

領域型積分方程式の多重スケール分解の定式化 に基づく散乱波の解析

multiscale decomposition of a volume integral equation for analyses of scattered waves

東平光生*

Terumi TOUHEI

*正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

A multiscale decomposition of a volume integral equation is presented for analyses of scattered waves. The integral equation is constituted by dynamic Green's functions for a homogeneous space or a layered half space. The method for the multiscale decomposition is carried out based on the usage of the Haar scaling functions and wavelets. Several numerical calculations were carried out to verify the possibility of the Haar scaling functions and wavelets for the present type of the integral equation and to investigate the scale effects of the wave field on the scattering waves.

Key Words : multiscale decomposition, scattering problem, volume integral equation

1. はじめに

波動の散乱は、地中を伝播する波動の問題や、材料の検査の問題などにまたがる裾野の広い問題である。1980 年前後からの積分方程式を用いた数値解法の急速な普及によって、波動散乱に関する研究論文や成書もこれまでに数多く出されてきた(たとえば¹⁾⁻³⁾)。こうした数多くの研究の一方、媒質に微小な揺らぎがある場合、それがどのように散乱波に影響を与え、どのように遠方へ伝播するかについては、今後の研究に待つことも多いと思われる。たとえば、媒質の揺らぎの空間変動のスケールは、それに応じた影響を散乱波にもたらすのどうかという問題を考えてみると、これは理論解析および数値解析の両面から検討すべき今後の課題と思われる。

本論文では、この媒質の揺らぎのスケールと散乱波との関係を考察するための数値解析手法の展開を試みることを目的とする。想定する波動場は、有限の不均質場が均質な外部領域に覆われたものとする。この波動場を数値的に解く方法としては、不均質領域に有限要素法や差分法を用い、外部領域には境界積分方程式を用いるものが、現在では最もスタンダードな方法と思われる。しかしながら、媒質の揺らぎのスケールを問題にすると、領域型の積分方程式を用いることも一つの選択肢と考えられる。これは、後述のように領域型の積分方程式が不均質場内部の揺らぎと外部領域へ広がる散乱波を直接関連づけることができるためである。

領域型積分方程式の波動問題への適用は、実際には Kitahara et al⁴⁾ や Niwa et al⁵⁾ によって行われてきた。これらの研究では静的弾性体の Green 関数を用いて、不均質領域に対して領域型の積分方程式を導出し、境界積分方程式と組み合わせる手法を提案している。この領域型積分方程式を歴史的にさかのばれば、Lippmann-

Schwinger 方程式¹⁾ と呼ばれるタイプのものが音響波動場や量子論などで用いられてきている。このタイプの積分方程式では、均質波動場の Green 関数、すなわち静的 Green 関数でなく動的な Green 関数を用いる点に特徴がある。Lippmann-Schwinger 方程式では、動的 Green 関数の複雑さを積分方程式で考慮する必要があるものの、均質場としての外部領域に対して境界積分方程式を援用することは不要である。この結果、前述のように不均質場内部の揺らぎと外部へ広がる散乱波を直接関連づけることができるようになる。

こうした背景から、本論文では、媒質の揺らぎと散乱波の問題を扱うために、領域型の積分方程式として Lippmann-Schwinger 方程式のタイプを選ぶ。もちろん、数値計算の側面から Lippmann-Schwinger 方程式を見ると、波動場の空間の次元が上がるにつれ、密で大規模な行列を扱う必要が生じることから、不均質場を有限要素法や差分法で離散化するよりも大きなメモリ容量が要求され不利な面もある。しかしながら、媒質の揺らぎのスケールの問題を考えると、ウェーブレット基底を導入して方程式を離散化することは自然な方法と考えられ、領域型の積分方程式ではこのスケールに応じた積分方程式の分解も可能になる。本論文は、以上の観点から媒質の揺らぎのスケールの問題と積分方程式のこのスケールに応じた分解の方法を Haar のウェーブレット⁶⁾ を用いて示すとともに、これに基づく、いくつかの数値計算結果をまとめている。

2. 領域型積分方程式の定式化について

ここでは、領域型の積分方程式として、Lippmann-Schwinger 方程式のタイプの積分方程式を音響波動場ならびに弾性波動場について示す。音響波動場と弾性波動場での Lippmann-Schwinger 方程式の定式化の対

比を通して、弾性波動場での領域積分方程式の積分核の特徴についても言及する。

2.1 音響波動場

周波数領域の音響波動場は次の Helmholtz 方程式によって記述される。

$$\nabla^2 u(x) + k(x)^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

ここに、 $\mathbb{R}^n$ は n 次元ユークリッド空間、 u はポテンシャル、 ∇^2 はラプラシアン、 $k(x)$ は波数を示し、本論文では以下の空間変動を仮定する。

$$k(x)^2 = k_0^2(1 - m(x)) \quad (2)$$

ここに、 k_0 は空間的に一定の値、もしくは空間的に変動したとしても Green 関数 $g(x, y)$ が次式

$$(\nabla^2 + k_0^2) g(x, y) = -\delta(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

から、構成できるだけの変動を示すものとする。たとえば、成層波動場がひとつの例である。また、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。また、 $m(x)$ は波数の空間的な揺らぎで、 $m(x)$ のサポートは有界とする。すなわち、ある有界な集合 B が存在して

$$\text{supp } m(x) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid m(x) \neq 0\}} \subset B \quad (4)$$

