

厚板解析における横荷重の影響に関する一考察

A Consideration of Transverse Load Effect in Thick Plate Analyses

末武義崇*, 友田富雄**

Yoshitaka Suetake, Tomio Tomoda

*工博, 足利工業大学助教授, 工学部都市環境工学科 (〒326-8558 足利市大前町 268-1)

** 工修, (株) 富貴沢建設コンサルタンツ, 構造二部 (〒321-0934 宇都宮市築瀬 2-13-26)

Since Reissner and Mindlin proposed their classical thick plate theories, many authors have presented refined theories including transverse shear deformation. Most of those plate theories are derived through expanding displacements and stresses into power series along the thickness. In general, the higher the order of the theories is, the higher the accuracy of those is. However, the conciseness of the classical theories has been lost. On the other hand, the importance of transverse load effect is not noticed in those plate theories. In this paper, we pay attention to formations of the load of plates. The formations of load are represented by rate parameters, which indicate portions of a body force and surface tractions. When we introduce the rate parameter for loads and consider the transverse normal stress distribution, we can establish a quite simple plate theory including transverse shear deformation. In addition, the new theory presented here gives us excellent results of a deflection and bending moments.

Key Words: thick plate theory, transverse shear deformation, load effect, transverse normal stress, shear correction parameter

キーワード: 厚板理論, 横せん断変形, 荷重効果, 板厚方向垂直応力, せん断補正係数

1. はじめに

厚肉平板の曲げ問題については, Reissner¹⁾および Mindlin²⁾によって記念碑的な論文が発表されて以来, 半世紀以上にわたり数多くの研究報告がなされてきた。

よく知られているように, Reissner 理論¹⁾は基本的に応力仮定に基づく厚板理論であり, Mindlin 理論²⁾は変位仮定に基づく理論である。Reissner 理論の場合, 面内応力に関しては板厚方向に線形分布, 横せん断応力については放物線分布を仮定している。従って, 平板の上下面においてせん断応力がゼロになるという条件が, あらかじめ満足されることになる。さらに, 板厚方向の垂直応力については, 平板の上面に作用する分布荷重を想定し, 釣り合い条件を満足するように, 板厚方向座標 z の 3 次式で表している。前述のように, Reissner 理論は応力仮定の理論であるから, ひずみの取り扱いについては文献 1) においては明確に示されておらず, 文献 3) で補足説明がなされている。

一方, Mindlin 理論の場合, 面内変位については線形分布, たわみについては一定分布を仮定し, 厚板の動的問題に対する基礎方程式を誘導している。仮定された変位分布から得られる横せん断ひずみは, 板厚方向に一定分布となり, 板上下面においてせん断応力を生じないという条件と

矛盾する。この矛盾を解消するために, Mindlin は横せん断応力に関する補正係数を導入している。また, Mindlin 理論においては, 荷重として板上下面における分布荷重の差を用いているものの, 板厚方向の垂直応力については無視している。

厚板問題に関する上記 2 つの古典理論については, Reissner 理論において板厚方向の垂直応力の存在を無視し, Mindlin 理論においてせん断補正係数 κ の値を $\kappa = 5/6$ とすれば, 両者の基礎方程式は全く一致する。このため, 補正係数 κ の値については, 一般に $\kappa = 5/6$ を選択することが多い。しかしながら, $\kappa = 5/6$ とする合理的な根拠は必ずしも明確ではない。また, 後述のように, 平板に作用する荷重の評価によっては, 古典理論は三次元弾性理論と明らかに異なった解を与える。

厚板解析の精度向上については, 高次理論を構築することで対処しようとする研究が主流である。すなわち, 変位や応力の板厚方向分布を, 板厚方向座標 z の高次項を含む形で仮定して平板理論を構築するわけである。例えば, Schmidt⁴⁾は, 面内変位の分布に関し, z の 3 次項まで考慮して基礎方程式を誘導している。さらに, Reissner⁵⁾あるいは Rehfield ら^{6, 7)}は, たわみの板厚方向変化についても考慮している。Lo, Christensen および Wu⁸⁾⁻¹⁰⁾は, 変位のべき級数展開に関し, より多くの項を採用して高次理論の構

築を図っている。

応力仮定に基づく高次理論としては、Ambartsumyan の理論¹¹⁾が著名である。Ambartsumyan の理論¹¹⁾においては、横せん断応力とともに板厚方向の垂直応力の影響が考慮されている。加えて、板厚方向垂直ひずみの影響をも考慮した理論に、Voyiadjis-Baluch の理論¹²⁾がある。Reissner も自身の理論のさらなる高次化を図り、面内応力分布に関し z の 3 次、横せん断応力分布については z の 4 次、板厚方向垂直応力の分布について z の 5 次項まで考慮した高次理論¹³⁾を構築している。

一方、平島ら^{14),15)}は、上述の高次理論を全てその特別な場合として抱合する形の一般化高次理論を定式化した。そして、代表的な平板理論に基づく解析結果と新たに定式化した高次理論に基づく結果とを比較して、各種平板理論の解析精度を詳細に論じている^{16),17)}。この他、変位や応力の板厚方向級数展開に際し、Legendre の多項式を用いた Krenk の理論¹⁸⁾や古賀らの理論^{19),20)}、三次元弾性論の基礎式を板厚でべき級数展開した Igarashi らの理論²¹⁾も、代表的な高次理論として注目すべきであろう。

平板理論に基づく解析精度の向上を図るためには、上述のような高次理論の定式化が自然な流れであろう。しかしながら、理論の高次化を進めるに従って、当然のことながら理論はより複雑なものとなり、Reissner 理論および Mindlin 理論のもつ簡明さは損なわれていく。

ここで、理論の高次化から視点を変えて、平板理論における荷重の取扱について考えてみる。平板を 3 次元物体ととらえれば、横荷重は物体力および板上下面に作用する表面力で構成されることになる。ところが、上記の平板理論の中で物体力に言及しているものは極めて少なく、横荷重に占める物体力と表面力との構成比率については、ほとんど重要視されていない。本論文では、この点に着目し、板の横荷重に占める物体力および表面力の構成比率を明示する形で古典理論の修正を図る。得られた修正理論を元に、厚板の曲げ解析を実施し、三次元弾性論に基づく解析結果との比較を通じて、修正理論が広範囲の幅厚比に対して良好な近似解を与えることを示す。

