

弾性波動場におけるラメ係数同定に対する随伴数値解法

Adjoint Numerical Method for the Identification of the Lamé Coefficients in Linear Elastic Wave Field

代田健二*

Kenji SHIROTA

*非会員 理博 茨城大学助手 理学部数理科学科 (〒310-8512 茨城県水戸市文京 2-1-1)

The purpose of this research is to propose a numerical method for the problem of the identification of the elastic coefficients in linear elastic wave field: Determine unknown Young's modulus and Poisson's ratio from the knowledge of the plural sets of simultaneous displacement and traction on the surface of an isotropic, linearly elastic bounded body. The elastic body is supposed to be a state of the plane strain. We assume that the density is known in the elastic body. In this research, the Lamé coefficients are identified instead of determining unknown Young's modulus and Poisson's ratio. To determine the unknown Lamé coefficients numerically, we adopt the adjoint numerical method. The minimizing problem with some constraints is introduced by using variational method. To find the minimum, a technique based on the projected gradient method is proposed. By numerical experiment, we discuss about the efficacy of our algorithm.

Key Words : Coefficient identification, linear elastic wave field, adjoint numerical method

1. はじめに

本稿では、弾性波動場における係数同定問題について考察する。ここで弾性体は、線形かつ等方性であるものを対象とする。取り扱う弾性問題としては3次元問題が本質的であるが、ここでは2次元問題である平面ひずみ問題について考える。

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を、平面ひずみ状態にある有界な3次元弾性体の断面とする。 Ω の境界 $\partial\Omega$ は、滑らかであると仮定する。 u_i ($i = 1, 2$) を x_i 方向への変位 [m], ε_{ij} をひずみテンソルの ij 成分, σ_{ij} を応力テンソルの ij 成分とする。このとき変位-ひずみの関係式、応力-ひずみの関係式は、それぞれ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

となる。ここで ' $,j$ ' は $\partial/\partial x_j$ を意味し、 E はヤング率 [Pa], ν はポアソン比である。また、重複添字は総和を表す。支配方程式は、次の波動方程式が成り立つとする：

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} \quad \text{in } \Omega \times (0, T]. \quad (1)$$

' $\cdot$ ' は $\partial/\partial t$ を意味し、 ρ は密度 [kg/m³], $T > 0$ は観測時間の長さ [s] である。ヤング率 E , ポアソン比 ν は場所にもみ依存する有界な可積分関数であるとし、

Ω 内のすべての点 $\mathbf{x}$ に対して

$$0 < C_E^{(1)} \leq E(\mathbf{x}) \leq C_E^{(2)},$$

$$0 < C_\nu^{(1)} \leq \nu(\mathbf{x}) \leq C_\nu^{(2)} < \frac{1}{2} \quad (2)$$

を満たすものとする。ただし $C_E^{(i)}, C_\nu^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は、与えられた正定数である。また初期値 $u_i(\cdot, 0)|_\Omega = f_i$, 初速度 $\dot{u}_i(\cdot, 0)|_\Omega = g_i$, 密度 ρ は既知であると仮定する。

弾性波動場における逆問題については、様々な問題が考察されており⁵⁾、それらに対する数値解法についても研究されている。ここでは、次の係数同定問題について考える：与えられた N 組の表面変位 $\bar{u}_i^{(m)}$, 表面力 $\bar{S}_i^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, N$) よりヤング率 $E(\mathbf{x})$, ポアソン比 $\nu(\mathbf{x})$ を同定せよ (図1)。

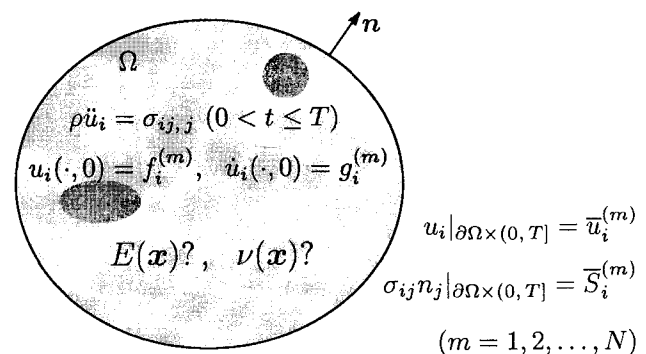


図-1 係数同定逆問題

本研究の目的は、この係数同定問題に対する数値解

* Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

法を考察することである。しかし、応力-ひずみの関係式がポアソン比に関して非線形であることから、それを直接同定することには困難が予想される。ここでラメの弾性係数 λ, μ とヤング率、ポアソン比の間には、次の関係式が成り立つ：

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (3)$$

この関係式により、ラメの弾性係数を同定することと、ヤング率、ポアソン比を同定することは同値であることがわかる。また応力-ひずみの関係式は、

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}$$

となり、ラメ係数 λ, μ の各々に関して線形になっている。以上のことより、ヤング率、ポアソン比の代わりに、ラメ係数に対する数値解法を考察することにする。なお λ, μ は、次の条件を満たしている：

$$\begin{aligned} 0 < C_\lambda^{(1)} \leq \lambda(\mathbf{x}) \leq C_\lambda^{(2)}, \\ 0 < C_\mu^{(1)} \leq \mu(\mathbf{x}) \leq C_\mu^{(2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $C_\lambda^{(i)}, C_\mu^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は、(2) で与えられた $C_E^{(i)}, C_\nu^{(i)}$ ($i = 1, 2$) と関係式

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5)$$

により定められる定数である。なお式 (4) における λ の正值性は、通常の線形弾性論における仮定³⁾より強い条件であるが、ヤング率、ポアソン比に対する条件 (2) から自然に導き出される。

ラメ係数同定問題に対する数値解法として、随伴数値解法⁸⁾を採用する。この解法は、制御理論において主に境界値逆問題に対して用いられている⁴⁾。本研究では、ラメ係数同定問題への適用を試みる。元の問題の解を、2変数汎関数に対する最小化問題の解により同定する。最小化関数を同定する方法としては、射影勾配法を基礎とした方法を提案する。また数値実験により、本手法の有効性を検討する。