とできるものとする。ただし、 $\overline{\{\}}$ は集合の閉包を示す。式 (1) の解を積分方程式で表現するため、まず、式 (1) を次のように変形する。

$$\nabla^2 u(x) + k_0^2 u(x) = k_0^2 m(x) u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5)$$

式 (5) の右辺を非同次項とみなすことで、式 (1) の解は次のような Lippmann-Schwinger 方程式で表現できることは容易に理解できよう。

$$u(x) = f(x) - \int_B g(x, y) k_0^2 m(y) u(y) dy \quad (6)$$

($x, y \in \mathbb{R}^n$)

ここに、 $f(x)$ は媒質に揺らぎが存在しないときの Helmholtz 方程式の同次解である。この方程式の積分範囲は媒質の揺らぎの被覆領域 B で行えばよい。媒質の被覆の形状は任意でよく、この意味で積分方程式を数値的に解くための離散化の難易は、媒質の揺らぎの形状にそれほど左右されない。

なお、Green 関数は具体的には 3 次元の均質場では

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} \exp(-ik_0|x - y|) \quad (7)$$

である。また、成層構造の音響波動場を扱う場合には、次のような Hankel 変換で表された Green 関数

$$g(x, y) = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \hat{g}_\xi(x_3, y_3) d\xi \quad (8)$$

もしくは、ここから誘導できる Green 関数のスペクトル表現⁷⁾⁸⁾を用いればよい。ただし、式 (8) では J_0 は

0 次の第 1 種 Bessel 関数、 r はソース点と観測点との水平距離、 x_3 および y_3 は観測点ならびにソース点の鉛直座標、 $\hat{g}_\xi$ は波数領域の Green 関数であり、次式を満足する。

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} + k_0^2 - \xi^2\right) \hat{g}_\xi(x_3, y_3) = -\delta(x_3 - y_3) \quad (9)$$

2.2 弾性波動場

弾性波動場を特徴づける Lamé の定数ならびに質量密度に対して次のような空間変動を仮定する。

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1(x) \\ \mu &= \mu_0 + \mu_1(x) \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 λ および μ は Lamé の定数、 ρ は質量密度である。そして、 λ_0 、 μ_0 、 ρ_0 は空間的に一定、もしくは空間的に変動したとしても、その変動が Green 関数の構成に大きな障害にならないものとする。たとえば、成層構造をなす波動場では、Green 関数の構成には大きな困難はないと考えられるので、このようなケースも λ_0 、 μ_0 、 ρ_0 の変動に含めることにする。それに対して、 λ_1 、 μ_1 、 ρ_1 は媒質の空間的な揺らぎを表す。音響波動場と同様に、これらのサポートは有界とする。このときの弾性波動場は、次の方程式を満足する。

$$L_{ij}^{(0)} u_j = -L_{ij}^{(1)} u_j - \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \cdot 2\epsilon_{ij} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \epsilon_{kk} \quad (11)$$

ここに、 $L_{ij}^{(\tau)}$ 、 $(\tau = 0, 1)$ は弾性波動場の支配方程式に関する演算子で次のように表せる。

$$L_{ij}^{(\tau)} = (\lambda_\tau + \mu_\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \mu_\tau \delta_{ij} \nabla^2 + \rho_\tau \omega^2 \delta_{ij} \quad (12)$$

ただし、 ω は角振動数、添え字の τ は 0 または 1 をとり、添え字の i, j, k は座標成分を表す。また、 u_j は変位ベクトルの成分、 ϵ_{ij} はひずみテンソルの成分で

$$\epsilon_{ij} = (1/2) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

である。また、式 (11) では添え字に関して総和規約を用いている。式 (11) の右辺を非同次項とみなすことで、式 (11) の解は次式で表される。

$$\begin{aligned} u_i(x) &= f_i(x) + \int_B g_{ij}(x, y) \left(L_{jk}^{(1)} u_k(y) \right) dy \\ &\quad + \int_B g_{ij}(x, y) \left(\frac{\partial \mu}{\partial y_k} \cdot 2\epsilon_{jk}(y) + \frac{\partial \lambda}{\partial y_j} \epsilon_{kk}(y) \right) dy \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $g_{ij}(x, y)$ は次式で定義される Green 関数である。

$$L_{ij}^{(0)} g_{jk}(x, y) = -\delta_{ik} \delta(x - y) \quad (15)$$

また、音響波動場と同様に、式 (14) の B は媒質の揺らぎの領域の被覆である。

式 (14) に示す積分方程式は積分核の部分で変位の微分演算が必要であり、この点が音響波動場の Lippmann-Schwinger 方程式と決定的に異なっている。ここでは変位に対して 2 階の導関数が要求されるが、波動場を 2 次元もしくは 1 次元とし、S 波のみの伝播を仮定すれば、変位に関する微分演算の階数は減らすことが可能である。以下、このことを見てみよう。

S 波のみの伝播を仮定した場合、1 次元または 2 次元空間での波動方程式は次式となる。

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u(x)) + \rho \omega^2 u(x) = 0 \quad (16)$$

この式を μ で除し、若干の変形を施すことで次の積分方程式に帰着させることができる。

$$u(x) = f(x) - \int_B g(x, y) k_0^2 m(y) u(y) dy + \int_B g(x, y) \frac{1}{\mu(y)} \nabla \mu(y) \cdot \nabla u(y) dy \quad (17)$$