まず、続く第 2 章で、厚板問題に対する古典理論の修正について詳細に述べる。その際、面内変位の板厚方向分布に関し、Schmidt⁴⁾や Reissner⁵⁾と同様に、比較的単純な高次分布を仮定する。また、横荷重に占める物体力および表面力の構成比率を示すパラメータを導入する。第 3 章では、誘導した基礎方程式を Reissner および Mindlin の基礎式と比較することで、せん断補正係数に関する簡易算定式を提案する。第 4 章では、修正理論に基づく Fourier 解析について説明する。特に、単純な問題に適用することで、厚板の古典理論や本論文の修正理論に基づく解析は、Kirchhoff の薄板理論と、手続き上ほとんど差異の無いことを確認する。また、数値計算の際に比較対象として用いた、三次元弾性論に従った厚板解析についても概説する。第 5 章においては、解析モデルの形状・材料定数、数値計算における諸条件などを示した後、具体的な数値計算例を示す。最後に、本研究によって得られた結論を第 6 章で述べる。

2. 修正古典理論

2.1 変位-ひずみ関係

本論文では、図-1 に示したように、平板中央面に $x-y$ 平面を設定し、その法線方向に z 軸を設けることとする。

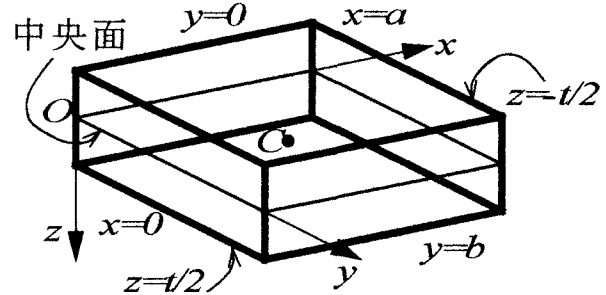


図-1 矩形平板および座標系

板厚方向の変位分布に関し、Mindlin 理論²⁾における仮定を採用すれば、図-2 に示したように、変形の前後に於いて断面の直線性は保持されるものの、法線性は保持されない。すなわち、 x, y, z 3 方向の変位の板厚方向分布 U, V, W は次式で仮定することができる。

$$U = -\psi_x z, \quad V = -\psi_y z, \quad W = w \quad (1)$$

ここで、 ψ_x および ψ_y は x, y 方向の回転角を表しており、 w は中央面のたわみである。すなわち、式 (1) においては、中央面の伸縮および板厚の伸縮を無視している。

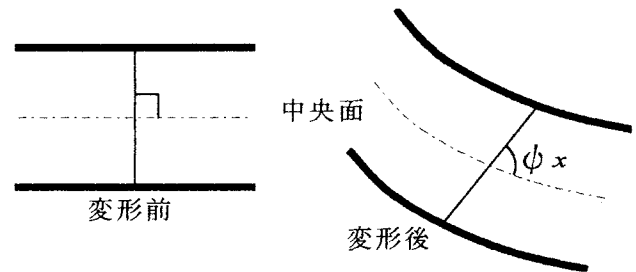


図-2 変形の前後における断面および中央面

一方、本論文では、図-3 に示したような断面のゆがみを表現するために、次式のような変位分布を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U &= -\psi_x z - \frac{4}{3t^2} \varphi_x z^3; \quad \varphi_x \equiv \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ V &= -\psi_y z - \frac{4}{3t^2} \varphi_y z^3; \quad \varphi_y \equiv \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \\ W &= w \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

中央面および板厚の伸縮を無視する点については、Mindlin 理論と同様である。面内変位の板厚方向分布に関し、 z の 3 次項まで考慮して表示する点は、Schmidt⁴⁾や Reissner⁵⁾と同様である。梁理論についても、Levinson²²⁾が全く同一の変位分布を仮定している。式 (2) は、高次理論の中で、最も単純な変位分布を仮定したことに相当する。

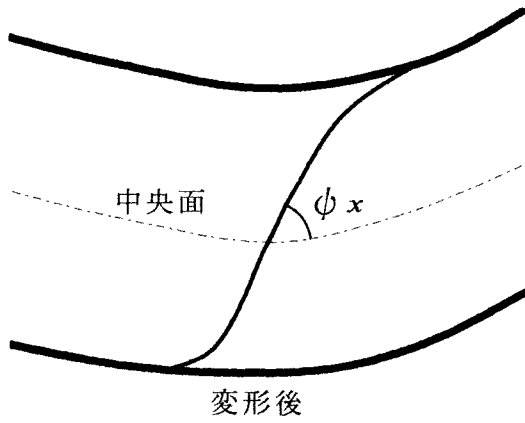


図-3 変形後における断面のゆがみ

式(2)で与えられる変位分布を変位-ひずみ関係に代入すれば、板厚方向のひずみ分布を求めることができる。まず、面内ひずみの分布については次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_x}{\partial x} z - \frac{4}{3t^2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z^3 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_y}{\partial y} z - \frac{4}{3t^2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z^3 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= -\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) z^3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)において、 z^3 の項を無視すれば、Mindlin理論における変位-ひずみ関係に一致する。一方、横せん断ひずみの分布については、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \varphi_x \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \varphi_y \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで注目すべき点は、板上下面におけるせん断応力がゼロになるという条件を、式(4)があらかじめ満足していることである。通常のMindlin理論²⁾の場合、式(1)に基づいて誘導される横せん断ひずみの分布は、次式の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \gamma_{yz} &= \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

すなわち、通常のMindlin理論においては、横せん断ひずみが板厚方向に一定の分布となり、明らかに板上下面においてせん断応力を生じないという条件と矛盾する。この矛盾を解消するために、Mindlinは横せん断応力に関する補正係数 κ を導入している。この補正係数 κ の値については、一般に $\kappa = 5/6$ を選択することが多い。しかしながら、 $\kappa = 5/6$ とする合理的な根拠は必ずしも明確でない。また、後述のように、板に作用する荷重の評価によっては、

Mindlin理論は三次元弾性理論と明らかに異なった解を与える。

本論文では、式(3)および(4)で示されたひずみ分布を仮定し、さらに板厚方向の垂直応力 σ_z の影響を考慮することで、Reissner¹⁾およびMindlin²⁾による古典理論の修正を試みる。その過程を通じ、横せん断補正係数 κ の適切な算定方法について考察を加える。

