

数値シミュレーションを用いた開口合成法の 欠陥形状再構成能に関する研究

A simulation study on defect shape reconstruction ability of synthetic aperture focusing technique

木本 和志*・松江 剛士**・廣瀬 壮一***

Kazushi KIMOTO, Tsuyoshi MATSUE and Sohichi HIROSE

*正会員 工修 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

**学生会員 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

***正会員 工博 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

Defect shape reconstruction ability of Synthetic Aperture Focusing Technique(SAFT) is investigated by numerical simulations. The numerical model employed is an infinite plate with an embedded cavity. Two types of cavities are considered. One is a circular cylinder and the other is a rectangular slit, both having the dimensions comparable to the incident wave length. Array sources/receivers of anti-plane waves are placed on a plate surface, and time domain scattered waveforms are calculated for every transmitter-receiver combination to simulate data collection by an SH-wave array transducer. Sets of array data simulated thus are fed into SAFT, and the cavities of given shapes are reconstructed. Comparing the resulting SAFT images one another, the effect of transducer position, source width and multiple wave paths on the shape reconstruction ability of SAFT is investigated. It is shown that aperture angle defined in the present study is an important concept to understand the effect of transducer position and of the multiple wave paths. It is also shown that the larger source width degrades SAFT images, but the degradation mechanism considering directivity of the incident field are explained.

Key Words : synthetic aperture focusing technique, aperture angle, SH-wave, shape reconstruction

1. 背景および目的

材料内部や表面に発生する亀裂や空洞などの欠陥を非破壊的に検出, 評価することは工学的に非常に重要である。ここでいう欠陥の評価とは, 欠陥の正確な位置, 大きさ, 形状に関する定量的な情報を得ることを意味し, 検出された欠陥のうち有害なものだけを識別することまでをさす場合もある。超音波法は後者の意味を含めた欠陥評価を行う代表的な非破壊検査法である。超音波法では, 材料内部に超音波を入射し, 欠陥が存在する場合に発生する超音波エコーを検出することで欠陥の検出を行う。さらに進んで欠陥の形状評価を行う場合には, エコーを多点計測し, その結果を何らかの方法で処理し画像化する。本研究でとりあげる開口合成法は, 超音波探傷データを画像化し欠陥像の再構成をおこなう代表的な手法の一つである。この方法では, 計測した波形を振幅を重みとして対応する空間位置にプロットしていくことで, 超音波の反射源すなわち欠陥の像を構成する。開口合成法によって精度のよい欠陥像を得るためには, 多くの計測波形が必要である。しかしながら, 従来の超音波センサー(探触子)を用いた機械的な操作を伴う探傷試験では, 開口合成

を行うために十分なだけのデータを取得するために多くの検査時間を要し, 開口合成法の利用が現実的な選択肢とならない場合も多い。これに対し, 近年発達が著しいアレイ探傷技術を用いれば, ほとんど瞬時に大量かつ正確な探傷データが得られる¹⁾。現在のところアレイ探傷装置は高価であるため, 一般的に利用されているとは言えないが, 今後次第に普及, 発展していくことは確実と思われる。そのため, アレイ探傷データの利用を前提とした, 開口合成法による高精度な欠陥形状再構成手法を確立しておくことは意義があると言える。開口合成法の利点は計算アルゴリズムが単純で, 比較的高速な処理が可能な点である。これは, 検査領域が広い土木構造物においては実用上の大きな利点となる。また, アルゴリズムは計測波形の重ね合わせに過ぎないため, 安定性に関する議論は不要であり, その意味でノイズに強い手法であるとも言える。

一方で, 開口合成法は, 使用する超音波の波長が欠陥寸法に対して十分短くない場合や, 板材における探傷のように開口の制限が厳しい場合には, 欠陥形状の再構成能が著しく低下する。またそのときに, どのような条件に改善の余地が残されているか, あるいは原理的にどこまで精度向上が可能かといった問いについては大抵の場合答えが得られていない。これは, 線形化逆散乱解析法²⁾など