ここに

$$k_0 = \omega / \sqrt{\mu_0 / \rho_0} \quad (18)$$

$$m(y) = -\frac{\rho_1(y)}{\rho_0} + \frac{\mu_1(y)/\mu_0}{1 + \mu_1(y)/\mu_0} \left(1 + \frac{\rho_1(y)}{\rho_0}\right) \quad (19)$$

であり、 $g(x, y)$ は次で定義された Green 関数である。

$$(\nabla^2 + k_0^2)g(x, y) = -\delta(x - y) \quad (20)$$

弾性波動場での領域積分方程式の離散化に際しては、変位の微分演算の扱いに対して、通常は二つの方策が考えられる。一つは変位の微分演算に必要な次数の補間関数を用いる方法であり、もう一つは、部分積分を施して変位に必要な微分演算を消去する方法である。変位に必要な微分演算を部分積分で消去する場合、それだけ強い滑らかさが弾性定数に解析データとして要求される。上述の二つの方法以外の可能性としては、低次の補間関数を用い、補間関数の導関数の表現にデルタ関数を用いる方法が考えられる。これは、デルタ関数の特異性は積分方程式の積分演算の中で取り扱いが容易であることによる。本論文では積分核の変位の微分演算をそのままにして、かつ Haar のスケーリング関数およびウェーブレットを用いて積分方程式の離散化を行う方法の可能性を後述の数値計算例で言及する。

3. 領域積分方程式の多重スケール分解について

以下では式 (6) あるいは式 (17) のタイプの積分方程式を、便宜上

$$u = f - Au \quad (21)$$

と表現する。ここでの問題は、媒質の空間変動が比較的ゆるやかな変動 (large scale) と局所的な細かな変動 (small scale) に分解できる状況を扱う。たとえば、弾

性波動場ではせん断弾性係数の変動 μ_1 が次のように分解できる状況を考える。

$$\mu_1(x) = \mu_L(x) + \mu_S(x) \quad (22)$$

ここに、 $\mu_L(x)$ は large scale で変動するせん断弾性係数、 $\mu_S(x)$ は small scale で変動するせん断弾性係数を示す。同様に音響波動場では、次のように媒質の変動が表現されるものとする。

$$m(x) = m_L(x) + m_S(x) \quad (23)$$

弾性波動場と同様、 $m_L(x)$ は音響場の波動伝播速度の large scale の変動、 $m_S(x)$ は small scale の変動をあらわす。

有限要素法などに見られる領域型解法では局所的な細かな媒質の変動の領域に対しては細かいメッシュによる離散化を施すことは自然な方法と言える。ここでの積分方程式の離散化に対しても、この方策を採用することを考える。そのために、式 (22) あるいは (23) で示した媒質の変動の構造に着目し、積分方程式の解を次のように分解することを考える。

$$u(y) = u_L(y) + u_S(y), \quad (y \in B) \quad (24)$$

ただし、 u_S のサポートは small scale の媒質の変動の領域を被覆しているものとし、さらに u_S は u_L に比べ細かい変動を表現するものとする。式 (24) に見られるような場の量のスケールに応じた加法的な分解は Hughes⁹⁾ によって変分積分に対して行われている。ここでは、こうしたスケールによる場の量の分解を領域積分方程式に対して行うことを考える。以下では、 u_L を large scale solution、 u_S を small scale solution と呼ぶ。

3 次元音響波動場で Haar のスケーリング関数とウェーブレット⁶⁾を用いて、スケールに応じた解の分解を行う方法を以下に示す。表記を簡単にするために、まず Haar の box 関数を ϕ で表す。すなわち、

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (25)$$

そして、ここから生成される Haar のスケーリング関数次のように表記する。

$$\phi_{m,k}^{(1)}(x) = 2^{m/2} \phi(2^m x - k), \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad (26)$$

ここに、添え字の (1) はスケーリング関数であることをあらわし、 $\mathbb{Z}$ は整数の集合、 m は解像度を表すスケールパラメータである。また、Haar の Box 関数で定義できるウェーブレットは

$$\phi_{m,k}^{(2)}(x) = 2^{m/2} \psi(2^m x - k), \quad m, k \in \mathbb{Z} \quad (27)$$

と表記し、ここに

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (28)$$

である。ただし、添え字の (2) はウェーブレット基底であることを示す。解像度 m のスケーリング関数で large

scale solution を上記の表記法で表現すれば、

$$u_L(y) = \sum_{k \in K_L \subset \mathbb{Z}^3} \alpha_k \phi_{m,k_1}^{(1)}(y_1) \phi_{m,k_2}^{(1)}(y_2) \phi_{m,k_3}^{(1)}(y_3) \quad (29)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} k &= (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \\ y &= (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (30)$$

である。式 (29) の K_L は $u_L(y)$ のサポートが媒質の変動領域の被覆 B をさらに覆うように決められる集合である。同様に small scale solution を解像度 m 以上で表現すれば、

$$u_S(y) = \sum_{m' \geq m} \sum_{k \in K_S \subset \mathbb{Z}^3} \sum_{p \in D} \beta_k^{(p)} \times \phi_{m',k_1}^{(p_1)}(y_1) \phi_{m',k_2}^{(p_2)}(y_2) \phi_{m',k_3}^{(p_3)}(y_3) \quad (31)$$

となる。ただし、

$$p = (p_1, p_2, p_3) \quad (32)$$

であり、 D は次のように定義された集合である。

$$D = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid 1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 2, p_1 p_2 p_3 \neq 1\} \quad (33)$$