2.2 応力-ひずみ関係

三次元等方体のHookeの法則において、板厚方向の垂直ひずみ ε_z を消去すれば、垂直応力 σ_z の影響を加味した応力-ひずみ関係として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} \quad , \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 E はYoung率、 ν はPoisson比である。また、 G はせん断弾性係数であり $G = E / \{2(1+\nu)\}$ で与えられる。

式(3)および(4)を式(6)および(7)に代入すれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) z \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) z^3 \right\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) z \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3t^2} \left(\nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) z^3 \right\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \tau_{xy} &= -G \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) z \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) z^3 \right\} \\ \tau_{xz} &= G \varphi_x \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \quad , \quad \tau_{yz} = G \varphi_y \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Mindlin理論²⁾の場合、式(8)・(9)における z^2 および z^3 の項は無視される。また、板厚方向垂直応力 σ_z の影響も考慮されていない。従って、上記のひずみ分布はReissner理論¹⁾における分布に相当する。

2.3 力の釣り合い条件

微小変位問題の場合、3次元物体に対する力の釣り合い条件は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

ここではまず、式(10)の第3式より、板厚方向垂直応力 σ_z を求めらる。

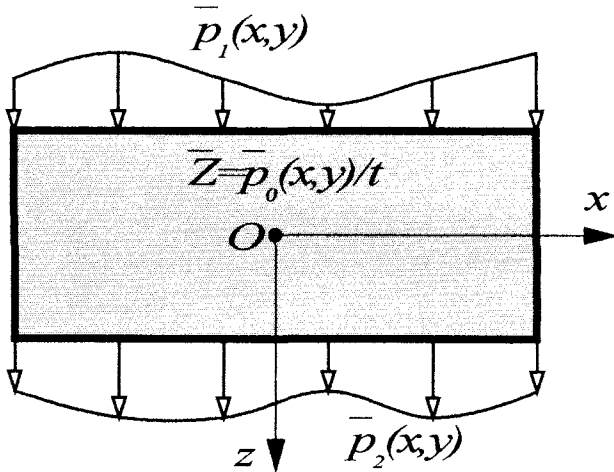


図-4 3次元な荷重状態

平板をあくまでも3次元物体と見なし、図-4に示したような荷重状態を想定する。すなわち、板上下面に表面力 $\bar{p}_1(x, y)$ および $\bar{p}_2(x, y)$ が作用し、物体力は板厚方向に変化しないと仮定する。この時、式(10)の第3式に式(9)を代入し、下面($z = -t/2$)における境界条件 $\sigma_z(x, y, -t/2) = \bar{p}_2$ を考慮して z 方向に積分すれば、垂直応力 σ_z の分布は次式のような形に定まる。

$$\sigma_z = \frac{Gt}{3} \left(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \left(1 - \frac{3}{t}z + \frac{4}{t^3}z^3 \right) + \frac{\bar{p}_0}{2} \left(1 - \frac{2}{t}z \right) + \bar{p}_2 \quad (11)$$

さらに、上面($z = t/2$)における境界条件 $\sigma_z(x, y, t/2) = -\bar{p}_1$ を適用すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \nabla^2 w + \frac{3}{2Gt} \hat{p}; \quad \hat{p} \equiv \bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \quad (12)$$

ここで、簡単のために、物体力および表面力に対応する3つの荷重関数 $\bar{p}_i (i=0 \sim 2)$ が、全て同一のモード関数 $\bar{p}(x, y)$ の定数倍として表現される場合に限定して考える。すなわち、3つの荷重関数が次式で与えられるとする。

$$\bar{p}_0 = (1 - c_1 - c_2)\bar{p}, \quad \bar{p}_1 = c_1\bar{p}, \quad \bar{p}_2 = c_2\bar{p}; \quad \hat{p} = \bar{p} \quad (13)$$

ここに、 c_1 および c_2 は、板厚方向荷重に占める、上下面の表面力の構成比率を表すパラメーターであり、値の範囲は $|c_1|, |c_2| \leq 1$ となる。これら2つのパラメーターを導入することで、平板理論における横荷重の三次元的な内訳を表

現することができる。つまり、平板理論においては、横荷重はあくまで1つの荷重関数 $\bar{p}(x, y)$ で表現されるわけだが、平板を3次元物体ととらえた時に、物体力や表面力がどのような割合で横荷重の構成に寄与しているかを明示することができる。後述のように、物体力と表面力の荷重構成比率は、厚板の解析結果に顕著な影響を及ぼす。しかしながら、従来の平板理論においては、この荷重構成比率の重要性がほとんど無視されている。

次に、式(10)の第1式および第2式を板厚方向に積分することで、板の曲げおよび振りモーメントの釣り合い条件として次の2式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y} + Q_y &= 0 \end{aligned} \right\} (14)$$

ただし、面内方向の物体力は無視した。

2.4 厚板の基礎方程式

式(8)および(9)を用い、板の曲げ・振りモーメントおよびせん断力の定義に従って、これら合応力をたわみ w 、断面回転角 ψ_x, ψ_y によって表すと、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = -D \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} (1 + 5c_1 + 5c_2) \bar{p} \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = -D \left\{ \frac{4}{5} \left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{5} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} (1 + 5c_1 + 5c_2) \bar{p} \\ M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \\ &= -\frac{D}{2} (1-\nu) \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + \frac{2}{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \end{aligned} \right\} (16)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性である。式(15)および(16)を式(14)に代入すれば、次の2式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} D \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \right\} + \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) - \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} (1 + 5c_1 + 5c_2) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= 0 \\ D \left\{ \frac{4}{5} \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \right\} + \frac{2}{3} Gt \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) - \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)} (1 + 5c_1 + 5c_2) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

$$D\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right) + \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w)\right\} + \frac{2}{3}Gt\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) - \frac{\nu t^2}{60(1-\nu)}(1+5c_1+5c_2)\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

式(12), (17)および(18)が厚板問題の基礎方程式である。次章のFourier解析の便を考慮し, これら3つの基礎方程式を変形して, たわみ w , 断面回転角 ψ_x, ψ_y について分離した形の表示を求めておく。

まず, 式(17)および(18)を, それぞれ x および y で偏微分し, 辺々足して式(12)を代入すれば, たわみ w に関する基礎方程式が次式のように導かれる。