2. 随伴数値解法によるラメ係数同定

2.1 最小化問題と射影勾配法

$u_i^{(m)}[\lambda, \mu]$ を、ラメ係数 λ, μ と表面変位 $\bar{u}_i^{(m)}$ が与えられたときの (1) の解とする。また $\epsilon_{ij}^{(m)}[\lambda, \mu]$, $\sigma_{ij}^{(m)}[\lambda, \mu]$ を、それぞれ $u_i^{(m)}[\lambda, \mu]$ により導出されるひずみテンソル、応力テンソルの第 ij 成分とする。このとき未知係数 λ, μ を、次の制約条件付き最小化問題を解くことにより同定する：次に定義する汎関数 J を最小にする (λ, μ) ($C_\lambda^{(1)} \leq \lambda \leq C_\lambda^{(2)}, C_\mu^{(1)} \leq \mu \leq C_\mu^{(2)}$) を見つけよ。

$$J(\lambda, \mu) = \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} |S_i^{(m)}[\lambda, \mu] - \bar{S}_i^{(m)}|^2 ds dt.$$

ここで $S_i^{(m)}[\lambda, \mu] = \sigma_{ij}^{(m)}[\lambda, \mu] n_j|_{\partial\Omega}$ であり、 $\bar{\eta}$ は代表的な速さ [m/s] である。 $J(\lambda, \mu) = 0$ となり、かつ (4) を満たす (λ, μ) は、元の逆問題の解になる。

制約条件付き最小化問題に対する数値解法として、本研究では射影勾配法^{6), 7)}を採用する： $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\begin{pmatrix} \lambda_{l+1} \\ \mu_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_l \\ \mu_l \end{pmatrix} - \alpha_l \begin{pmatrix} d_{\lambda, l} \\ d_{\mu, l} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

ここで $(d_{\lambda, l}, d_{\mu, l})^T$ は探索方向であり、

$$\Lambda_l(\mathbf{x}) = \lambda_l(\mathbf{x}) - J_\lambda[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x}),$$

$$M_l(\mathbf{x}) = \mu_l(\mathbf{x}) - J_\mu[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x})$$

としたとき

$$d_{\lambda, l}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \lambda_l(\mathbf{x}) - C_\lambda^{(1)} & (\Lambda_l(\mathbf{x}) < C_\lambda^{(1)}) \\ J_\lambda[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x}) & (C_\lambda^{(1)} \leq \Lambda_l(\mathbf{x}) \leq C_\lambda^{(2)}) \\ \lambda_l(\mathbf{x}) - C_\lambda^{(2)} & (\Lambda_l(\mathbf{x}) > C_\lambda^{(2)}) \end{cases},$$

$$d_{\mu, l}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mu_l(\mathbf{x}) - C_\mu^{(1)} & (M_l(\mathbf{x}) < C_\mu^{(1)}) \\ J_\mu[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x}) & (C_\mu^{(1)} \leq M_l(\mathbf{x}) \leq C_\mu^{(2)}) \\ \mu_l(\mathbf{x}) - C_\mu^{(2)} & (M_l(\mathbf{x}) > C_\mu^{(2)}) \end{cases}$$

により決定される。 $J_\lambda[\lambda, \mu], J_\mu[\lambda, \mu]$ は、それぞれ λ 方向、 μ 方向に対する汎関数 J の第一変分

$$J(\lambda + \delta\lambda, \mu) - J(\lambda, \mu) =$$

$$\int_{\Omega} J_\lambda[\lambda, \mu] \delta\lambda dx + o(\|\delta\lambda\|),$$

$$J(\lambda, \mu + \delta\mu) - J(\lambda, \mu) =$$

$$\int_{\Omega} J_\mu[\lambda, \mu] \delta\mu dx + o(\|\delta\mu\|)$$

である。ここで $\|f\| := \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ とする。また α_l は $0 < \alpha_l \leq 1$ を満たす探索の幅である。

射影勾配法を用いるには、第一変分 $J_\lambda[\lambda, \mu], J_\mu[\lambda, \mu]$ の具体的な導出が必要になる。

2.2 方向微分と探索方向決定

第一変分を具体的に導出するために、方向微分

$$J_{W, \lambda}[\lambda, \mu] h_\lambda := \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{J(\lambda + \zeta h_\lambda, \mu) - J(\lambda, \mu)}{\zeta},$$

$$J_{W, \mu}[\lambda, \mu] h_\mu := \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{J(\lambda, \mu + \zeta h_\mu) - J(\lambda, \mu)}{\zeta}$$

を求める。方向微分 $J_{W, \lambda}[\lambda, \mu] h_\lambda, J_{W, \mu}[\lambda, \mu] h_\mu$ は、それぞれ h_λ, h_μ に関して連続である場合、

$$J_{W, \lambda}[\lambda, \mu] h_\lambda = \int_{\Omega} J_\lambda[\lambda, \mu] h_\lambda dx,$$

$$J_{W, \mu}[\lambda, \mu] h_\mu = \int_{\Omega} J_\mu[\lambda, \mu] h_\mu dx$$

となる。

方向微分 $J_{W,\lambda}[\lambda, \mu]h_\lambda$ を求める. λ, μ を条件 (4) を満たすラメ係数とし, $\zeta \in \mathbf{R}$, 関数 h_λ は $\lambda + \zeta h_\lambda$ が条件 (4) を満たすようにとる. また

$$\begin{aligned}\delta u_i^{(m)} &= u_i^{(m)}[\lambda + \zeta h_\lambda, \mu] - u_i^{(m)}[\lambda, \mu], \\ \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} &= \varepsilon_{ij}^{(m)}[\lambda + \zeta h_\lambda, \mu] - \varepsilon_{ij}^{(m)}[\lambda, \mu], \\ \delta \sigma_{ij}^{(m)} &= \sigma_{ij}^{(m)}[\lambda + \zeta h_\lambda, \mu] - \sigma_{ij}^{(m)}[\lambda, \mu], \\ \delta S_i^{(m)} &= S_i^{(m)}[\lambda + \zeta h_\lambda, \mu] - S_i^{(m)}[\lambda, \mu]\end{aligned}$$

とおく. 簡単な計算により,

$$\begin{aligned}& J(\lambda + \zeta h_\lambda, \mu) - J(\lambda, \mu) \\ &= \frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \int_{\partial\Omega} 2 \left(S_i^{(m)}[\lambda, \mu] - \bar{S}_i^{(m)} \right) \delta S_i^{(m)} ds dt \\ &+ \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt\end{aligned}\quad (7)$$

となる.

