

急勾配斜面上におけるガリ形成の線形安定論

Linear stability analysis of the gully formation on steep slopes

泉 典洋*

Norihiro IZUMI

*正会員 PhD 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

A mathematical model of the channelization on steep slopes is presented in this study. A linear stability analysis is performed with the use of the shallow water equations and the Exner equation extended for purely erosional beds. The analysis is found to be similar to that for channelization on mild slopes that the author has presented. The characteristic wavelength associated with the maximum growth rate is of the order of ten times the Froude-critical depth divided by the bed resistance coefficient. The resistance coefficient is estimated of the order of 0.01; thus, the dominant channel spacing is of the order of 1000 times the Froude-critical depth.

Key Words : linear stability analysis, gully formation, steep slope

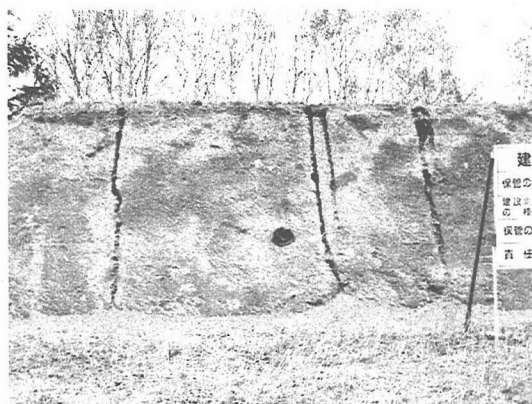
1. はじめに

泉¹⁾, Izumi and Parker²⁾は, 表面流による侵食によって斜面下流端から発生する水路群の初期形成メカニズムを記述する線形安定理論を提案している. その理論の中では, 表面流は 1 より小さいフルード数を持つ常流であることが仮定されている. フルード数が 1 より大きい射流では, 下流端に与えられた擾乱の影響が上流側に伝わらない. したがって, まわりよりも低い領域が下流端に形成されたとしても流水が集まることはなく, 擾乱は発達しない. すなわち著者の提案した理論は緩勾配斜面にのみ適用可能ということになる.

Izumi and Parker³⁾はこの他に, 任意勾配斜面に適用可能な, 水路形成が上流から生じる理論も提案しているが, その理論の中で形成初期の水路間隔を決定するのはレイノルズ応力であり, 水路間隔は水深/勾配程度となる. したがって勾配が 1 に近いような急勾配斜面では水路間隔は水深程度のスケールとなり, それほど大きなものにはならない. Izumi and Parker³⁾の理論は急勾配斜面上で見られる比較的間隔の狭いリルに適用可能であると考えられる.

図-1(a) および (b) はそれぞれ北海道標津町標津川河岸および仙台市七北田川河岸の, 整形された堤防法面上に見られるガリ群 (初期水路群) である. 図を見ると 1-2 m の間隔でガリが形成されている様子がうかがわれる. このような勾配の急な法面に発生する水深は大きく見積もってもせいぜい数 mm 程度であることが予想される. したがって Izumi and Parker³⁾の理論を適用すると, 形成されるガリ間隔もせいぜい数センチ程度となり, 写真に見られるような大きな間隔を有するガリ群の形成は説明できない.

本論文は, 緩勾配斜面にのみ適用可能な従来の水路形成モデルを急勾配斜面上に形成される水路形成モデルに拡張しようとするものである. 従来と同様の線形安定解析の手法を用いて, 急勾配斜面上に形成される水路群の初期間隔を理論的に求めることを目的とする.



(a)



(b)

図-1 急勾配斜面上に見られるガリ群. (a) 北海道標津町標津川河岸. (b) 仙台市泉区七北田川河岸. 著者撮影.

2. モデル

図-1に観察されるような状況をモデル化するために図-2のような斜面を考える. 緩勾配斜面の下流端が急

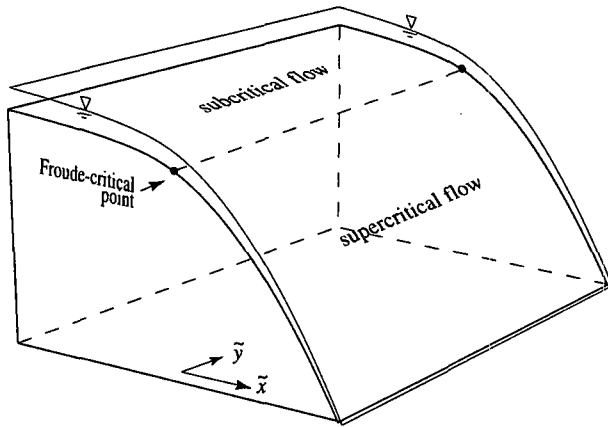


図-2 緩勾配斜面上流端に接続した急勾配斜面.