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}\left[1 - \frac{t^2}{6(1-\nu)}\left\{\frac{12-\nu}{10} - \frac{\nu}{2}(c_1+c_2)\right\}\nabla^2\right]\bar{p} \quad (19)$$

一方, 同じ2式を辺々引けば次式が得られる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{10}{t^2}\right)\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} - \frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right) = 0 \quad (20)$$

ここで, $\partial\psi_x/\partial y - \partial\psi_y/\partial x$ は, Reissner理論¹⁾あるいはMindlin理論²⁾における応力関数に相当している。

式(20)は, 簡単のために $\partial\psi_x/\partial y = \partial\psi_y/\partial x$ と仮定すればあらかじめ満足させることができる。この時, 式(12)および(19)より, 断面回転角 ψ_x および ψ_y に関する基礎方程式として次式が得られる。

$$\nabla^4 \psi_x = \frac{1}{D}\left[1 + \frac{t^2}{60(1-\nu)}\{3+\nu+5\nu(c_1+c_2)\}\nabla^2\right]\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} \quad (21)$$

$$\nabla^4 \psi_y = \frac{1}{D}\left[1 + \frac{t^2}{60(1-\nu)}\{3+\nu+5\nu(c_1+c_2)\}\nabla^2\right]\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} \quad (22)$$

結局, 横せん断応力の分布を放物線分布で仮定し, 板厚垂直応力の影響を考慮した厚板の基礎方程式は, 式(19), (21)および(22)で与えられることになる。

3. 古典理論との比較

3.1 Reissner理論¹⁾

第2章で示した厚板問題の修正理論と, 古典理論との関係について考察する。この節では, Reissner理論¹⁾との関係について考える。

Reissner理論¹⁾の場合, 板厚方向の垂直応力 σ_z が考慮されており, 想定されている荷重は上面の表面力のみである。従って, 第2章で示した基礎方程式において, 荷重比率パラメータを $c_1=1, c_2=0$ とした場合がReissner理論に

相当する。実際, 式(19), (21)および(22)において $c_1=1, c_2=0$ とすれば, 次の3式が得られる。

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}\left(1 - \frac{t^2}{10} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu}\nabla^2\right)\bar{p} \quad (23)$$

$$\nabla^4 \psi_x = \frac{1}{D}\left(1 + \frac{t^2}{20} \cdot \frac{1+2\nu}{1-\nu}\nabla^2\right)\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} \quad (24)$$

$$\nabla^4 \psi_y = \frac{1}{D}\left(1 + \frac{t^2}{20} \cdot \frac{1+2\nu}{1-\nu}\nabla^2\right)\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} \quad (25)$$

Reissner理論¹⁾は基本的に応力仮定に基づく理論であるから, 式(24)および(25)を陽な形でReissner理論¹⁾の中に見出すことは容易ではない。しかしながら, たわみに関する独立した基礎式を誘導することは比較的容易であり²⁾, 式(23)がReissner理論におけるたわみの基礎式と一致することが分かる。

3.2 Mindlin理論

この節では, 静的な問題に対するMindlin理論²⁾と修正理論との比較を行う。Mindlin理論の場合, 板厚方向の垂直応力 σ_z は無視される。従って, 第2章で示した基礎方程式において, 荷重比率パラメータの値を適切に選択することでMindlin理論の基礎式を誘導することはできない。実際には, まず, 第2章で述べた基礎式の誘導過程において, $\sigma_z=0$ とする必要がある。また, 式(10)の第3式については, σ_z を求めるためではなく, 板厚方向に積分してせん断力の釣り合い条件を誘導するために用いることになる。すなわち, 次式である。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \bar{p} = 0 \quad ; \quad \bar{p} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{z} dz = \bar{p}_0 \quad (26)$$

式(26)における荷重項に着目すれば, Mindlin理論は本論文の修正理論において, 荷重の構成比率パラメータの値を $c_1=c_2=0$ とした場合に近しいことが予想される。

さらに, Mindlin理論の場合, 前述のように横せん断応力の分布に関する矛盾を解消するために, 補正係数 κ の導入が必要となる。そして, せん断力 Q_x および Q_y の表示として, 式(16)に代えて次式を用いることになる。

$$Q_x = \kappa Gt\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right), \quad Q_y = \kappa Gt\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) \quad (27)$$

式(27)を式(16)の代わりに用いることで, Mindlin理論の基礎方程式が誘導できる。Mindlin理論における基礎方程式を, 式(19), (21)および(22)に対応する形で示せば, それぞれ次の3式ようになる。

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}\left\{1 - \frac{t^2}{6(1-\nu)\kappa}\nabla^2\right\}\bar{p} \quad (28)$$

$$\nabla^4 \psi_x = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad \nabla^4 \psi_y = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (29), (30)$$

ここで、断面回転角 ψ_x, ψ_y は、横せん断補正係数 κ に依存しないことに注意しておく。また、第2章の基礎式誘導過程において垂直応力 σ_z を無視し、せん断力 Q_x および Q_y の表示として式(16)を用いれば、補正係数 κ の値は $\kappa = 5/6$ となることが分かる。この時、Reissner 理論¹⁾ と Mindlin 理論とが一致すると解釈できる。

3.3 せん断補正係数

せん断補正係数 κ の算定については、3次元弾性体の Rayleigh 波に対する考察から、Mindlin によって3次の決定方程式が誘導されている。ここでは、より簡単かつ合理的な補正係数 κ の算定方法について検討する。そのために、Mindlin 理論と本論文の修正理論との比較を通じ、せん断補正係数 κ の合理的な算定式を導く。

式(19)と式(28)とを比較し、両者が一致するように補正係数 κ を決めることにすれば、 κ の算定式として荷重の構成比率パラメーター c_1, c_2 を含む次式が得られる。

$$\kappa = \frac{10}{12 - \nu(1 + 5c_1 + 5c_2)} \quad (30)$$

例えば、式(30)において、構成比率パラメーターの値を $c_1 = 1, c_2 = 0$ (上面における表面力のみ) とすれば、補正係数 κ は次式のように決定できる。

$$\kappa = \frac{5}{3(2 - \nu)} \quad (31)$$

式(31)は、Reissner 理論¹⁾のたわみの基礎式である式

(23)と Mindlin 理論の基礎式(28)とを比較すれば、直接的に導くことができる。視点を変えれば、補正係数 κ が、せん断に関する補正だけでなく、垂直応力 σ_z 無視の仮定に対する補正の役割をも担っていると解釈することが可能である。その場合、 κ の値を式(31)で与えることにより、Mindlin 理論がそのまま Reissner 理論¹⁾を表現していると考えられることもできる。