また、式 (31) での集合 K_S は媒質の small scale の変動の領域を u_S のサポートが被覆できるように考える。

それぞれの解の解像度と集合 K_L および K_S を定めることで積分方程式の解 $u(y)$ と large scale solution $u_L(y)$ および small scale solution $u_S(y)$ が射影演算子 P, Q を用いて次のように結ばれることになる。

$$\begin{aligned} u_L(y) &= (Pu)(y) \\ u_S(y) &= (Qu)(y) \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、演算子 P, Q の演算の規則は式 (29) および (31) に現れる係数 α_k と $\beta_k^{(p)}$ を次式で定め、

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \int_B u(y) \phi_{m,k_1}^{(1)}(y_1) \phi_{m,k_2}^{(1)}(y_2) \phi_{m,k_3}^{(1)}(y_3) dy, \\ k &= (k_1, k_2, k_3) \in K_L \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \beta_k^{(p)} &= \int_B u(y) \phi_{m',k_1}^{(p_1)}(y_1) \phi_{m',k_2}^{(p_2)}(y_2) \phi_{m',k_3}^{(p_3)}(y_3) dy, \\ m' &\geq m, k = (k_1, k_2, k_3) \in K_S \end{aligned} \quad (36)$$

再び式 (29) および (31) の級数で u_L と u_S を表現することを意味する。なお、式 (35) と (36) では、スケーリング関数あるいはウェーブレットのテンソル積のサポートが領域 B を被覆する条件で積分演算が実行されることに注意する。

スケールに応じた射影演算子が定義できたところで、積分方程式、 $u = f - Au$ に戻る。この積分方程式の両辺に射影演算子 P と Q を乗じ、二つの積分方程式をつくる。

$$u_S + QAu_S = Qf - QAu_L \quad (37)$$

$$u_L + PAu_L = Pf - PAu_S \quad (38)$$

これらの積分方程式を解くことで small scale solution u_S と large scale solution u_L が得られ、それらを加えることで積分方程式 $u = f - Au$ の解を得ることができる。また、式 (37) を次のように変形し、

$$u_S = (I + QA)^{-1} (Qf - QAu_L) \quad (39)$$

これを式 (38) に代入することで、方程式の未知量を large scale solution のみとすることも可能である。また、式 (39) によって large scale solution と small scale solution の関係を調べることも可能となる。

ここで得られた積分方程式のそれぞれのスケールの解が遠方にどのように伝播するかは、積分方程式にもどり、次式を計算すれば良い。

$$\begin{aligned} u_T(x) &= f(x) \\ &\quad - \int_B g(x, y) k_0^2 m(y) (u_L(y) + u_S(y)) dy \\ &\quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in B) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_L(x) &= - \int_B g(x, y) k_0^2 m(y) u_L(y) dy \\ \bar{u}_S(x) &= - \int_B g(x, y) k_0^2 m(y) u_S(y) dy, \\ &\quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in B) \end{aligned} \quad (41)$$

ここでは $\bar{u}_L(x)$ および $\bar{u}_S(x)$ は不均質領域の被覆 B で求められた large scale および small scale の解が遠方へどのように伝播するかを示すものである。そして、これらの解と自由場の応答 f を加えて式 (40) の全波動場 (total field solution) u_T が求められることになる。

ここで示した積分方程式の分解は、異なるスケールの媒質の変動の領域を、それぞれのスケールの解のサポートで被覆することを通して実現される。この加法的な分解が可能になる背景として以下の二点が重要である。一つは、採用した領域積分方程式が不均質領域を被覆した領域に関して構成されることである。これによって、異なるスケールの媒質の変動の領域の解のサポートによる被覆という観点が生まれてくる。もう一つは、スケーリング関数とウェーブレットが直交することで解の一意的な分解を容易にしていることである。

4. 数値計算例

4.1 Haar のスケーリング関数およびウェーブレットの可能性

前述の Haar のスケーリング関数を用いた積分方程式の扱いは、式 (17) のタイプの方程式のように積分核で変位の微分演算が要求される場合にも可能である。ここではこの問題を数値計算を通して実証する。検証は図-1 に示すような軟弱層を通過する一次元の S 波の伝播の問題を扱う。スケーリング関数およびウェーブレットの導関数は Haar の Box 関数の導関数を次のように定義することで構成する。

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \delta(x) - \delta(x-1), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (42)$$