勾配斜面上に緩やかに接続しているとする。そのとき斜面上の表面流は、上流側の緩勾配斜面上では常流、下流側の急勾配斜面上では射流となっている。また緩勾配斜面と急勾配斜面の接続部にはフルード数が1となる点（支配断面）が存在している。後述するように、この点で限界水深および限界流速が生じることが境界条件として重要な意味を持つことから、本論文では、そのことを強調するために、支配断面をフルード限界点と呼ぶことにする。

泉¹⁾、Izumi and Parker²⁾のモデルでは上流側の緩勾配斜面のみを考え、下流側については解析の対象としていなかった。しかし実際の斜面を見ると、上流側の緩勾配斜面上よりも下流側の急勾配斜面上の方に活潑な水路化が見られるのが普通である（図-1 参照）。そこで本研究では下流側の急勾配斜面を含めた斜面全体を解析の対象とする。

従来のモデル^{1),2)}では、正式な線形安定解析をするための基本解（摂動を与える前の解）として、形状を維持しながら一定速度で上流側に前進する緩勾配部分の斜面形状を用いている。本論文でも、これと同様の考え方を導入する。ただし後述するように、本論文では上流側の緩勾配部分だけではなく、斜面全体を考えることに注意する必要がある。すなわち、上下流の緩急両勾配部分全体が形状を変化させずに一定速度で上流側に前進するような斜面形状を基本解として用いる（図-3）。

この基本解に対して図-4に示したような横断方向に正弦波形状を有する擾乱を与える。擾乱の縦断形状としては任意のものが考えられるが、実際に存在するガリ群を観察した結果から、上流側無限遠点で小さくなり、下流方向に大きくなるような擾乱を考える。この際の擾乱の成長を線形安定解析の手法を用いて調べる。一般に擾乱の成長率は波数の関数であり、成長率を最大にする波数が存在する。この波数は特性波数と呼ばれ、最も早く成長することから、水路化が始まる初期過程においてこの特性波数を有する擾乱が支配的となることが予想される。本研究の第一の目的はこの特性波数を求めることである。

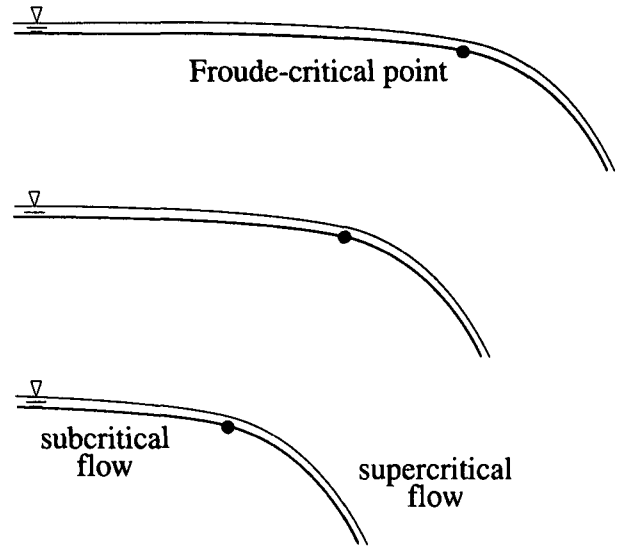


図-3 形状を変化させずに上流側に前進する斜面形状.

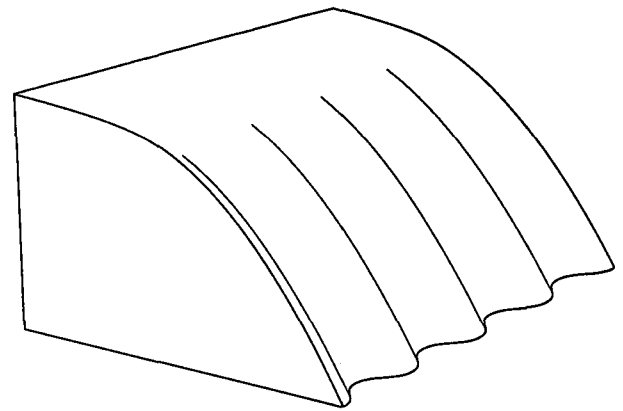


図-4 斜面上に与えられる擾乱.