[†] Dedicated to the memory of Prof. Michihiro KITAHARA

と異なり、開口合成法では欠陥形状を表す関数の理論的な意味が不明確であり、諸条件とその結果得られる開口合成像の関係もはっきりとしないことによる。このような問題に関して、開口合成法の理論的背景を補強することはさておき、数値シミュレーションを利用すれば探傷条件や画像化条件が開口合成像に与える影響についてある程度明らかにすることができると考えられる。またそうなれば、探傷条件を計測にかけるときの労力やコスト、結果の精度といった面から最適化することも考えられるようになりその意義は大きい。そこで、本研究ではそのようなそのような取り組みの第一歩として、いくつかの基本的な条件をとりあげ、それらが開口合成法の形状再構成能に与える影響について数値シミュレーションにより検討を行う。具体的には、板材におけるアレイ探傷を想定し、アレイ探触子の配置、素子寸法、板表面での反射波が開口合成像に与える影響を明らかにする。以下では、はじめに開口合成に用いるアレイ探傷データを作成するための数値シミュレーションについて述べる。次に、本研究で用いる多重反射波を利用した開口合成法のアルゴリズムを示す。続いて、シミュレーション波形を用いて行った開口合成の結果を示し、前述の条件と開口合成像の関係を明らかにする。最後に、本研究を通して得られた結論をまとめ今後の課題について述べる。

2. 超音波探傷の数値シミュレーション

2.1 シミュレーションモデル

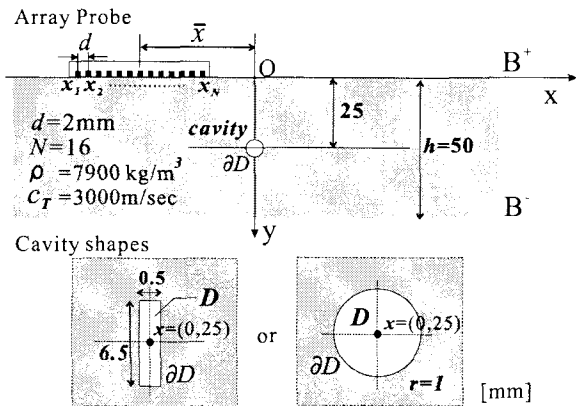


図-1 数値シミュレーションモデル.

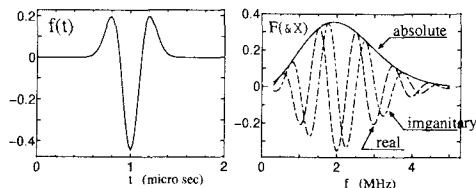


図-2 ソースの時間変化とそのフーリエ変換

図1に、シミュレーションに用いる2次元数値解析モデル

を示す。空洞を有する無限板は等方均質な線形弾性体であるとし、その材料定数は密度 ρ 、横波波速 c_T によって与える。空洞の形状としては矩形スリットと円孔の二種類を考える。図1の下部にはそれらの詳細を示してある。ここではSH波のアレイ探触子による送受信を想定し、送信素子を板表面の分布荷重として、受信素子を素子中心にとった観測点としてモデル化する。アレイ探触子の素子数は N とし、幅 a の各素子は等間隔 d で配置されているものとする。以下では、素子の中心を $\mathbf{x}_i (i=1, \dots, N)$ によって表し、これらを用いて送受信点を示すこととする。また、アレイ探触子の位置はその中心の x 座標、 $\bar{x}$ によって表す。今、点 $\mathbf{x}_i$ に送信点があるときに、点 $\mathbf{x}_j$ において観測される面外変位の時間波形を $u_{ij}(t)$ で表す。全ての (i, j) の組に対して $u_{ij}(t)$ を計算し、その結果得られる $\{u_{ij}(t)|i, j=1, \dots, N\}$ をアレイ探傷データと呼ぶ。以下のシミュレーションでは、素子間隔、素子寸法をそれぞれ $d=2\text{mm}$ 、 $N=16$ とし、空洞寸法や板厚の具体的な数値は図1に示したものをを用いる。また、探触子位置 $\bar{x}$ および素子幅 a はシミュレーション結果を示す際にその都度示すものとする。