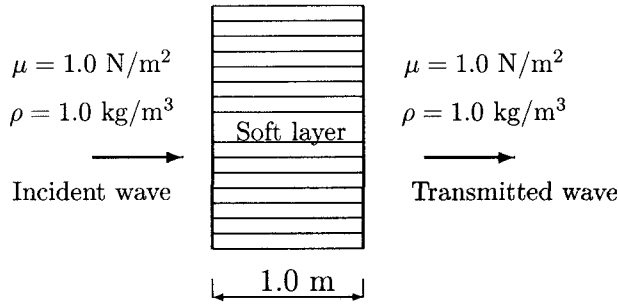


図-1 一次元弾性波動場の解析モデル

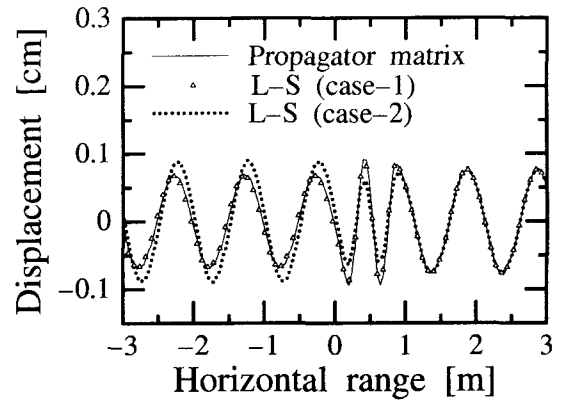


図-3 伝達マトリックス法と積分方程式の解の比較

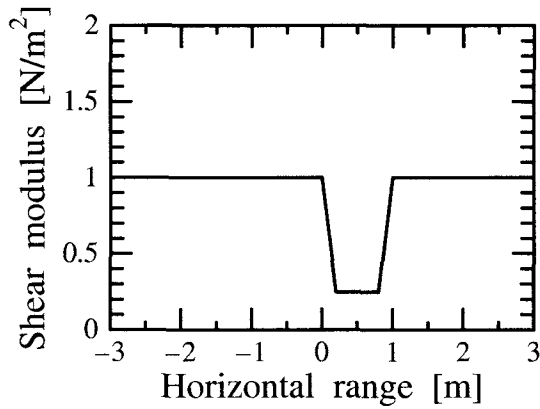


図-2 一次元波動場のせん断弾性係数の変化

また、解析モデル図-1における数値計算に用いるせん断弾性係数の変化を図-2に示す。数値計算は伝達マトリックス法の結果と積分方程式の解の比較を行う。比較の結果を図-3に示す。図中、case-1は積分方程式の解の計算に必要な変位の導関数を前述の手法で考慮した場合、case-2は導関数の影響を無視した場合である。また、これらの解はスケーリング関数およびウェーブレットの解像度を $m = 6$ とし、これらで軟弱層全体の被覆をとり計算したものである。比較によれば、伝達マトリックス法の結果と case-1 の結果は概ね良好に一致している。一方、case-1 と case-2 の積分方程式の解の結果では軟弱層の後方で振幅に差異が見られる。そして、case-1 の結果では case-2 に比べ解が改善されている。これは、Haar のスケーリング関数ならびにウェーブレットの導関数をデルタ関数で表現し、積分方程式を解くことの積極的な効果を意味するものと言える。

一般的な弾性波動場での積分方程式では変位について2階の導関数まで要求されるが、ここで述べた Haar のスケーリング関数およびウェーブレットを用いる方法の可能性について検討を行う価値はあるものと考えられる。この点について、以下若干の見通しを述べる。まず、Haar のスケーリング関数の2階の導関数は次のように表すことができる。

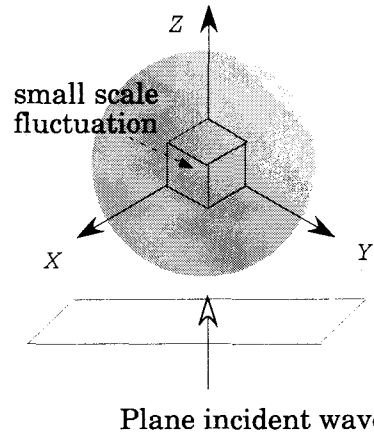


図-4 三次元音響波動場の解析モデル

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \delta'(x) - \delta'(x-1), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (43)$$

ここに、 δ' はデルタ関数の導関数である。デルタ関数の導関数は、積分演算の中で以下のように扱える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = -f'(0) \quad (44)$$

ただし、 $f(x)$ はコンパクトなサポートを持つ微分可能な関数である。したがって、領域積分方程式の中では、Haar のスケーリング関数の2階の導関数は Green 関数の導関数を計算することに帰着される。

4.2 三次元無限媒質での音響波動場

次に、三次元無限音響波動場中の不均質領域に平面波が入射して生じる散乱波の問題を扱う。解析モデルの概念図を図-4に示す。座標系は図に示すような (x, y, z) の直交座標を用いるが、以下では球座標 (r, θ, φ) を用いる場合もある。ここでは不均質領域は球状に広がっており、その内部に small scale の不均質領域の存在を仮定する。この small scale の不均質領域が無い場合には、散乱問題の解は球 Hankel 関数を用いた Helmholtz 方程式の解表現を用いることが可能である。

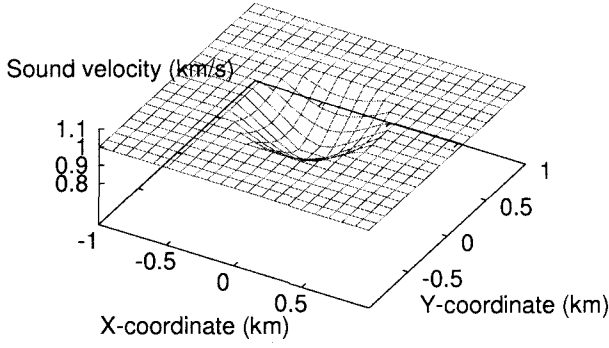


図-5 $z = 0$ 平面での波動伝播速度 (small scale の変動は除く)