方向微分を求めるために, 次の関数を導入する: 関数 $v_i^{(m)}$ を, $t = T$ を初期時刻とする初期値境界値問題

$$\begin{cases} \rho \ddot{v}_i^{(m)} = \hat{\sigma}_{ij,j}^{(m)} & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j}^{(m)} + v_{j,i}^{(m)} \right) & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ \hat{\sigma}_{ij}^{(m)} = 2\mu \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \lambda \hat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ v_i^{(m)} = w_i^{(m)}, \quad \dot{v}_i^{(m)} = 0 & \text{on } \Omega \times \{T\}, \\ v_i^{(m)} = 2 \left(S_i^{(m)}[\lambda, \mu] - \bar{S}_i^{(m)} \right) & \text{on } \partial\Omega \times [0, T) \end{cases}\quad (8)$$

の解の第 i 成分とする. ここで $w_i^{(m)}$ は境界値問題

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij,j}^{(m)} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(w_{i,j}^{(m)} + w_{j,i}^{(m)} \right) & \text{in } \Omega, \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{(m)} = 2\mu \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \lambda \tilde{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} & \text{in } \Omega, \\ w_i^{(m)} = 2 \left(S_i^{(m)}(\cdot, T) - \bar{S}_i^{(m)}(\cdot, T) \right) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}\quad (9)$$

の解の第 i 成分である.

導入した関数 $v_i^{(m)}$ と $\delta \sigma_{ij}^{(m)} n_j|_{\partial\Omega} = \delta S_i^{(m)}$ を用いると, 式 (7) は

$$\begin{aligned}& J(\lambda + \zeta h_\lambda, \mu) - J(\lambda, \mu) \\ &= \frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt \\ &+ \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt\end{aligned}\quad (10)$$

と書ける. 式 (10) 右辺第1項の積分は, ガウスの発散

定理および $\rho \ddot{u}_i^{(m)} = \delta \sigma_{ij,j}^{(m)}$ より

$$\begin{aligned}& \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} v_i^{(m)} \delta \sigma_{ij,j}^{(m)} dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} v_i^{(m)} \rho \ddot{u}_i^{(m)} dx dt\end{aligned}\quad (11)$$

となる. ここで応力-ひずみの関係式を用いると, 各 m について

$$\begin{aligned}\delta \sigma_{ij}^{(m)} &= \zeta h_\lambda \varepsilon_{kk}^{(m)}[\lambda, \mu] \delta_{ij} + \zeta h_\lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \\ &+ 2\mu \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} + \lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \delta_{ij}\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}\delta \sigma_{ij}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} &= \zeta h_\lambda \varepsilon_{kk}^{(m)}[\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \delta_{ij} \\ &+ \zeta h_\lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \delta_{ij} \\ &+ 2\mu \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \delta_{ij} \\ &= \zeta h_\lambda \varepsilon_{kk}^{(m)}[\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} + \zeta h_\lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} \\ &+ 2\mu \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} \delta_{ij} \\ &= \zeta h_\lambda \varepsilon_{kk}^{(m)}[\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} + \zeta h_\lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} \\ &+ \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} \left(2\mu \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \lambda \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} \delta_{ij} \right) \\ &= \zeta h_\lambda \varepsilon_{kk}^{(m)}[\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} + \zeta h_\lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} \\ &+ \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} \hat{\sigma}_{ij}^{(m)}\end{aligned}$$

を得る. 上式を (11) 右辺第1項に代入すると, 次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}& \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt \\ &= \zeta \int_0^T \int_{\Omega} h_\lambda \varepsilon_{kk}^{(m)}[\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dx dt \\ &+ \zeta \int_0^T \int_{\Omega} h_\lambda \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} \hat{\sigma}_{ij}^{(m)} dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i^{(m)} v_i^{(m)} dx dt.\end{aligned}\quad (12)$$

式 (12) の右辺第4項を t に関して部分積分すると, $\delta u_i^{(m)}(\cdot, 0) = 0$, $\delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, 0) = 0$, $v_i^{(m)}(\cdot, T) = w_i^{(m)}$, $\dot{v}_i^{(m)}(\cdot, T) = 0$, $\rho \ddot{v}_i^{(m)} = \hat{\sigma}_{ij,j}^{(m)}$ であることから,

$$\begin{aligned}& \int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i^{(m)} v_i^{(m)} dx dt \\ &= \int_{\Omega} \rho \delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, T) w_i^{(m)} dx + \int_0^T \int_{\Omega} \delta u_i^{(m)} \rho \ddot{v}_i^{(m)} dx dt \\ &= \int_{\Omega} \rho \delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, T) w_i^{(m)} dx + \int_0^T \int_{\Omega} \delta u_i^{(m)} \hat{\sigma}_{ij,j}^{(m)} dx dt.\end{aligned}$$

さらに, 上式右辺第2項にガウスの発散定理を適用す

ると, $\delta u_i^{(m)}|_{\partial\Omega} = 0$ より

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho \delta \ddot{u}_i^{(m)} v_i^{(m)} dx dt \\ = \int_{\Omega} \rho \delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, T) w_i^{(m)} dx \\ - \int_0^T \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} \hat{\sigma}_{ij}^{(m)} dx dt. \end{aligned}$$