2.2 定式化と数値解析手法

周波数域における2次元面外波動場の支配方程式は次のヘルムホルツ方程式で与えられる。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, \omega) + k_T^2 u(\mathbf{x}, \omega) = -\mu^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) F(\omega). \quad (1)$$

ここに、 k_T は横波波数、 ω は角周波数、 μ はせん断剛性を表す。また、右辺の $F(\omega)$ は波源の時間変化 $f(t)$ をフーリエ変換したものである。ただし、式(1)では簡単のため送信素子の幅を無視し、 $\mathbf{x}_i$ に2次元空間における点波源がある場合を扱っている。素子が有限な幅をもつ場合の解析方法は後述する。板の上下面 $B^+ \cup B^-$ および空洞境界 ∂D では次の面外方向表面力フリーの条件が満たされるものとする。

$$t^n(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (\mathbf{x} \in B^+ \cup B^- \cup \partial D) \quad (2)$$

求めるべき、 $u_{ij}(t)$ は式(1),(2)で表される境界値問題を解き、その解 $u(\mathbf{x}_j, \omega)$ を次のようにフーリエ変換することによって得られる。

$$u_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) u(\mathbf{x}_j, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3)$$

以下の解析では図2に示した、中心周波数2MHzのリッカー波を $f(t)$ として用いる。境界値問題の解法には境界要素法を用い、その際解くべき式(1),(2)に等価な境界積分方程式は次のように与えられる。

$$\frac{1}{2} u(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) dS_x = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) \quad (4)$$

ここに、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は板のグリーン関数であり、 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu \frac{\partial G}{\partial n_x}$ はその表面力成分である。 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は定義より $\mathbf{x} \in$

$B^+ \cup B^-$ において $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ であるから、式 (4) の積分は ∂D のみとなっている。グリーン関数の計算には多少の配慮を要するが例えば文献³⁾にある方法で行うことができる。ところで、式 (4) の右辺は入射波に相当する項である。送信素子を幅 a の分布荷重としてモデル化する場合には、この項を分布波源が板内に部作入射場に置き換えればよい⁴⁾。そのような入射場はグリーン関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を素子幅に渡って数値積分することで容易に得ることができる。

3. 開口合成法による欠陥像の再構成

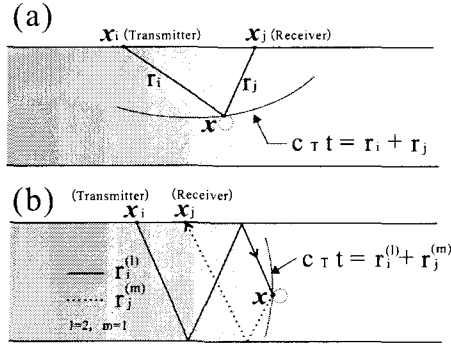


図-3 開口合成法における散乱源位置の推定 (a) 直達波の場合。 (b) 反射波の場合 ($l=2, m=1$)。

3.1 開口合成法

開口合成法では、観測波形 $u_{ij}(t)$ の時刻 t に現れるエコーの原因 (空洞境界) は、次の式を満たすいずれかの位置 $\mathbf{x}$ に存在するものと考えられる (図 3(a))。

$$c\tau t = r_i + r_j \quad (5)$$

ここに、 $r_i = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|$, $r_j = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}|$ とし、 $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{x}_j$ はそれぞれ送、受信点位置を表す。この考え方に従えば、時間の関数 $u_{ij}(t)$ を式 (5) によって空間 $\mathbf{x}$ の関数へと変換した $u(r_i/c_T + r_j/c_T)$ は、空洞境界近傍で値をもつと予想される。これにより $u_{ij}(t(\mathbf{x}))$ が大きな値を持つ位置を探すことで空洞境界の位置を推定することができる。同様なことは他の送、受信点の組み合わせにおいて得られる波形についても言えるため、全アレイデータを次のように加え合わせて $S(\mathbf{x})$ を作れば、より正確に欠陥境界位置の推定が可能になると考えられる。