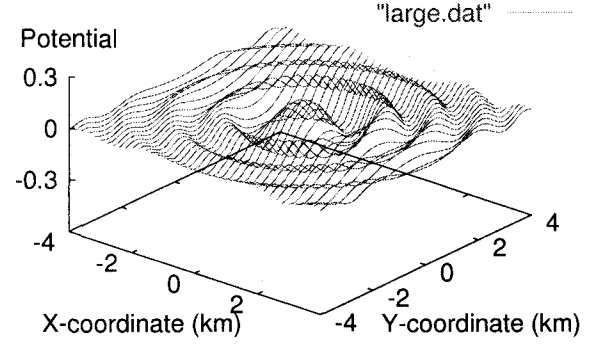


図-7 $z = 2$ km での large scale solution の分布

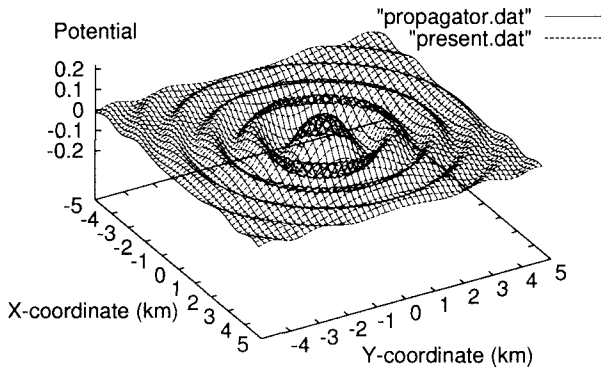


図-6 $z = 2$ km 位置での変位ポテンシャルの比較

すなわち、まず平面波を次のように展開する¹⁰⁾。

$$\exp(-ik_0 z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n P_n(\cos \theta) j_n(k_0 r) \quad (45)$$

そして、散乱波はこれに合わせる形で以下のように展開する。

$$u_s = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n P_n(\cos \theta) \times (A_n(r)h_n^{(1)}(kr) + B_n(r)h_n^{(2)}(kr)) \quad (46)$$

ただし、 j_n 、 $h_n^{(1)}$ および $h_n^{(2)}$ はそれぞれ、 n 次の球 Bessel 関数、第 1 種球 Hankel 関数、第 2 種球 Hankel 関数、 P_n は n 次の Legendre 多項式である。また、 A_n 、 B_n は r の関数であり、これを決定するように球を球殻に分割し伝達マトリックス法を構成すれば良い。ただし、球の中心部では解が有界であること、球の外部では散乱波は外向波となる条件を導入する。数値計

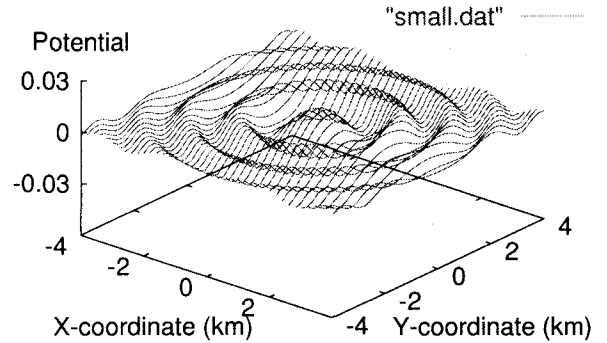


図-8 $z = 2$ km での small scale solution の分布

算は、球の半径を 0.5 km とする。そして small scale の速度の揺らぎの無い場合の波動場の速度構造を図-5 に与える。図-5 に示すように、球の外部では速度は 1.0 km/s であり、球の中心に向かって速度は低下し、中心部では 0.8 km/s となる。解析振動数を 1 Hz としスケール関数とウェーブレットの解像度を $m = 2$ とした場合の伝達マトリックス法と散乱波動場 (large + small scale solution) の比較を図-6 に示す。ここでは、複素応答の実数部を示している。また、積分方程式を解くにあたって、スケール関数およびウェーブレットは、共に全球を覆うように設定し、数値積分は Gauss の 2 点積分公式を用いた。Green 関数の特異点を含む積分では、次のように Gauss の発散定理から得られる等式を利用して特異点をさけるようにした。

$$\int_V \frac{1}{|x-y|} dV(y) = (1/2) \int_S \frac{\partial |x-y|}{\partial n(y)} dS(y) \quad (47)$$

ここに、 S は V を囲む面、 $|x-y|$ は x と y の距離、 n は曲面 S の法線を示す。図-6 の両結果の比較では、結果をわかりやすくするために、伝達マトリックス法の結果を X 軸に平行な実線で、積分方程式の結果を Y 軸

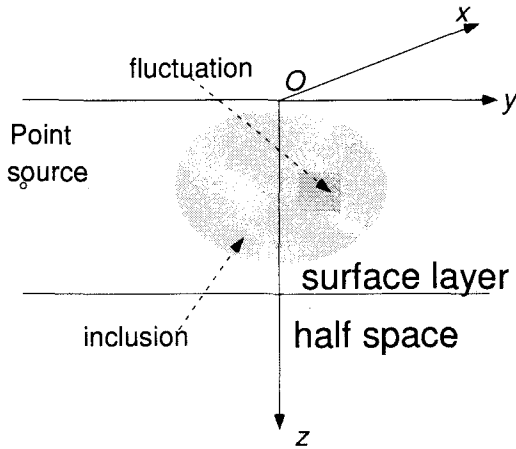


図-9 成層波動場を用いた解析モデル

に平行な破線で示している。図-6によれば二つの手法による解は良好に一致しており積分方程式の解の妥当性ならびに解を求める上での解像度が適切であることが示されている。

次に、球内の不均質領域内の小さな部分に不均質領域を設定してみる。ここでは、この領域を B_S とし以下のように定義する。

$$B_S = \{(x, y, z) | 0 \text{ km} \leq x, y, z \leq 0.2 \text{ km}\} \quad (48)$$

