と計算量 $H(p(t))$ の食い違い量を，第２項は正則化項（ペナルティー項あるいは安定化のための項），であり，本論文では事前情報に相当する．正則化項としては，

$$|p|,\quad |p-p_0|,\quad \left|\frac{\partial p}{\partial t}\right|,\quad \left|\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right|,\qquad \text{etc.} \tag{45}$$

などが考えられる．正則化項として $|p\text{-}p_0|$ を採用し，離散

化した空間で考え，ベクトル空間の距離をL2ノルムで定義すると式(14)で示した目的関数と本質的に同じになる．正則項として微分値に注目するとやや異なる定式化が得られる．微分値について離散化し差分近似を行うと以下の式が得られる．

$$\frac{\partial p}{\partial t} \cong \frac{p_k - p_{k-1}}{\Delta t} \tag{46}$$

すなわち，差分に対して正則化の処理をしていることになる．そこで，差分に関する確率ベクトルを考え次のように事前情報を定義する．

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{Dx} \tag{47}$$

ここで，

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

事前情報 $\boldsymbol{y}$ に関する共分散行列として以下の式を得る．

$$\boldsymbol{M}_y = E[\boldsymbol{yy}^T] = \boldsymbol{D}E[\boldsymbol{xx}^T]\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{DM}^{(0)}{}_x\boldsymbol{D}^T \tag{49}$$

ここで，$\boldsymbol{M}_y$ は差分に関する共分散行列であり，$\boldsymbol{M}^{(0)}{}_x$ は未知パラメタ $\boldsymbol{x}$ そのものに対して直接定義する共分散行列である．未知パラメタ $\boldsymbol{x}$ を直接用いる定式化では「はじめに」で述べたように事前情報の期待値の影響を大きく受ける場合があるため，その差分 $\boldsymbol{y}$ を事前情報として与える．その場合の未知パラメタ $\boldsymbol{x}$ の共分散行列 $\boldsymbol{M}^{(1)}{}_x$ は式(38)(49)より次のように変形される．

$$\boldsymbol{M}^{(1)}{}_x = (\boldsymbol{D}^T(\boldsymbol{DM}^{(0)}{}_x\boldsymbol{D}^T)^{-1}\boldsymbol{D})^{-1} \tag{50}$$

つまり，意図的に事前情報の共分散行列のランクを下げていることになる．

未知パラメタ $\boldsymbol{x}$ の期待値が場所によらず均質と考える，すなわち $\boldsymbol{y}$ を0.0とすると逆解析のための目的関数は次式で定義される．

$$J = \frac{1}{2}(z - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}))^T \boldsymbol{R}^{-1}(z - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}^T(\boldsymbol{DM}^{(0)}{}_x\boldsymbol{D}^T)^{-1}\boldsymbol{Dx} \tag{51}$$

この問題設定に対して，式(43)を用いて基底変換して解を求めることができる．ただし，$\boldsymbol{y}$ が0.0であることから式(43)の最終式の第1項だけが残る．

5. まとめ

本研究では確率場について，基底変換を行うことによって合理的に逆解析を行う方法について検討した．主な結果は次のようにまとめられる．

1) 一般化逆行列の考え方を確率論から解釈し，確率場の逆解析手法を示した．提案手法はSSFEMなどに使われているK-L展開と密接な関係を持つ．
2) 事前情報の与え方について拡張し，未知量空間と関連をもっている別の空間に対して事前情報を与えることができる，拡張一般化逆行列の考え方を示した．
3) 事前情報を与える空間の例として未知量の差分に関する空間を考え，滑らかさだけを事前情報とした定式化を示した．

本論文では例題を示すことができなかったが，改めて適用例を報告したい．事前情報を与える空間としては様々なものが考えられ，応答値の空間に事前情報を与える定式化も可能である．また，確率的な応答予測も行い，観測情報を与えることにより信頼幅の向上も示すことができる．これらについても改めて論文にまとめたい．

参考文献

1) 土木学会原子力土木委員会·地盤安定性評価部会：上下動を考慮した原子力発電所基礎地盤及び周辺斜面の地震時安定性評価，土木学会論文集，（投稿中）
2) 国際標準化機構（ISO）：ISO2394, General principles on reliability for structures
3) CEN: Eurocode 1, Basis of design and actions on structure
4) Ghanem, R.G. and Spanos, P.D. : Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach, Springer-Verlag NY, 1991.
5) 本田利器，スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析，土木学会論文集 No.689/I-57, pp.321-331, 2001
6) 中川英則，堀宗朗：スペクトル確率有限要素法を用いた横ずれ断層運動に伴う地表地盤の変形に関する研究，第11回日本地震工学シンポジウム，pp.937-940，2002
7) 岡本良夫：逆問題とその解き方，オーム社，1992.
8) 中川徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，1982
9) 吉田郁政：未知パラメタ空間の基底変換を用いた逆解析，土木学会論文集，No.577/I-41, pp.205-215, 1997
10) 吉田郁政，佐々木卓也，星谷勝：逆解析によって推定されたモデルの信頼度と最適観測点位置，応用力学論文集，pp.109-116, 1998
11) 久保司郎：逆問題，培風館，1992
12) 小沢一雅：情報理論の基礎，国民科学社，1980.
13) 有本卓：確率・情報・エントロピー，森北出版，1980.

（2004年4月16日　受付）