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \left| u_{ij} \left(\frac{r_i + r_j}{c_T} \right) \right| \quad (6)$$

この $S(\mathbf{x})$ を画像として表示すれば欠陥境界のイメージングを行うことができ、それは開口合成像と呼ばれる。

本研究ではさらに、板上下面で幾度かの反射を経た後に欠陥あるいは観測点に到達する波動のもつ情報も利用

するために、式 (6) に代えて次の式で与えられる $S(\mathbf{x})$ によって欠陥像の再構成を行う。

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m=0}^M \sqrt{r_i^{(l)} r_j^{(m)}} \left| u_{ij} \left(\frac{r_i^{(l)} + r_j^{(m)}}{c_T} \right) \right| \quad (7)$$

ただし、 $r_i^{(l)}(r_j^{(m)})$ は板上下面で $l(m)$ 回の反射を伴い着目点 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j)$ を結ぶ伝播経路の長さである (図 3(b))。また、 M は往路 ($\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}$) および復路 ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_j$) において考慮する最大の反射回数である。式 (7) には $\sqrt{r_i^{(l)} r_j^{(m)}}$ の項が加わっているが、これは距離減衰による影響を補正するためのものである。

3.2 開口合成像

送信素子を点波源と見なした数値シミュレーションによりアレイ探傷データを作成し、それらを用いて式 (7) によって行った開口合成の結果を以下に示す。

(1) 多重反射波の利用による開口合成像の変化

円孔およびスリットに対して行った開口合成の結果を図 4 に示す。この図は $S(\mathbf{x})$ をグレースケールで示したもので、明るく見える箇所が大きな値をもつ部分である。白の実線は実際の空洞境界を示している。多重反射波を利用することによる影響を見るために、探触子位置は全てのケースで $\bar{x} = 25\text{mm}$ とし、考慮する最大の反射回数 M を 0, 1, 2 と変化させて開口合成を行っている。 $M=0$ としたときのスリットの場合は、上下端部エコーのみが受信されているためにスリット端部だけが現れているが、その他のケースでは $S(\mathbf{x})$ は空洞境界付近で大きな値を示していることが分かる。また、多重反射波を利用することで再構成される欠陥境界の範囲が大きくなることも明らかである。ただし、ここで結果は示さないが、 M は大きいほどよいというものではないことは付け加えておかなければならない。これは $M > 2$ 程度からは後で述べる開口角の分布が、単に M を増やすだけでは改善されなくなるためである。

(2) 探触子位置の影響

探触子位置の影響について調べるため、 $M=2$ として $\bar{x}$ を変化させて開口合成を行った。その結果を図 5 に示す。探触子位置は上段から順に $\bar{x} = 25\text{mm}$, 65mm , 85mm である。円孔の場合には探触子位置ごとに再構成される部分が異なり、 $\bar{x}$ が大きくなるにつれて円孔左側の境界形状がはっきりと現れてくる。スリットの場合には、逆に探触子位置が遠い場合にはスリット左側面は再構成されず、 $\bar{x}$ が最小の $\bar{x} = 25\text{mm}$ において最もよい結果が得られている。これは次のような理由によると考えられる。スリット側面において入射波は鏡面反射を起こし、その結果強い指向性を有する散乱波が発生する。そのような散乱波は特定の方向でしか観測されないため、探触子の位置によってはほとんど受信できない。 $\bar{x} = 65\text{mm}$, 85mm はそのようなケースにあたり、その結果スリット側面の情報をとることができず開口合成像ににも側面の形状が現れない。