次に、式(30)において、荷重比率パラメーターの値を $c_1 = c_2 = 0$ (物体力のみ) とすれば、補正係数 κ は次式で与えられる。

$$\kappa = \frac{10}{12 - \nu} \quad (32)$$

ここで、Poisson 比 ν が取り得る値の範囲は $0 < \nu < 0.5$ であるから、式(32)より補正係数 κ の取り得る範囲は $0.833 < \kappa < 0.870$ となり、 $\kappa = 5/6$ にかなり近い数値になる。つまり、荷重比率パラメーターを $c_1 = c_2 = 0$ とした場合、すなわち、荷重として物体力のみを考えた場合、Mindlin 理論が本論文の修正理論に近い理論となる。なお、Poisson 比を $\nu = 0$ とすれば、2つの古典理論と修正理論は全て一致する。

4. Fourier 解析

4.1 修正理論に基づく解析

ここでは、比較的単純な境界条件の場合について、平板の Fourier 解析の手順を示すことで、厚板の古典理論や修正理論に基づく解析が、Kirchhoff 理論に従った薄板の解析と、手続き上ほとんど変わらないことを確認する。適用する境界条件として、周辺単純支持を考える。すなわち次式で表される境界条件の下に、式(19)・(21)・(22)を解くものとする。

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0 \quad (33)$$

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \quad (34)$$

式(15)を考慮すれば、次式を仮定することで周辺単純支持の境界条件、すなわち式(33)・(34)を満足させることができる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_n \sum_m W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \psi_x &= \sum_n \sum_m \Phi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \psi_y &= \sum_n \sum_m \Psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

また、荷重モード関数 $\bar{p}(x, y)$ は、次式のように Fourier 二重級数展開できるものとする。

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \sum_n \sum_m \bar{P}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \bar{P}_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{p}(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned} \quad (36)$$

式(35)および(36)を修正理論の基礎方程式、すなわち式(19)・(21)・(22)に代入すれば、単純な係数比較によって、直ちに未定係数 W_{mn}, Φ_{mn} および Ψ_{mn} を定めることができる。すなわち、次式である。

$$W_{mn} = \frac{\bar{P}_{mn}}{D\lambda_{mn}^4} \left\{ 1 + \frac{t^2}{6(1-\nu)\kappa} \lambda_{mn}^2 \right\} \quad (37)$$

$$\Phi_{mn} = \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{\bar{P}_{mn}}{D\lambda_{mn}^4} \left\{ 1 - \frac{t^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\kappa} \right) \lambda_{mn}^2 \right\} \quad (38)$$

$$\Psi_{mn} = \frac{n\pi}{b} \cdot \frac{\bar{P}_{mn}}{D\lambda_{mn}^4} \left\{ 1 - \frac{t^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\kappa} \right) \lambda_{mn}^2 \right\} \quad (39)$$

ただし、

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (40)$$

また、式(37)・(38)・(39)において、係数 κ は Mindlin 理論におけるせん断補正係数を拡大解釈したもので、式(30)を用いて Poisson 比と荷重の構成比率から算定される。

式(37)から明らかなように、修正理論あるいは古典理論によるたわみの Fourier 解析は、Kirchhoff 理論による解析に付加項がたっただけの極めて単純なものである。なお、後述の数値計算例においては、たわみだけでなく曲げモーメントに関する計算例も示す。曲げおよび振りモーメントの Fourier 級数表示は、式(37)～(39)を考慮しつつ、式(35)を式(15)に代入することで直ちに求めることができる。因みに、曲げモーメントについて、無次元化した級数表示を示せば、次式ようになる。

$$m_{\xi} = \frac{a^2 M_x}{lD} = \sum_k \sum_j \left[\frac{j^2 + \nu k^2 / \gamma^2}{\pi^2 (j^2 + k^2 / \gamma^2)} \right] \times \left\{ 1 - \frac{\pi^2 \mu^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{\kappa} \right) (j^2 + \frac{k^2}{\gamma^2}) \right\} + \frac{\mu^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\bar{P}_{jk} \cdot a^3}{\mu D} \sin j\pi\xi \cdot \sin k\pi\eta \quad (41)$$

ただし、 $\xi \equiv x/a$ および $\eta \equiv y/b$ は無次元化座標、 $\gamma \equiv b/a$ は板の縦横比、 $\mu \equiv t/a$ は板の幅厚比である。

4.2 三次元弾性解析

修正理論の妥当性を検証するために、本論文では三次元弾性理論に基づく Fourier 解析を実施する。ここでは、解析の概略を述べる。

周辺単純支持平板の境界条件に対応するように、図-1に示した直方体(矩形平板)に対し、次式で表される幾何学的境界条件を適用する。

$$\left. \begin{aligned} v(0, y, z) = v(a, y, z) = w(0, y, z) = w(a, y, z) = 0 \\ u(x, 0, z) = u(x, b, z) = w(x, 0, z) = w(x, b, z) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式(42)を満足する変位の三角級数表示として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_n \sum_m u_{mn}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ V &= \sum_n \sum_m v_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ W &= \sum_n \sum_m w_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

また、適用すべき力学的境界条件は、前述の平板理論との対応を考慮すれば、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(x, y, -\frac{t}{2}) = -\bar{p}_1(x, y) = -c_1 \bar{p}(x, y) \\ \sigma_z(x, y, \frac{t}{2}) = \bar{p}_2(x, y) = c_2 \bar{p}(x, y) \\ \tau_{xz}(x, y, \pm \frac{t}{2}) = \tau_{yz}(x, y, \pm \frac{t}{2}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

さらに、物体力については、面外方向のみ考慮し、次式で与えることとした。

$$\bar{X} = \bar{Y} = 0, \quad \bar{Z} = \frac{l}{t} \bar{p}_0(x, y) = \frac{l-c_1-c_2}{t} \bar{p}(x, y) \quad (45)$$