3. 定式化

3.1 支配方程式

図-2に示したような斜面上を流れる表面流を考える。下流側の急勾配斜面は、流れが射流となるには十分な大きさの勾配を有するが、次の浅水流方程式で表される程度には小さい勾配を有するものとする。斜面上の表面流の運動は次の運動方程式で表される。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{\tau}_{bx}}{\bar{\rho} \bar{h}} \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} - g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} - \frac{\bar{\tau}_{by}}{\bar{\rho} \bar{h}} \quad (2)$$

ここで $\bar{x}$ および $\bar{y}$ はそれぞれ流下方向および横断方向の座標、 $\bar{u}$ および $\bar{v}$ はそれぞれ水深平均流速の $\bar{x}$ および $\bar{y}$ 方向成分、 $\bar{h}$ は水深、 $\bar{\eta}$ は斜面表面の高さ、 ρ は水の密度、 g は重力加速度 ($= 9.8 \text{ m/s}^2$)、 $\bar{\tau}_{bx}$ および $\bar{\tau}_{by}$ はそれぞれ底面剪断力の $\bar{x}$ および $\bar{y}$ 成分である。ここでは解析の基本方針とその結果の基本的特性を明らかにすることを最大の目的としている。したがって解析

を容易にするために、斜面勾配の大きさを、流れが上式で記述できる程度に小さいと仮定しているが、水深や斜面高さの微分項、重力項に幾何的な補正を付加することによって、理論は容易に任意斜面勾配に拡張できる⁵⁾。

流れの連続式は次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{u} \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v} \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (3)$$

式(2)および(3)では、移動床問題でよく行われる準定常の仮定が用いられていることに注意する必要がある。流れの時間変化スケールに比べると斜面形状の時間変化スケールが十分大きいと仮定すると、流れは準定常とみなすことができる。ここでもこの仮定を用いることによって式(2)および(3)の時間微分項を無視している。もちろんこの仮定は流れに対するものであって、次に述べる斜面形状の時間変化を表す式では時間微分項を無視することはできない。

底面高さの時間変化は、侵食が支配的な場合における土砂の連続式で記述することができる。それは次のように表される。

$$(1 - \lambda) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{E}(\tilde{\tau}) \quad (4)$$

ここで $\tilde{E}$ は斜面の侵食を記述する経験関数である。泉¹⁾にならって、斜面上では侵食が卓越しているものとし、侵食速度は次式で表されるものと仮定する。

$$\tilde{E}(\tilde{\tau}) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}_{th}} - 1 \right)^\gamma & \tilde{\tau} \geq \tilde{\tau}_{th} \\ 0 & \tilde{\tau} < \tilde{\tau}_{th} \end{cases} \quad (5)$$

ここで $\tilde{\tau}$ は底面剪断力、 $\tilde{\tau}_{th}$ は侵食が生じる最小の底面剪断力（限界底面剪断力）、 γ は経験的に決定されるパラメータであり、従来の実験結果より 0.5 から 2 程度であることがわかっている。ここではそれらの中で中間的な値である $\gamma = 1.0$ を用いることにする。

底面剪断力ベクトル $(\tilde{\tau}_{bx}, \tilde{\tau}_{by})$ および底面剪断力 $\tilde{\tau}$ は次のように表される。

$$(\tilde{\tau}_{bx}, \tilde{\tau}_{by}) = \tilde{\tau} (u^2 + v^2)^{-1/2} (\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (6a)$$

$$\tilde{\tau} = \rho C_f (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \quad (6b)$$

ここで C_f は底面摩擦係数であり、実際は相対水深（水深/粗度高さ）の弱い関数である。しかしここでは問題を簡単にするために定数と仮定する。

上下流における適切な境界条件は次のようになる。斜面上に波数 $\tilde{k}$ を有する正弦波型の摂動が与えられるとする。そのとき $\tilde{\eta}$ は次式で表される。

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 + \tilde{a} \tilde{\eta}_1 e^{\tilde{\Omega} \tilde{t}} \cos \tilde{k} \tilde{y} \quad (7)$$

ここで $\tilde{a}$ および $\tilde{\Omega}$ 、 $\tilde{k}$ はそれぞれ摂動の初期振幅および成長速度、波数である。ここで行う線形安定解析では摂動の振幅 $\tilde{a}$ を微小として支配方程式の線形化を行い、摂動の増幅率 $\tilde{\Omega}$ を導く。その際、 $\tilde{\Omega}$ が正であれば摂動

は時間とともに成長し、負であれば減衰する。すなわち $\tilde{\Omega}$ の正負がガリ形成の有無に対応することになる。

上式の摂動に対応して、全ての従属変数を次のように展開する。

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \tilde{a} \tilde{u}_1 e^{\tilde{\Omega} \tilde{t}} \cos \tilde{k} \tilde{y} \quad (8a)$$

$$\tilde{v} = \tilde{a} \tilde{v}_1 e^{\tilde{\Omega} \tilde{t}} \sin \tilde{k} \tilde{y} \quad (8b)$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \tilde{a} \tilde{h}_1 e^{\tilde{\Omega} \tilde{t}} \cos \tilde{k} \tilde{y} \quad (8c)$$