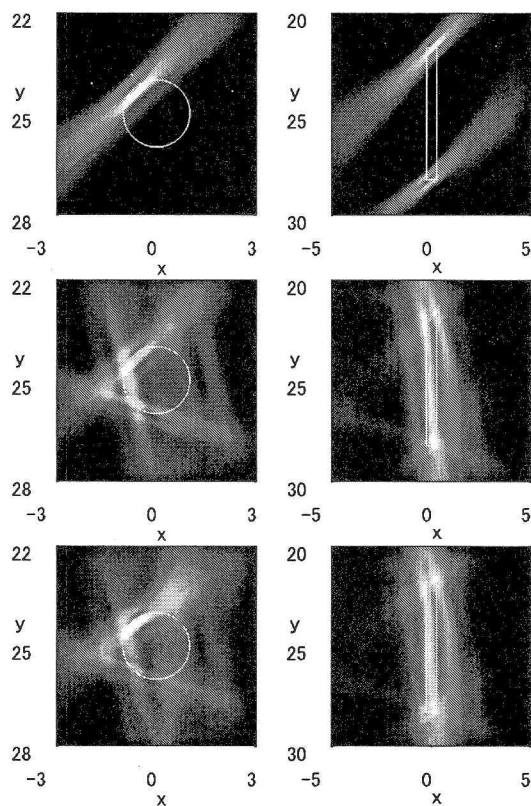


図-4 円孔およびスリットの開口合成像. 考慮した最大反射回数 $M=0$ 回 (上段) 1 回 (中段), 2 回 (下段).

3.3 開口角の面からの検討

図 4, 図 5 に示した開口合成の結果を開口角の視点から検討する. はじめに開口角の定義を述べる.

(1) 開口角の定義

図 6 に示すように開口合成により画像化を行う領域内の代表点を x_o とし, x_i はいずれかの素子の中心位置であるとする. 点 x_i と x_o を結ぶ波動の伝播経路 (波線) のうち, 板表面において l 回の反射を伴うものについて考える. この波線は $(l+1)$ 個の線分からなる折線である. これらの折線のうち最も x_o に近いものが正の x 軸となす角度を $\theta_i^{(l)}$ と書く. 今, 送信点を x_i , 受信点を x_j とし, 往路 ($x_i \rightarrow x_o$) において l 回の, 復路 ($x_o \rightarrow x_j$) において m 回の反射を経て x_j に到達する散乱波が観測されたとする. 欠陥境界での散乱がキルヒホフ近似⁵⁾ に従うとすれば, このとき x_o 付近には $\theta_n = \frac{\theta_i^{(l)} + \theta_j^{(m)}}{2}$ 方向の面をもつ欠陥があるとわかる. 従って, 開口合成を行う際に往路で l 回, 復路で m 回の反射を伴う経路を考慮するならば, $u_{ij}(t)$ から θ_n 方向を向く境界の情報が得られ, その面を再構成することができるようになる. アレイ探傷を行うことを前提としているため, θ_n は x_i, x_j を様々にすることで変化する. そこで, ある l, m について θ_n の動く

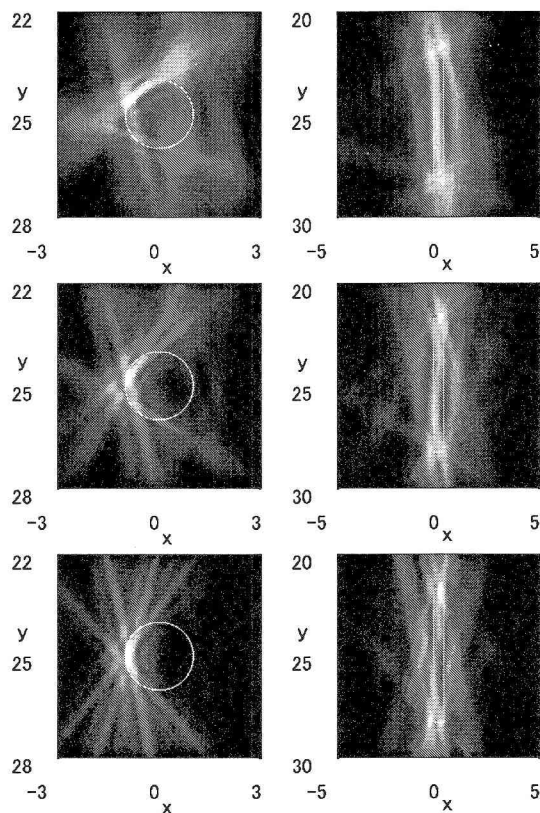


図-5 円孔およびスリットの開口合成像. 探触子中心位置は上段から順に $\bar{x}=25\text{mm}$, 65mm , 85mm .