三次元弾性問題の基礎方程式は、Navier の式²⁰⁾で与えられる。式(43)を Navier の式に代入し、得られた連立常微分方程式を解けば、未定関数 $u_{mn}(z)$ 、 $v_{mn}(z)$ および $w_{mn}(z)$ を求めることができる。さらに、式(44)で表される力学的境界条件を適用すれば、求めた $u_{mn}(z)$ 、 $v_{mn}(z)$ および $w_{mn}(z)$ に含まれる任意定数を決定することができる。

結局、三次元弾性解析の結果、板中央面の無次元化たわみ $\omega = w/t$ および式(41)に対応する板としての無次元化曲げモーメント m_{ξ} は次式で計算できることが分かる。

$$\omega = \sum_k \sum_j \left\{ C_{jk} + \frac{2\mu^2(1-c_1-c_2)}{6\pi^2 \lambda_{jk}^{*2} (1-\nu)} \right\} \times \frac{\bar{P}_{jk} \cdot a^3}{\mu D} \sin j\pi\xi \cdot \sin k\pi\eta \quad (46)$$

$$m_{\xi} = \sum_k \sum_j \frac{12(1-\nu)}{\pi^2 \lambda_{jk}^{*2} \mu^2} \left\{ \left[\left\{ \frac{2(1-2\nu)}{\pi^2 \lambda_{jk}^{*2} \mu^2} - \frac{1}{2} \right\} \cdot sh - \frac{1-2\nu}{\pi \lambda_{jk}^* \mu} \cdot ch \right] (j\pi)^2 + \frac{2\nu}{\pi \lambda_{jk}^* \mu} \cdot \left(\frac{2sh}{\pi \lambda_{jk}^* \mu} - ch \right) \cdot \left(\frac{k\pi}{\gamma} \right)^2 \right\} B_{jk} + \left(\frac{2sh}{\pi \lambda_{jk}^* \mu} - ch \right) \cdot (j\pi)^2 \cdot C_{jk} \left\{ \times \frac{\bar{P}_{jk} \cdot a^3}{\mu D} \sin j\pi\xi \cdot \sin k\pi\eta \right. \quad (47)$$

ただし、

$$\lambda_{jk}^{*2} = j^2 + (k/\gamma)^2 \quad (48)$$

$$B_{jk} = -\frac{\mu^4}{12(1-\nu)} \cdot \frac{l}{2sh \cdot ch - \pi \lambda_{jk}^* \mu} \times \left\{ (c_1 + c_2) \cdot ch + \frac{2(1-c_1-c_2)}{\pi \lambda_{jk}^* \mu} \cdot sh \right\} \quad (49)$$

$$C_{jk} = \frac{\mu^4}{12(1-\nu)} \cdot \frac{l}{2\pi \lambda_{jk}^* \mu} \cdot \frac{l}{2sh \cdot ch - \pi \lambda_{jk}^* \mu} \times \left\{ \left\{ \pi \lambda_{jk}^* \mu \cdot sh + 4(1-\nu) \cdot ch \right\} (c_1 + c_2) + \frac{2(1-c_1-c_2)}{\pi \lambda_{jk}^* \mu} \left\{ \pi \lambda_{jk}^* \mu \cdot ch + 2(1-2\nu) \cdot sh \right\} \right\} \quad (50)$$

$$sh = \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{jk}^* \mu, \quad ch = \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{jk}^* \mu \quad (51)$$

なお、式(46)・(47)のように、板中央面に関する

物理量を比較対象とする限り、平板理論においては上下面の表面力を区別する必要は無い。すなわち、表面力の合計 ($c_1 + c_2$) と物体力との比率に着目すれば良い。

5. 数値計算例

5.1 解析モデル

本論文で数値計算例として採用する解析モデルは、前述のように、図-1に示した周辺単純支持された弾性平板である。解析モデルの形状は、縦横比を $\gamma = 1$ で一定とし、幅厚比を $\mu = 0.001 \sim 1.0$ の範囲で種々変化させて解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ または $\nu = 0.45$ とした。

平板に作用する荷重については、式 (1.3) で示したように、物体力および上下面に作用する表面力が、全て同一のモード関数で表現し得るものとする。ここでは、簡単のために、モード関数として一定値関数 $\bar{p}(x, y) = \bar{p}^*$ 、すなわち等分布荷重を選択する。これは、荷重として自重のような死荷重を想定した場合に対応しており、物体力と表面力との構成比率を評価する、最も単純な解析例である。

この場合、荷重の Fourier 係数 \bar{P}_{mn} は、次式で与えられる。

$$\bar{P}_{mn} = \begin{cases} \frac{16\bar{p}^*}{\pi^2(2j-1)(2k-1)} & (m=2j-1 \wedge n=2k-1) \\ 0 & (m=2j \vee n=2k) \end{cases} \quad (52)$$

荷重の大きさについては、次式で定義される無次元化荷重 $\bar{\chi}^*$ に換算し、常に $\bar{\chi}^* = 1$ となるように設定した。

$$\bar{\chi}^* = \frac{\bar{p}^* a^3}{\mu D} = \frac{12(1-\nu^2)}{E\mu^4} \bar{p}^* \quad (53)$$

また、荷重を構成する物体力と表面力との比率については、以下の3つのモデルを想定し、計算を行った。

1) 表面力モデル

平板上面にのみ等分布荷重が作用するモデル。物体力は作用しない。荷重構成比率パラメーターの値は、 $c_1 = 1$ 、 $c_2 = 0$ である。

2) 物体力モデル

平板に一定の物体力のみが作用するモデル。表面力は作用しない。荷重構成比率パラメーターの値は、 $c_1 = c_2 = 0$ である。

3) 混合モデル

平板に作用する等分布荷重のうち、半分が物体力からの寄与であり、残る半分が上面等分布荷重である場合。荷重構成比率パラメーターの値は、 $c_1 = 0.5$ 、 $c_2 = 0$ である。

平板理論および三次元弾性論に基づく Fourier 解析に際しては、二重級数の項数を $100 \times 100 = 10000$ として計算した。この場合、平板中央点のたわみについて、有効数字6桁以上の精度で解が収束する。