よって, (12) より

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt \\ = \zeta \int_0^T \int_{\Omega} h_{\lambda} \varepsilon_{kk}^{(m)} [\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dx dt \\ + \int_{\Omega} \rho \delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, T) w_i^{(m)} dx \\ + \zeta \int_0^T \int_{\Omega} h_{\lambda} \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dx dt \end{aligned}$$

が得られる. したがって, (10) から

$$\begin{aligned} J(\lambda + \zeta h_{\lambda}, \mu) - J(\lambda, \mu) \\ = \zeta \int_{\Omega} h_{\lambda} \left(\frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \varepsilon_{kk}^{(m)} [\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dt \right) dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \int_{\Omega} \rho \delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, T) w_i^{(m)} dx \\ + \zeta \frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \int_{\Omega} h_{\lambda} \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dx dt \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \frac{J(\lambda + \zeta h_{\lambda}, \mu) - J(\lambda, \mu)}{\zeta} \\ = \int_{\Omega} h_{\lambda} \left(\frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \varepsilon_{kk}^{(m)} [\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dt \right) dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \frac{1}{\zeta} \int_{\Omega} \rho \delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, T) w_i^{(m)} dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \int_{\Omega} h_{\lambda} \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dx dt \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \frac{1}{\zeta} \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\zeta} \int_{\Omega} \rho \delta \dot{u}_i^{(m)}(\cdot, T) w_i^{(m)} dx \right\} \\ = \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i^{(m)}[h_{\lambda}, 0](\cdot, T) w_i^{(m)} dx, \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} h_{\lambda} \delta \varepsilon_{kk}^{(m)} \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dx dt = 0, \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\zeta} \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt \right\} = 0 \end{aligned}$$

となる. 関数 $U_i^{(m)}[p, q]$ は, 初期値境界値問題

$$\begin{cases} \rho \ddot{U}_i^{(m)} = \check{\sigma}_{ij,j}^{(m)} + F_i^{(m)}[p, q] & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \check{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^{(m)} + U_{j,i}^{(m)}) & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \check{\sigma}_{ij}^{(m)} = 2\mu \check{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \lambda \varepsilon_{kk}^{(m)} \delta_{ij} & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ U_i^{(m)} = 0, \quad \dot{U}_i^{(m)} = 0 & \text{on } \Omega \times \{0\}, \\ U_i^{(m)} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (13)$$

の解の第 i 成分である. ただし

$$F_i^{(m)}[p, q] := \tau_{ij,j}^{(m)}[p, q]$$

であり,

$$\tau_{ij}^{(m)}[p, q] = 2q \varepsilon_{ij}^{(m)}[\lambda, \mu] + p \varepsilon_{kk}^{(m)}[\lambda, \mu] \delta_{ij}$$

とする. したがって, 方向微分は次の通りになる:

$$\begin{aligned} J_{W,\lambda}[\lambda, \mu] h_{\lambda} \\ = \int_{\Omega} h_{\lambda} \left(\frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \varepsilon_{kk}^{(m)} [\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dt \right) dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i^{(m)}[h_{\lambda}, 0](\cdot, T) w_i^{(m)} dx. \end{aligned}$$

同様にして, μ 方向の方向微分 $J_{W,\mu}[\lambda, \mu] h_{\mu}$ は次のとおりに求められる:

$$\begin{aligned} J_{W,\mu}[\lambda, \mu] h_{\mu} \\ = \int_{\Omega} h_{\mu} \left(\frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T 2\varepsilon_{ij}^{(m)} [\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} dt \right) dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i^{(m)}[0, h_{\mu}](\cdot, T) w_i^{(m)} dx. \end{aligned}$$

第一変分を導出するためには, 方向微分の第二項について更に解析を進める必要があるが, これ以上は困難である. そこで第一変分の近似として, 次の関数を導入する:

$$\bar{J}_{\lambda}[\lambda, \mu] = \frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T \varepsilon_{kk}^{(m)} [\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{pp}^{(m)} dt, \quad (14)$$

$$\bar{J}_{\mu}[\lambda, \mu] = \frac{\bar{\eta}}{N} \int_0^T 2\varepsilon_{ij}^{(m)} [\lambda, \mu] \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} dt. \quad (15)$$

探索方向は, 導入した関数を用いて定める:

$$\bar{\Lambda}_l(\mathbf{x}) = \lambda_l(\mathbf{x}) - \bar{J}_{\lambda}[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x}),$$

$$\bar{\mathbf{M}}_l(\mathbf{x}) = \mu_l(\mathbf{x}) - \bar{J}_{\mu}[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x})$$

とする. このとき

$$d_{\lambda,l}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \lambda_l(\mathbf{x}) - C_{\lambda}^{(1)} & (\bar{\Lambda}_l(\mathbf{x}) < C_{\lambda}^{(1)}) \\ \bar{J}_{\lambda}[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x}) & (C_{\lambda}^{(1)} \leq \bar{\Lambda}_l(\mathbf{x}) \leq C_{\lambda}^{(2)}) \\ \lambda_l(\mathbf{x}) - C_{\lambda}^{(2)} & (\bar{\Lambda}_l(\mathbf{x}) > C_{\lambda}^{(2)}) \end{cases}, \quad (16)$$

$$d_{\mu,l}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mu_l(\mathbf{x}) - C_{\mu}^{(1)} & (\bar{\mathbf{M}}_l(\mathbf{x}) < C_{\mu}^{(1)}) \\ \bar{J}_{\mu}[\lambda_l, \mu_l](\mathbf{x}) & (C_{\mu}^{(1)} \leq \bar{\mathbf{M}}_l(\mathbf{x}) \leq C_{\mu}^{(2)}) \\ \mu_l(\mathbf{x}) - C_{\mu}^{(2)} & (\bar{\mathbf{M}}_l(\mathbf{x}) > C_{\mu}^{(2)}) \end{cases}. \quad (17)$$