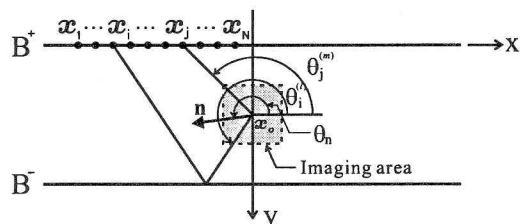


図-6 開口角の定義に用いる角度 $\theta_i^{(l)}, \theta_j^{(m)}$ および θ_n ($l=1, m=0$ の場合).

範囲を開口角として定義する. 開口合成式 (7) において考慮するすべての l, m について開口角を計算し, それらの大きさと分布について調べれば, どの方向の面が再構成されるか予測することができる. ここで, 開口角は欠陥形状とは無関係に計算できることに注意する.

(2) 開口角と開口合成像の相関について

代表点 x_o を画像化領域の中心点にとって計算を行った開口角が, 実際に再構成可能な欠陥表面の境界の向きを表していることを, 図 4 および 5 に示した結果から確認する.

図 7 は探触子位置を $\bar{x}=25\text{mm}$ としたときの開口角の分布と大きさを示したものである. このグラフは往路における反射回数 l に 1 を加えた $(l+1)$ を動径 R , θ_n を偏

角 α として極形式表示したもので $l=2$ までの結果を示してある。式 (7) における M との対応で言えば、 $M=0$ とした場合、 θ_n は一番内側の円上に実線で示された範囲を動くことができ、 $M=1$ のときには2番目の円上の実線範囲がそれに加わる。 $M=2$ の場合は θ_n は図示した全ての実線上を動きうる。各々の実線はいずれかの経路に対応した開口角であり、先の主張が正しいならばこの方向を向く欠陥表面が開口合成によって画像化されるはずである。

そこで、図4に示した開口合成像と、図7の開口角の分布を比較すると、円孔の場合には再構成される境界の範囲が開口の分布とよく対応していることがわかる。一方スリットの場合は、一見そのような対応は見られない。例えば、 $l=0, m=0$ の開口角の方向 $120^\circ \sim 150^\circ$ には円孔の場合のように像が現れていない。しかし、これは単にその方向の境界が無いということを示すだけであり、”開口角は再構成可能な欠陥境界の方向を示す”ということ否定するものではない。実際、スリット左側面の向き $\alpha=180$ 度方向に開口角が得られている $M=1, 2$ のケースではスリット側面がうまく再現され、そうでない $M=0$ のときにはスリット端部にしか指示は現れていない。これは先程の主張を支持する結果である。

図5に示した結果についても同様な考察を行うために、

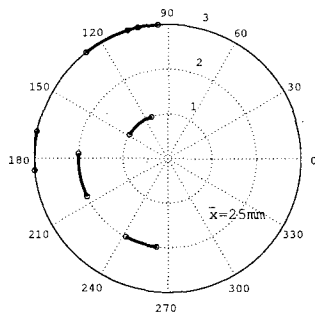


図-7 開口角の分布 ($\bar{x}=25\text{mm}$).