また、領域 B_S 内での波動の伝播速度は 0.6 km/s とする。

図-7および8は領域 B_S を small scale の変動の領域と考え、large scale と small scale の解が遠方にどのように伝播するかを $z = 2 \text{ km}$ の平面で示したものである。ここでも、複素応答のうち、実数部を示している。large scale の解を計算するためのスケールパラメータは $m = 3$ とし、この解像度のウェーブレットで B_S を被覆し small scale の解を計算した。これによると、small scale の解の振幅は large scale の解の振幅のおよそ $1/10$ 程度になっている。一方で散乱波の伝播のパターンは両方で類似したものになっている。今回の small scale の媒質の変動は球の中心部に近いこと、また平面入射波の波長が small scale の媒質の大きさに比べ長いことが、散乱波の伝播のパターンを類似させたものと考えられる。こうした場合、不均質領域の外部の情報が二つのスケールの解の波動伝播により大きな影響を与えていると言える。

4.3 成層波動場での散乱波の伝播について

次に、成層媒質での散乱問題を扱う。解析モデルの概念図を図-9に示す。ここでは、2層からなる弾性流体の波動場を考え、表層中の点源で波動を発生させ、不均質領域に照射する。表層および半無限層での音波速度を 1.0 km/s および 2.0 km/s とする。また、表層の厚さを 1.0 km とし、不均質領域は表層にあるものとする。座標系は図-9に示すとおりであり、 $z = 0$ を媒質の自由表面にとる。また、large scale としての表層中の不均質領域を B_L であらわし、ここでは以下のように

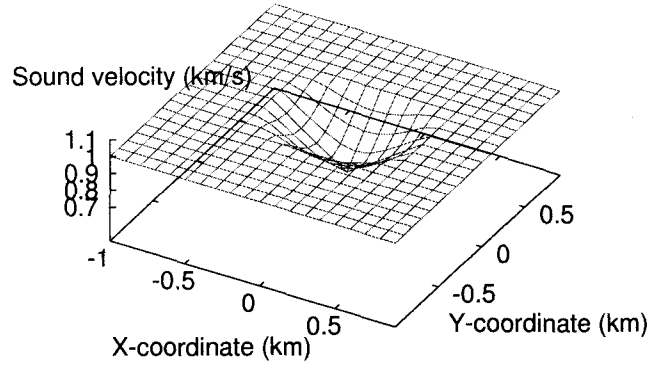


図-10 $z = 0.5 \text{ km}$ 位置での波動伝播速度の分布 (small scale の変動は除く)

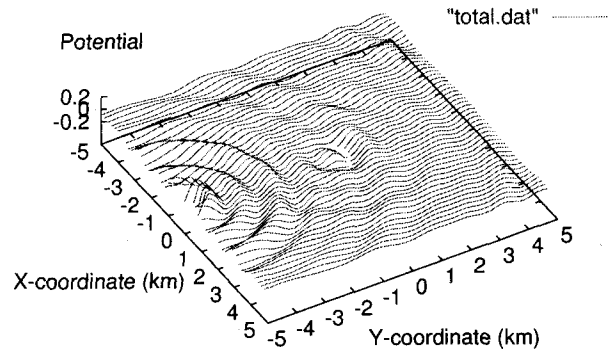


図-11 $z = 0.2 \text{ km}$ 位置での全波動場

に定める。

$$B_L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x/a)^2 + (y/b)^2 + ((z-d)/c)^2 \leq 1\} \quad (49)$$

ただし、 $a = 0.5 \text{ km}$, $b = 0.4 \text{ km}$, $c = 0.2 \text{ km}$ および $d = 0.5 \text{ km}$ としている。波動の伝播速度はこの内部で減少する。 $z = 0.5 \text{ km}$ の平面上での B_L における波動の伝播速度の分布の様子を図-10に示す。図に示すように波動の伝播速度は 1.0 km/s から 0.7 km/s と不均質領域の中心に向かって減少する。また、small scale での不均質領域を B_S とし、次のように設定する。

$$B_S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0.1 \text{ km} \leq x, y \leq 0.3 \text{ km}, 0.4 \text{ km} \leq z \leq 0.6 \text{ km}\} \quad (50)$$

そして、ここでの波動伝播速度は 0.5 km/s とする。

図-11に $z = 0.2 \text{ km}$ の深さでの total field solution の実数部を示す。ここでは、不均質領域に照射する波動を生成するための内部点源の座標を図-9に示す座標系で $x = 0 \text{ km}$, $y = -5 \text{ km}$, $z = 0.5 \text{ km}$ としている。ま