この探索方向を用いた最小化過程は、正確には射影勾配法ではない。しかし初期係数を、制約条件 (4) を満たすように選べば、すべての (λ_l, μ_l) が条件を満たすことを保証できる。

2.3 係数同定アルゴリズム

反復過程 (6) により係数関数を更新するには、探索の幅 α_l ($0 < \alpha_l \leq 1$) を各ステップ毎に決定する必要がある。ここでは、アルミホの基準¹⁾を用いることにする。探索に必要なパラメータ ξ ($0 < \xi < 0.5$)、 γ ($0 < \gamma < 1$) は与えられているとする。 $J_W[\lambda, \mu]\mathbf{h}$ は、 (λ, μ) 平面での $\mathbf{h}$ 方向への方向微分

$$J_W[\lambda, \mu]\mathbf{h} := \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{J(\lambda + \zeta h_\lambda, \mu + \zeta h_\mu) - J(\lambda, \mu)}{\zeta}$$

を表す。ここで $\mathbf{h} = (h_\lambda, h_\mu)^T$ である。また $\mathbf{d}_l := (d_{\lambda,l}, d_{\mu,l})^T$ とする。

探索幅決定アルゴリズム (アルミホの基準)

- (i) $J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l$ が十分小であるならば、終了する。
そうでなければ次のステップへ進む。
- (ii) $\beta_0 := 1$ 。
- (iii) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\begin{aligned} J(\lambda_l - \beta_n d_{\lambda,l}, \mu_l - \beta_n d_{\mu,l}) \\ \leq J(\lambda_l, \mu_l) - \xi \beta_n J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l \end{aligned}$$

ならば $\alpha_l := \beta_n$ 。そうでなければ $\beta_{n+1} := \gamma \beta_n$ 。

このアルゴリズムを用いるには、方向微分 $J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l$ を求める必要がある。ここで

$J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l = J_{W,\lambda}[\lambda_l, \mu_l]d_{\lambda,l} + J_{W,\mu}[\lambda_l, \mu_l]d_{\mu,l}$ となるので、

$$\begin{aligned} J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l \\ = \int_{\Omega} \bar{J}_\lambda[\lambda_l, \mu_l] d_{\lambda,l} dx + \int_{\Omega} \bar{J}_\mu[\lambda_l, \mu_l] d_{\mu,l} dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i^{(m)}[d_{\lambda,l}, 0](\cdot, T) w_i^{(m)} dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i^{(m)}[0, d_{\mu,l}](\cdot, T) w_i^{(m)} dx \end{aligned}$$

である。偏微分方程式の重ね合わせの原理より、

$$U_i^{(m)}[d_{\lambda,l}, 0] + U_i^{(m)}[0, d_{\mu,l}] = U_i^{(m)}[d_{\lambda,l}, d_{\mu,l}]$$

となることから、

$$\begin{aligned} J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l \\ = \int_{\Omega} \bar{J}_\lambda[\lambda_l, \mu_l] d_{\lambda,l} dx + \int_{\Omega} \bar{J}_\mu[\lambda_l, \mu_l] d_{\mu,l} dx \\ + \frac{\bar{\eta}}{N} \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i^{(m)}[d_{\lambda,l}, d_{\mu,l}](\cdot, T) w_i^{(m)} dx \end{aligned}$$

となる。すなわち方向微分 $J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l$ を求めるには、外力項 $F_i[d_{\lambda,l}, d_{\mu,l}]$ を持つ初期値境界値問題 (13) を N 個解けばよい。

以上をまとめると、係数同定アルゴリズムは次の通りになる：

ラム係数同定アルゴリズム

1. 条件 (4) を満たす初期係数 λ_0, μ_0 を与える。
2. $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して、
 - (a) 表面変位 $\bar{u}_i^{(m)}$ を境界値として持つ弾性波動方程式 (1) を解き、 $\varepsilon_{ij}^{(m)}[\lambda_l, \mu_l]$ と $S_i^{(m)}[\lambda_l, \mu_l]$ を求める ($m = 1, 2, \dots, N$)。
 - (b) 境界値問題 (9) を解き、 $w_i^{(m)}$ を求める ($m = 1, 2, \dots, N$)。
 - (c) 初期値境界値問題 (8) を解き、 $\hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)}$ を求める ($m = 1, 2, \dots, N$)。
 - (d) 関数 $\bar{J}_\lambda[\lambda_l, \mu_l]$, $\bar{J}_\mu[\lambda_l, \mu_l]$ を、(14), (15) により計算する。
 - (e) (16), (17) により探索方向を決定する。
 - (f) 外力項 $F_i^{(m)}[d_{\lambda,l}, d_{\mu,l}]$ を持つ初期値境界値問題 (13) を解き、 $U_i^{(m)}[d_{\lambda,l}, d_{\mu,l}]$ を求める ($m = 1, 2, \dots, N$)。
 - (g) 方向微分 $J_W[\lambda_l, \mu_l]\mathbf{d}_l$ を求める。
 - (h) 探索幅決定アルゴリズムにより α_l を求める。
 - (i) 係数を (6) により更新する。

3. 数値実験

同定アルゴリズムを用いた数値例を示す。ここでは、ラム係数が滑らかな関数である場合と不連続な関数である場合について数値実験を行う。前章で方向微分を導出した際に、ガウスの発散定理を用いた。この定理は、理論的には係数関数に一定の滑らかさを要求する³⁾。そのため導出した方向微分は、係数関数が滑らかな場合に理論的正当性が保証される。まず係数関数が滑らかな場合についてアルゴリズムを適用し、その有効性を検証する。また不連続な関数についても数値実験を行い、実用問題への適用可能性を検討する。

3.1 計算例 1 (ラム係数が滑らかな関数である場合)

領域 Ω は原点を中心とする半径 $L = 1$ [m] の円とし、密度 $\rho = 10.0 \times 10^3$ [kg/m³] とする。真のヤング率 [Pa]、ポアソン比は、それぞれ