探触子位置 $\bar{x}=65\text{mm}, 85\text{mm}$ に対する開口角の分布を求め、それぞれ図8と図9に示す。図7~9には、探触子位置に応じて、開口角の分布が変化する様子が見られる。図5に示した円孔の開口合成像には、この開口角の変化に対応した影響が明確に現れている。すなわち、探触子位置が欠陥から遠ざかるにつれて開口角は $\alpha=180^\circ$ 方向に集まり、それに伴い円孔の左側がはっきりと、しかも滑らかに再構成されるようになっている。スリットの場合には逆に、探触子位置が遠ざかるとスリット側面の存在がはっきりとしなくなる。そこで $\bar{x}=65\text{mm}$ と $\bar{x}=85\text{mm}$ について開口角の分布を調べると、やはり $\alpha=180$ 度方向には開口角が得られておらず開口合成の結果に対応している。

以上より、開口角は再構成可能な欠陥境界の向きを表すという主張が正しいことが確認される。また、探触子位置や多重反射波の影響は、開口角を求めその挙動を調べることで明らかになることがわかる。

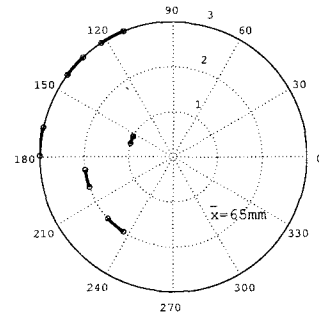


図-8 開口角の分布 ($\bar{x}=65\text{mm}$).

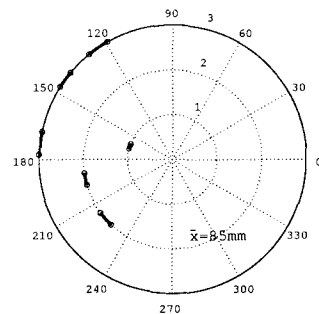


図-9 開口角の分布 ($\bar{x}=85\text{mm}$).

3.4 素子幅の影響

ここでは、送信素子の幅が開口合成像に与える影響について調べる。そのため、後に示すように異なる放射パターンをもつ入射場を与える4種類の素子幅 $a=0\text{mm}, 1\text{mm}, 1.5\text{mm}, 1.875\text{mm}$ に対して数値シミュレーションおよび開口合成を行った。ただし、いずれの場合も $M=0, \bar{x}=85\text{mm}$ とし、 $a=0$ は点波源を意味する。また、これまで同様、受信素子では素子中心点での変位が観測されるものとしておく。開口合成の結果を図10に示す。 $a=0\text{mm}$ のケースは図5に示したものと同一結果である。これを基準として $a>0$ に対する結果を見ると、素子幅が大きくなるに従い再構成像が次第に不鮮明になり、あたかも波長の長い入射波を用いたかのような結果になることがわかる。これは以下のような理由によるものと考えられる。

図12は幅 a の時間調和な面外方向振動をする素子からの放射場 $|u(\mathbf{x})|$ を、最大値で無次元化して示したものである。横軸の角度 θ と観測点位置の配置は図11に示す通りであり、図中、素子幅は波長との比で示してある。これらは周波数 2MHz の場合には小さいものから順に $a=0.5\text{mm}, 1.0\text{mm}, 1.5\text{mm}, 1.875\text{mm}$ に相当する。 a/λ が大きくなるにつれ、放射場が次第に指向性をもつ様子が現れている。つまり、角度 θ が大きい方向へは素子幅 a が一定ならば波長の長い波がより効率良く伝わることを意味する。従って、パルス波のように様々な周波数成分からなる入射波の場合には、 θ が大きい方向に伝わる波は直下に向かうものに比べて波長の長い成分が優位となり長周期化する。図10の計算では探触子位置は $\bar{x}=85\text{mm}$ であるか

ら、画像化領域は探触子中心からみておよそ70度から75度の方向にある。従って、素子幅が有限の場合に欠陥方向に伝わる波は、点波源からのものに比べて波長が若干長くなっていると考えられる。これが素子幅 a が大きくなるに従い開口合成法像が不鮮明になることの理由であると考えられる。