5.2 たわみ

この節では、平板のたわみに関する解析結果について述

べる。解析結果を図-5~図-7に示す。図は、いずれも図-1に示した平板の中央点Cにおけるたわみに関し、解析精度に及ぼす幅厚比の影響を示したものである。図中、横軸には平板の幅厚比 μ を、縦軸には三次元弾性論に基づく Fourier 解析解、すなわち式 (4.6) によって得られた解を基準としたときの誤差 ε をとって示した。また、いずれの図においても、丸は厚板修正理論を用いた“物体力モデル”の解析結果、四角は“表面力モデル”の結果、三角は“混合モデル”の結果をそれぞれ示している。三者とも Poisson 比 $\nu = 0.3$ の場合の結果である。Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした時の、式 (3.7) ~ (3.9) における補正係数 κ の値は、荷重の構成比率に応じて以下の値をとる。

- 1) 表面力モデル: $\kappa = 0.980$
- 2) 物体力モデル: $\kappa = 0.855$
- 3) 混合モデル: $\kappa = 0.913$

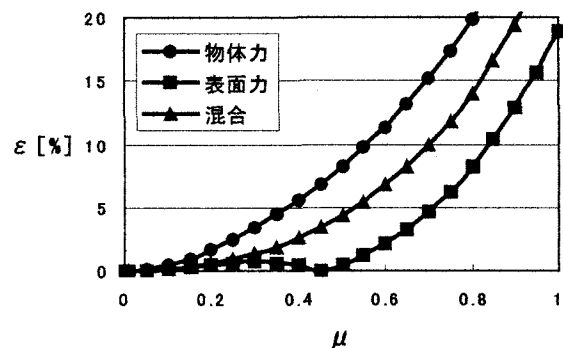


図-5 中央点Cのたわみ誤差 (基準: 表面力モデル)

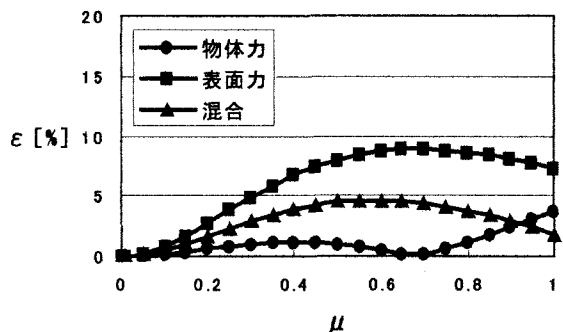


図-6 中央点Cのたわみ誤差 (基準: 物体力モデル)

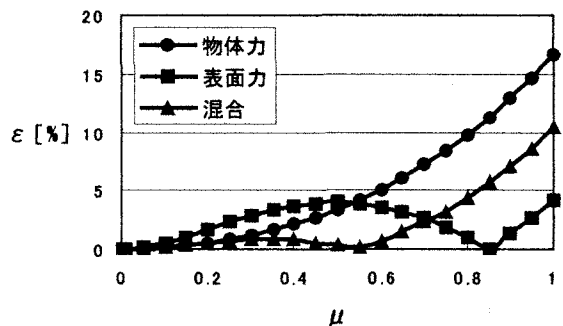


図-7 中央点Cのたわみ誤差 (基準: 混合モデル)

図-5は、三次元解析における“表面力モデル”を基準として誤差評価を行った結果である。図から明らかなように、3つの厚板解析の中では、“表面力モデル”の結果が最も良好な近似解を与えている。補正係数 κ の値に着目して解析結果を評価する。厚板解析における3つのモデルの中では、“物体力モデル”の κ が $\kappa = 0.855$ で $5/6$ に最も近い値になっている。しかしながら、解析の精度は3つのモデルの中では最も悪く、図-5からも明らかなように、幅厚比 μ がかなり小さな段階から大きな誤差を生じている。結局、誤差解析の基準解として、三次元解析の“表面力モデル”の結果を選択した場合、平板理論の荷重構成比率パラメータについても“表面力モデル”に対応した値を選択しない限り、広範囲の幅厚比に亘って良好な近似解を得ることは難しい。

同様な結果は、基準解として他のモデルの三次元解析を用いた場合についても確認することができる。図-6および図-7を見ると明らかなように、基準解として“物体力モデル”の結果を用いた場合には、厚板解析も“物体力モデル”、“混合モデル”の結果を基準解として用いた場合には、厚板解析も“混合モデル”の解析結果が最も広範囲の幅厚比に亘って良好な近似解を与えている。

換言すれば、古典理論のうちReissner理論¹⁾を用いて解析するならば、荷重状態が上面に作用する表面力のみでの三次元解析を良好に近似し、Mindlin理論を用いるならば、せん断補正係数 κ の値を荷重状態に応じて適切に算定する必要があることになる。

なお、Poisson比を $\nu = 0.45$ とした場合にも同様な結果が得られている。

5.3 曲げモーメント

この節では、平板の中央点Cにおける、曲げモーメントに関する解析結果について述べる。解析結果を図-8～図-10に示す。図中、横軸には平板の幅厚比 μ を、縦軸には厚板修正理論を用いて得られた無次元化曲げモーメントの誤差 ε をとって示した。誤差 ε を算出するための基準解は、三次元弾性論に基づく式(47)によって求めた。また、プロットの表示については、たわみの誤差解析結果を示した図-5～図-7と同一である。たわみと同様に、結果はPoisson比の値に依らず、ほぼ同様の傾向を示すが、ここではPoisson比 $\nu = 0.45$ の場合の結果を示した。Poisson比を $\nu = 0.45$ とした時の、式(37)～(39)における補正係数 κ の値は、荷重の構成比率に応じて以下の値をとる。

- 1) 表面力モデル: $\kappa = 1.075$
- 2) 物体力モデル: $\kappa = 0.866$
- 3) 混合モデル: $\kappa = 0.959$

図-8は、三次元解析における“表面力モデル”を基準として誤差評価を行った結果であり、図-9は“物体力モデル”を基準とした結果、図-10は“混合モデル”を基準とした結果をそれぞれ示している。

図から明らかなように、曲げモーメントについても、たわみの場合と全く同様の結果が得られている。すなわち、基準とした三次元解析の荷重状態に応じて荷重構成比率

パラメータを選択することで、厚板修正理論によって最も良好な近似解が得られる。特に、曲げモーメントの場合、この傾向が顕著であり、三次元解析の荷重状態に合わせて荷重構成比率パラメータを設定すれば、図に示した幅厚比の範囲内では、誤差が全て1.0[%]未満に抑えられている。