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= (0.25e^{-4|\mathbf{x}|^2} + 2.0) \times 10^{11}, \\ \nu(\mathbf{x}) &= -0.05e^{-2|\mathbf{x}|^2} + 0.3 \end{aligned}$$

とする。ここで $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ である。このとき真のラム係数 λ, μ は、関係式 (5) により導き出す (図 2, 図 3)。

初期変位 $f_i^{(m)} = 0.0$ 、初期速度 $g_i^{(m)} = 0.0$ とする。定数は、 $C_E^{(1)} = 1.90 \times 10^{11}$, $C_E^{(2)} = 2.35 \times 10^{11}$, $C_\nu^{(1)} = 0.29$, $C_\nu^{(2)} = 0.365$ と与え、 $C_\lambda^{(i)}$, $C_\mu^{(i)}$ ($i = 1, 2$) を計算する。代表的な速さは、境界 $\partial\Omega$ における横波

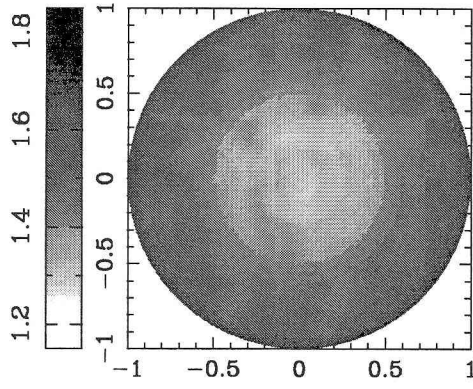


図-2 真のラメ係数 λ (計算例1)

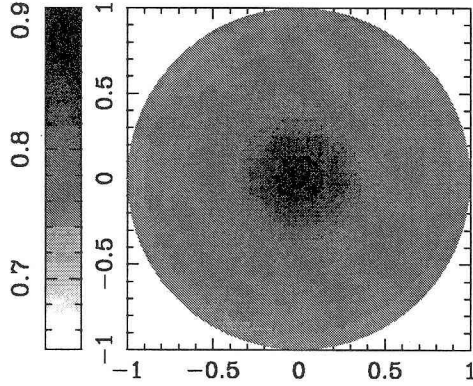


図-3 真のラメ係数 μ (計算例1)

の速さ

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \Big|_{\partial\Omega} = 2.731624 \times 10^3 \text{ [m/s]}.$$

を採用する. 観測時間の長さは,

$$T = \frac{2.6}{\bar{\eta}} = 0.951815 \times 10^{-3} \text{ [s]}$$

とする.

観測境界値は, 表面力

$$\bar{S}_i^{(m)} = \begin{cases} -p(t)n_i & \text{on } \partial\Omega_m \times (0, T] \\ 0.0 & \text{on } (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_m) \times (0, T] \end{cases} \quad (18)$$

を境界値とする線形弾性波動問題を, 空間方向は三角形一次要素 (要素数: 6224), 時間方向はニューマーク法²⁾により近似計算し, その境界上での近似値を採用する. ここで

$$\partial\Omega_m = \left\{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid -\frac{\pi}{50} < \theta - (m-1)\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{50} \right\}$$

であり,

$$p(t) = \begin{cases} \sin\left(12.5\pi \frac{\bar{\eta}t}{L}\right) & \left(0 \leq t \leq \frac{0.16L}{\bar{\eta}}\right) \\ 0.0 & \left(t > \frac{0.16L}{\bar{\eta}}\right) \end{cases}$$

である. 境界データ組数は $N = 3$ とする.

初期係数関数を $\lambda_0 = \lambda|_{\partial\Omega}$, $\mu_0 = \mu|_{\partial\Omega}$ としたとき, 200 ステップ目の同定結果は図4, 図5のとおりである. また相対誤差分布は, それぞれ図6, 図7のとおりである.

λ に対する相対誤差の最大値は 10.91%, μ に対する相対誤差の最大値は 9.07% である. これらの結果が示すとおり, 分布については一定の精度で同定することができたものの, 値については不十分であった.

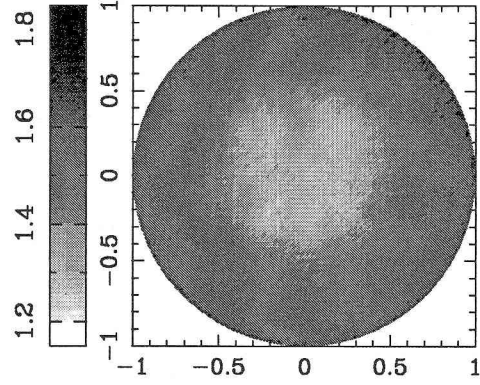


図-4 同定結果 (ラメ係数 λ , 200 ステップ, 計算例1)

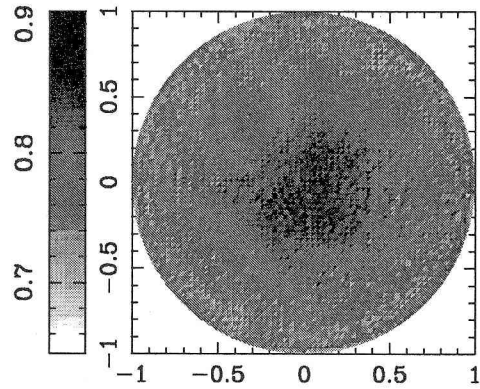


図-5 同定結果 (ラメ係数 μ , 200 ステップ, 計算例1)

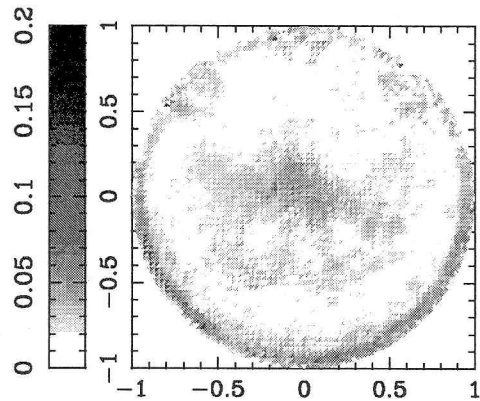


図-6 相対誤差分布 (ラメ係数 λ , 計算例1)