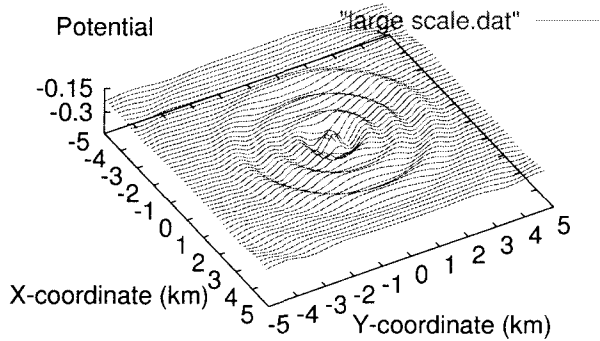


図-12 $z = 0.2$ km 位置での large scale solution

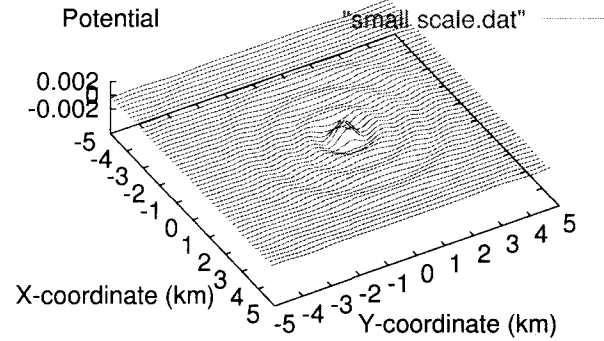


図-13 $z = 0.2$ km 位置での small scale solution

た、点加振解は直接波数積分で算定する。図-11 に示すように、内部点源で生じた波動は成層波動場で円筒状に広がり不均質領域に到達すると、散乱波を生じそれが再び円筒状に広がる。内部点源から放射される波動は Green 関数として、いろいろなスペクトル成分を含んでおり、波長は点源からの波動は遠方に行くにつれ長さを変化させている。一方、不均質領域で発生した波動が、内部点源から生成される波動と同じような波長の変化を示しているかどうか、スペクトルの構造も含め、今後の詳しい検討に待つべき点もあると思われる。図-12 および 13 は図-11 から分離した large および small scale の解の伝播の様子である。これによると不均質領域で生じた波動は等方的に伝播している。すなわち、不均質領域で生じた波動は、波動の伝播方向によって位相速度を変化させることなく、振幅の大きさも不均質領域の前方、後方で大きくは異ならない。また、small scale の解の振幅は large scale の解の振幅に比べれば非常に小さい。この理由は small scale の揺らぎの大きさに比べ入射する波動の波長が大きいことが挙げられる。一方で、small scale の解と large scale の解の伝播性状に違いも見られる。small scale の解は不均質領域付近で明確な振幅のピークを持ち、周囲へ広がる際、振幅は急速に減少する。一方、large scale の解は不均質領域のよりもその周辺で振幅が大きくなっている。両スケールの解の周囲への広がり方を見ると、波長が同程度であり、これについては不均質領域の周囲の媒質の情報が反映していると考えられる。

5. 結論

本論文では、媒質の揺らぎの空間的なスケールと散乱波の問題を扱うために、領域型の積分方程式として Lippmann-Schwinger 方程式のタイプを選び、その多重スケール分解についての検討を中心として論じた。このタイプの積分方程式を数値的に解くためには、媒質の不均質領域の被覆領域を離散化すれば良く、不均質領域の広がり形状の複雑さにそれほど離散化の難易が左右されない。ここではこの利点に着目し、媒質の

不均質領域を Haar のスケーリング関数およびウェーブレットで媒質の変動のスケールに着目して、被覆することを考えた。そして、スケーリング関数およびウェーブレットで定義される射影演算子で積分方程式を分解した。

Lippmann-Schwinger 方程式のタイプの積分方程式は $u = f - Au$ という形式を持つ一方、弾性波動場では音響波動場と異なり積分核の部分で変位の微分演算が要求される。Haar のスケーリング関数およびウェーブレットを用いる本離散化手法では、この問題に対処するため、スケーリング関数ならびにウェーブレットの導関数を Dirac のデルタ関数で表現した。そして、この方法の妥当性は S 波のみが伝播する 1 次元波動場についての解析で検証した。

また、ここでの数値解析は 3 次元の音響波動場を中心に行った。今回の数値計算では small scale の解の振幅は large scale の解の 1/10 程度かそれより小さいものであった。しかし、これは媒質の変動のスケールと入射波の波長の関係を反映していると考えられ、今後高い周波数での加振解による検討が必要である。また、今回は積分方程式を離散化して得られる行列の性質について論じていない。ウェーブレット基底を用いることで行列はスパースな構造を持つと期待でき、計算の効率化についても検討が必要である。

参考文献

- 1) Colton, D. and Kress, R.: *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Berlin, Springer, 1998.
- 2) Budreck, D.E. and Achenbach, J.D.: Three dimensional elastic wave scattering by surface-breaking cracks, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 86, pp. 395-406, 1989.
- 3) Colton, D. and Kress, R.: *Integral equation methods in scattering theory*, John Wiley and sons Inc, 1983.
- 4) Kitahara, M., Niwa, Y., Hirose, S. and Yamazaki, M.:

- Coupling of numerical Green's matrix and boundary integral equations for the elastodynamic analysis of inhomogeneous bodies on an elastic half-space, *Applied Mathematical Modelling* *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 8, pp. 397-407, 1984
- 5) Niwa, Y., Hirose, S. and Kitahara, M.: Elastodynamic analysis of inhomogeneous anisotropic bodies, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22, pp. 1541-1555, 1986.
 - 6) Williams, J.R. and Amaratunga, K.: Introduction to wavelets in engineering, *International Journal for Numerical Methods in engineering*, Vol. 37, pp. 2365-2388, 1994.
 - 7) Touhei, T.: A scattering problem by means of the spectral representation of Green's function for a layered acoustic half space, *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 477-488, 2000.
 - 8) Touhei, T.: Analysis of scattering waves in an elastic layered medium by means of the complete eigenfunction expansion form of the Green's function, *Int. J. Solids and Struct*, Vol. 40, pp. 3347-3377, 2003.
 - 9) Hughes, T.J.R.: Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to- Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg*, Vol. 127, pp. 387-401, 1995.
 - 10) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 岩波数学公式 III, 岩波書店, 1993.

(2004 年 4 月 16 日 受付)