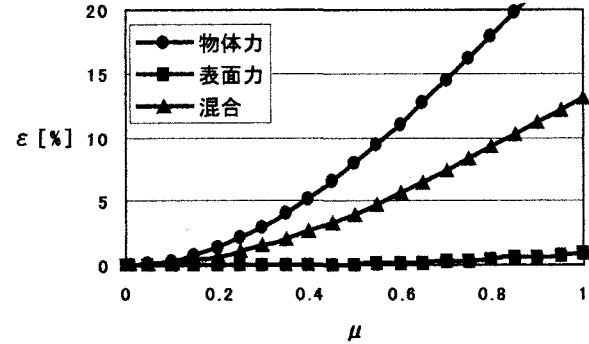


図-8 中央点Cのモーメント誤差(基準:表面力モデル)

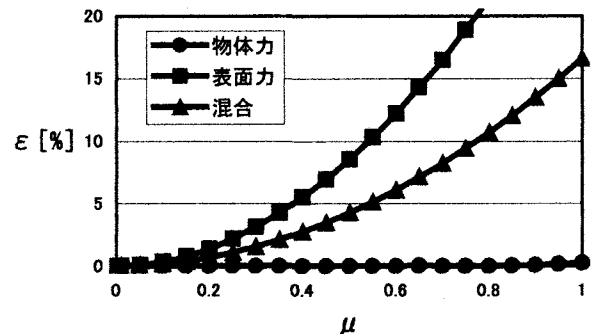


図-9 中央点Cのモーメント誤差(基準:物体力モデル)

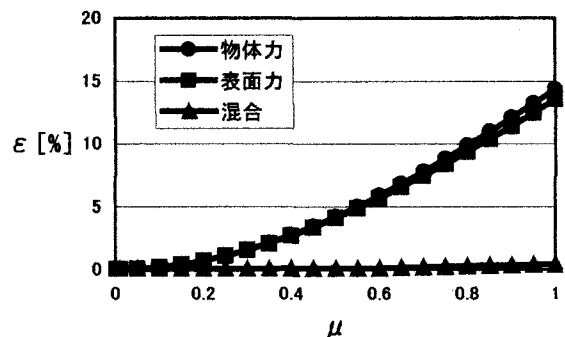


図-10 中央点Cのモーメント誤差(基準:混合モデル)

6. 結論

本研究の解析結果から、以下の結論が得られた。

- 1) 平板の横荷重に占める物体力と表面力との構成比率をパラメータとする、厚板解析理論の定式化を行った。構築した平板理論は、厚板の古典理論と同様の簡明さを保持している。

- 2) 物体力および表面力の荷重構成比率は、平板理論に基づく解析の精度に著しい影響を及ぼす。本論文の修正理論において、荷重構成比率パラメーターの値を適切に設定すれば、対応する三次元弾性解析結果のうち、板中央面に関する結果については、良好な精度で近似することができる。
- 3) 荷重の構成比率に応じて、古典理論におけるせん断補正係数を合理的に算定するための、簡易算定式を提案した。

参考文献

- 1) Reissner, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.12, pp.A69-A77, 1945.
- 2) Mindlin, R. D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 3) Reissner, E.: On Bending of Elastic Plates, *Quart. Appl. Mech.*, Vol.5, pp.55-68, 1947.
- 4) Schmidt, R.: A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation, *J. Industrial Math. Soc.*, Vol.27, pp.23-38, 1977.
- 5) Reissner, E.: On Transverse Bending of Plates including the Effects of Transverse Shear Deformation, *Int. J. Solid and Struct.*, Vol.11, pp.569-573, 1975.
- 6) Rehfield, L. W., and Murthy, P. L. N.: Tward a New Engineering Theory of Bending: Fundamentals, *AIAA Journal*, Vol.20, No.5, pp.693-699, 1982.
- 7) Rehfield, L. W., and Valisetty, R. R.: A Simple, Refined Theory for Bending and Stretching of Homogeneous Plates, *AIAA Journal*, Vol.22, No.1, pp.90-95, 1984.
- 8) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation – I. Homogeneous Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.44, pp.663-668, 1977.
- 9) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: A High Order Theory of Plate Deformation – II. Laminated Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.44, pp.669-676, 1977.
- 10) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, E. M.: Stress Solution Determination for High Order Plate Theory, *Int. J. Solid and Struct.*, Vol.14, pp.655-662, 1978.
- 11) S. A. アムバシツミヤン (神谷紀生 訳) : 異方弾性板の理論, 森北出版, 1975.
- 12) Voyiadjis, G. Z., and Baluch, M. N.: Refined Theory for Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, *J. Sound Vib.*, Vol.76, pp.57-64, 1981.
- 13) Reissner, E.: A Twelfth Order Theory of Transverse Bending of Transversely Isotropic Plates, *ZAMM*, Vol.63, pp.285-289, 1983.
- 14) 平島健一, 村松正重: 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, *土木学会論文報告集*, Vol.304, pp.33-46, 1980.
- 15) 平島健一, 根岸嘉和: 異方性・層状性を考慮した平板の高次近似理論, 第36回土木学会年次学術講演会概要集・第1部, pp.29-30, 1981.
- 16) 平島健一, 根岸嘉和: 板厚方向の成分を考慮した代表的な2次元化平板理論の精度に関する考察, *土木学会論文報告集*, Vol.330, pp.1-14, 1983.
- 17) 平島健一, 根岸嘉和: 数種の平板理論の動特性 (自由振動と分散特性) に関する研究, *土木学会論文報告集*, Vol.333, pp.21-34, 1983.
- 18) Krenk, S.: Theory for Elastic Plates Via Orthogonal Polynomials, *J. Appl. Mech.*, Vol.48, pp.900-904, 1981.
- 19) 古賀達蔵, 遠藤修司: 弾性平板の高次理論への試み, *日本機械学会論文集 (A編)*, Vol.48, No.430, pp.818-826, 1982.
- 20) 古賀達蔵: 平板の曲げに関する高次理論の定式, *日本機械学会論文集 (A編)*, Vol.48, No.433, pp.1151-1159, 1982.
- 21) Igarashi, S., and Takizawa, E. I.: On the equation of deflection of a thick plate, *Ingenieur-Archiv*, Vol.54, pp.465-475, 1984.
- 22) Levinson, M.: A New Rectangular Beam Theory, *J. Sound Vib.*, Vol.74, pp.81-87, 1981.
- 23) 土木学会: 構造力学公式集, 第2版, 1999.

(2004年4月16日 受付)