各ステップにおける無次元化された汎関数値 $J(\lambda_l, \mu_l)/(\rho^2 \bar{\eta}^4 L^2)$ のグラフは, 図8の通りである. この図から分かるとおり, 推定係数関数の収束は遅い. このことは, 同定アルゴリズムが基礎としている射影勾配法が, 一般に収束の遅い方法であることが原因と考えられる. 同定精度を向上させるため, より収束の速

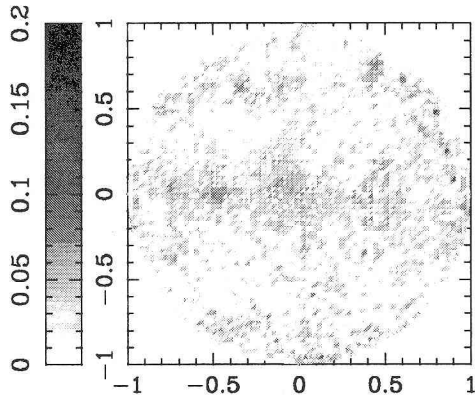


図-7 相対誤差分布 (ラメ係数 μ , 計算例 1)

い方法の適用を試みる必要がある。また探索方向を決定する際に、方向微分の一部のみを用いたことも同定精度に影響を与えている可能性がある。探索方向決定に用いなかった項について、更に理論解析を行う必要がある。

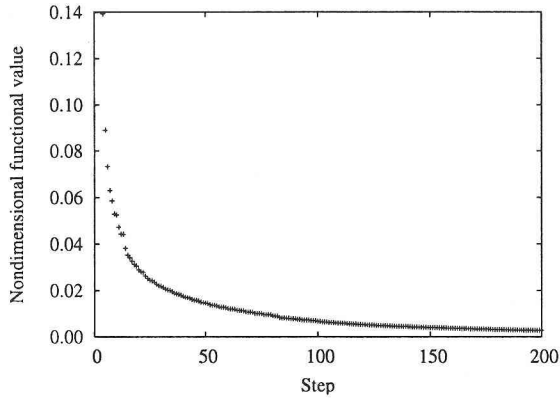


図-8 汎関数値 $J(\lambda_l, \mu_l)/(\rho^2 \bar{\eta}^4 L^2)$

3.2 計算例 2 (ラメ係数が不連続な関数である場合)

領域 Ω , 密度 ρ は, 計算例 1 と同じものとする。真のヤング率 [Pa], ポアソン比は, それぞれ

$$E(\mathbf{x}) := \begin{cases} 2.0 \times 10^{11} & (0 \leq |\mathbf{x}|_{\infty} < 0.15) \\ 1.75 \times 10^{11} & (\text{その他}) \end{cases},$$

$$\nu(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0.3 & (0 \leq |\mathbf{x}|_{\infty} < 0.15) \\ 0.35 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする。ここで $|\mathbf{x}|_{\infty} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ である。このとき真のラメ係数 λ, μ は, それぞれ

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.153846 \times 10^{11} & (0 \leq |\mathbf{x}|_{\infty} < 0.15) \\ 1.512347 \times 10^{11} & (\text{その他}) \end{cases},$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0.769231 \times 10^{11} & (0 \leq |\mathbf{x}|_{\infty} < 0.15) \\ 0.648148 \times 10^{11} & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる (図 9, 図 10)。この例題は, 鋼鉄のような硬い等方性物質が, 銅のような比較的軟らかい等方性物質で覆われていることを想定している。

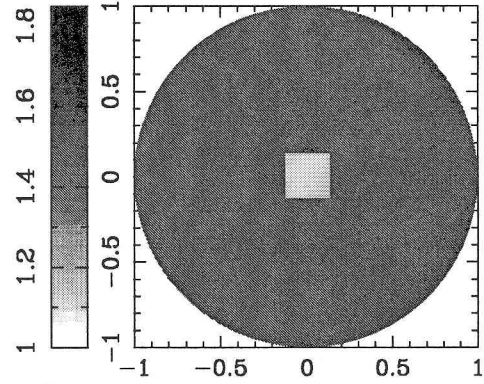


図-9 真のラメ係数 λ (計算例 2)

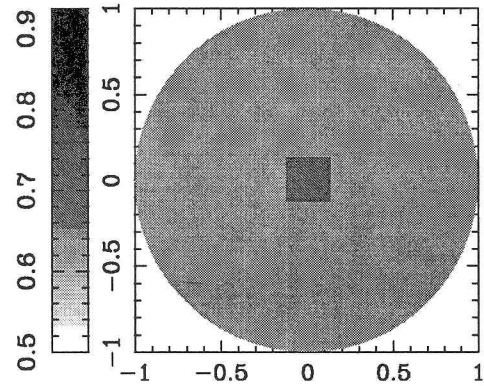


図-10 真のラメ係数 μ (計算例 2)

初期変位 $f_i^{(m)} = 0.0$, 初期速度 $g_i^{(m)} = 0.0$ とする。定数は, $C_E^{(1)} = 1.65 \times 10^{11}$, $C_E^{(2)} = 2.1 \times 10^{11}$, $C_\nu^{(1)} = 0.25$, $C_\nu^{(2)} = 0.4$ と与え, $C_\lambda^{(i)}, C_\mu^{(i)}$ ($i = 1, 2$) を計算する。代表的な速さは, 境界 $\partial\Omega$ における横波の速さ $\bar{\eta} = 0.648148 \times 10^3$ [m/s] を採用する。観測時間の長さは, $T = 4.011429 \times 10^{-3}$ [s] とする。

観測境界値は, 計算例 1 と同じ表面力 (18) を境界値とする線形弾性波動問題を, 空間方向は三角形一次要素 (要素数: 6224), 時間方向はニューマーク法により近似計算し, その境界上での近似値を採用する。境界データ組数は $N = 3$ とする。