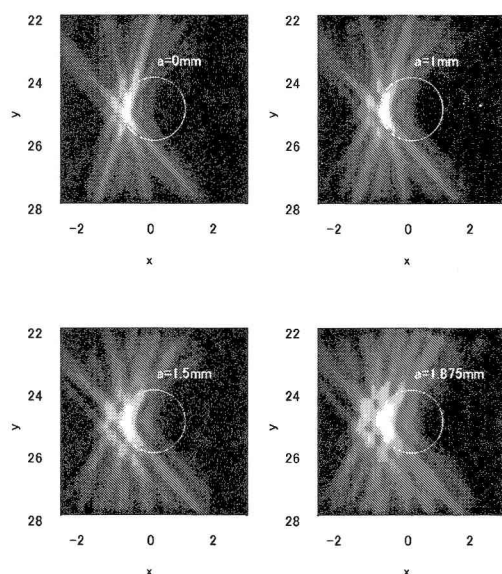


図-10 素子幅を考慮した場合の開口合成像。

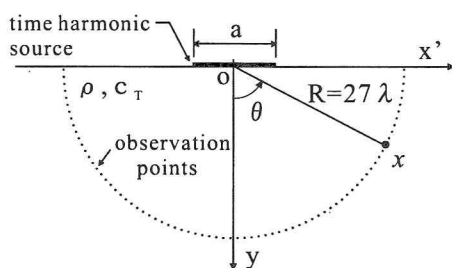


図-11 放射パターンの計算モデル。

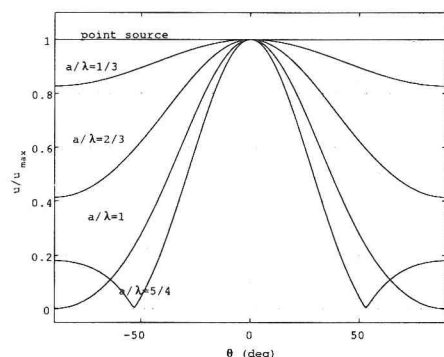


図-12 面外方向分布荷重が作る入射場の放射パターン。

4. 結論

本研究では、数値シミュレーションにより作成したアレイ探傷データを用いて開口合成を行い、板内部の円孔およびスリットの形状再構成を行った。その結果を考察することにより、アレイ探触子の位置や素子幅、開口合成時の多重反射波の利用が開口合成像に与える影響について検討を行った。以下には、検討の結果本研究で得られた結論をまとめる。

- 本研究において定義した開口角は、開口合成法によって再構成可能な欠陥境界の向きを示している。
- 探触子位置や多重反射波の利用が開口合成像に与える影響は、開口角の変化という面から統一して説明することができる。
- 欠陥が探触子直下方向からみて大きな角度の方向にある場合、アレイ探触子の素子幅が大きくなるに従い開口合成法の形状再構成能が低下する。これは、素子幅が有限であることに起因して欠陥方向に伝播する波が長周期化するためである。
- 開口角は探触子位置と開口合成の画像化領域に対して計算され、欠陥の形状には関係しない。従って、未知欠陥の開口合成像を解釈する際にも再構成可能な欠陥面の方向を限定することができ有用であると考えられる。

以上は全て数値シミュレーションによって行った結果である。今後は同様な検討を実験データを用いて行う必要があると考えられ、計測値から同定したアレイ探触子の感度や指向性を、開口合成法に反映していくことが重要となる。さらに、同様な方法を P 波や SV 波を用いた三次元開口合成法に適用していくことも今後の課題である。その際には、モード変換を伴う多重反射波をいかに利用するかという点が重要となってくると考えられる。

参考文献

- 1) M. Moles and N. Dube: 超音波フェイズドアレイによる溶接部の探傷, 検査技術, 47-55, 2003.
- 2) 中畑和之, 北原道弘: 低周波を利用した構造物材内部の欠陥再構成手法の提案, 応用力学論文集, Vol.6., 2003.
- 3) 木本和志, 廣瀬壮一: 層状体に対する SH 波のグリーン関数を用いた境界要素法, 境界要素法論文集, Vol.20, 73-78, 2003.
- 4) 小林昭一: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- 5) N. Bleistein :Mathematical methods for wave phenomena, Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation, Academic Press, 1984.

(2004 年 4 月 16 日 受付)