初期係数関数を $\lambda_0 = \lambda|_{\partial\Omega} = 1.512347 \times 10^{11}$, $\mu_0 = \mu|_{\partial\Omega} = 0.648148 \times 10^{11}$ としたとき, 200 ステップ目の同定結果は図 11, 図 12 のとおりである。また相対誤差分布は, それぞれ図 13, 図 14 の通りである。 λ に対する相対誤差の最大値は 15.49%, μ に対する相対誤差の最大値は 10.84% である。値については不十分な結果であったものの, 分布は一定精度で同定することができた。これらの結果は, 提案アルゴリズムを改良していくことによって, 実用問題への適用可能性があることを示唆している。

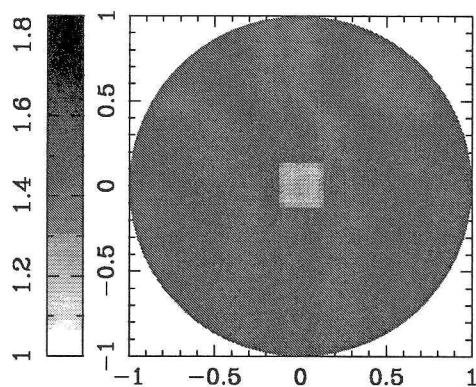


図-11 同定結果 (ラメ係数 λ , 200 ステップ, 計算例2)

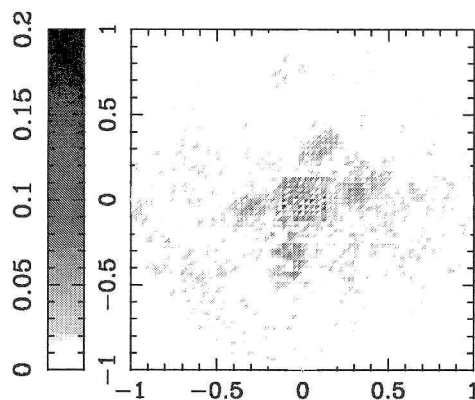


図-14 相対誤差分布 (ラメ係数 μ , 計算例2)

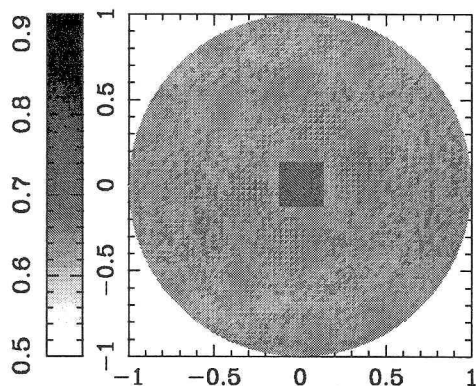


図-12 同定結果 (ラメ係数 μ , 200 ステップ, 計算例2)

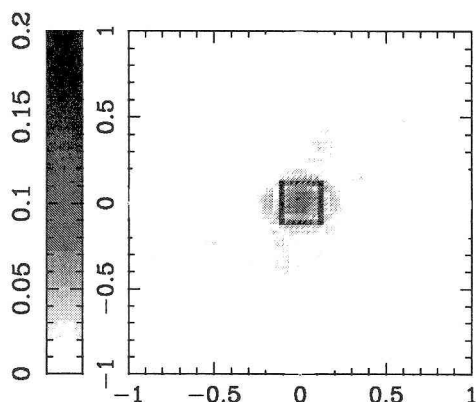


図-13 相対誤差分布 (ラメ係数 λ , 計算例2)

4. まとめ

本研究では、弾性波動場における係数同定問題に対する数値解法について考察した。対象とする弾性体は、線形かつ等方性であるものとした。弾性問題としては、2次元問題である平面ひずみ問題を対象とした。観測値として複数組の表面変位と表面力が与えられていることを仮定し、それら観測値から弾性係数を同定することを考えた。実用上、対象となる係数としてはヤング率、ポアソン比が考えられるが、ポアソン比を直接同定することには困難が予想されるため、それら係数と密接に関係するラメの弾性係数を同定することを考えた。

未知のラメ係数を数値的に同定する方法として、随伴数値解法を採用した。元の問題を、2変数汎関数に対する制約条件付き最小化問題に帰着させ、射影勾配法により解くことを考察した。汎関数の第一変分の導出が困難であることから、その方向微分を求め、一部を探索方向決定に利用した。また導出した手法について数値実験を行ない、未知係数関数の分布については一定の結果を得られることを確認した。しかし係数関数の値については、十分な結果を得ることはできなかった。今後は、反復解法の高速化や探索方向決定手法の研究をさらに進め、同定精度の向上を図る必要がある。

また汎関数の方向微分については、係数関数が滑らかな場合の正当性を保証できるものの、計算例2のように不連続な係数関数については存在を理論的に保証できない。今後は更なる数学解析を行うことにより、不連続な係数関数に対する方向微分の正当性を検証する。

参考文献

- 1) Armijo, L.: Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives, *Pacific J. Math.*, Vol. 16, pp.1-3, 1966.
- 2) Bathe, K.J. and Wilson, E.L.: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- 3) Ciarlet, P.G.: *Three Dimensional Elasticity*, Mathematical Elasticity Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- 4) Lattes, R. and Lions, J.L.: *The Method of Quasi-reversibility: Applications to Partial Differential Equations*, American Elsevier Publishing Company Inc., New-York, 1969.
- 5) 中村玄: 弾性体の逆問題の数学解析, 月刊 地球, Vol.24-2, pp.132-145, 2002.
- 6) Polak, E.: *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 124, Springer-Verlag, New York, 1997.
- 7) 志水清孝: 最適制御の理論と計算法, コロナ社, 1994.
- 8) Shiota, K. and Onishi, K.: Adjoint method for numerical solution of inverse boundary value and coefficient identification problems, *Surveys Math. Indust.*, to appear.

(2004 年 4 月 16 日 受付)