ここで添え字 0 および 1 はそれぞれ基本解および摂動解を表している。

実際のガリや水路形成の初期における形状を観察すると、図-4 に示すように、上流側無限遠点において擾乱は消滅している。これは次式で表される。

$$\tilde{u}_1 = \tilde{v}_1 = \tilde{h}_1 = \tilde{\eta}_1 = 0 \quad \text{as} \quad \tilde{x} \rightarrow -\infty \quad (9a-d)$$

常流から射流に移移する点ではフルード限界点が現れる。そこでは次式が成立する。

$$\frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{g \tilde{h}} = 1 \quad (10)$$

ここで擾乱を与える前の基本状態におけるフルード限界点を原点にとると、次式が成立する。

$$\frac{\tilde{u}_0^2}{g \tilde{h}_0} = 1 \quad \text{at} \quad \tilde{x} = 0 \quad (11)$$

ただし式(9)のような摂動を与えると、フルード限界点は原点からわずかにずれた位置で現れることに注意する必要がある。

3.2 無次元化および正規化

次の正規化を導入する。

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{U}_c (u, v), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\tilde{H}_c}{C_f} (x, y), \quad (12a, b)$$

$$(\tilde{h}, \tilde{\eta}) = \tilde{H}_c (h, \eta), \quad \tilde{E}(\tilde{\tau}) = \tilde{E}_c E, \quad (12c, d)$$

$$\tilde{t} = \left[\frac{(1 - \lambda) \tilde{H}_c}{\tilde{E}_c} \right] t \quad (12e)$$

ここで $\tilde{U}_c$ および $\tilde{H}_c$ 、 $\tilde{E}_c$ はそれぞれフルード限界点における流速および水深、侵食速度であり、 $\tilde{U}_c$ および $\tilde{H}_c$ の間には次の関係が成立する。

$$\frac{\tilde{U}_c^2}{g \tilde{H}_c} = 1 \quad (13)$$

式(12)の正規化を導入すると式(1)–(6)は次のように書き直される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} \quad (14)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} \quad (15)$$

$$\frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -E \quad (17)$$

ここで

$$E = (u^2 + v^2 - \psi)^\gamma \quad (18a)$$

また ψ はフルード限界点での底面剪断力 $\bar{\tau}_c$ で正規化された限界剪断力であり、次式で表される。

$$\psi = \frac{\bar{\tau}_{th}}{\bar{\tau}_c} \quad (18b)$$

4. 一次元基本解

4.1 支配方程式

流れが横断方向に一様であると仮定すると支配方程式は次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{u^2}{h} \quad (19)$$

$$uh = 1 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -E(u^2) \quad (21)$$

形状を変化させずに一定速度 c で上流側に移動する斜面形状を求めるためには、次のような座標変換を導入するのが便利である。

$$\eta^* = \eta - bt \quad (22a)$$

$$x^* = x + ct \quad (22b)$$

$$t^* = t \quad (22c)$$

ここで c は斜面の前進速度であり、座標系の移動速度に対応する。また b は形状を変化させない斜面形状が見かけ上鉛直方向にも移動することになるため必要となるパラメータであり、適当な c および b を導入することによって斜面形状は移動座標系上において不変となる。

適当な c および b とはどのようにして選べばよいかここで考えてみる。適当な値を見出すためにここでは次元量に返って考えてみるのが便利である。下流側無限遠点における斜面勾配は一定値 $\sin \theta$ を取ると仮定する。そこでは射流の等流状態が実現している。等流の底面剪断力が限界剪断力より大きいとき、底面は速度 $\bar{E}(\bar{\tau}_n)$ で低下することになる。ここで $\bar{\tau}_n$ は下流側無限遠点における等流状態での底面剪断力である ($= \rho C_f \bar{u}_n^2$)。上流に向かって水平方向に速度 $\bar{c}$ で移動すると、底面は見かけ上 $\bar{c} \sin \theta - \bar{E}(\bar{\tau}_n)$ の速度で上昇する。この見かけ上の上昇を打ち消すためには $\bar{b}$ は次式を満足させなければならない。

$$\bar{b} = \bar{c} - \bar{E}(\bar{\tau}_n) \quad (23)$$

$\bar{b}$ および $\bar{c}$ がそれぞれ $\bar{H}_c$ および $\bar{H}_c/C_f$ で正規化されることを考えれば、無次元量に対して次式が成立する。

$$b = c\sigma - E(u_n^2) \quad (24)$$

ここで $\sigma = \sin \theta / C_f$ である。

式 (22) より次の関係が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t^*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial x^*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + c \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (25a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t^*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (25b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta^*}{\partial t} + b = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + c \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + c\sigma - E(u_n^2) \quad (25b)$$

上式を式 (19) および (21) に代入した後、移動座標系上で形状を変化させない解を求めるために時間 t^* に関する微分項を落とす。さらに表記を簡単にするために $*$ を省略すると、式 (19) の偏微分は全微分となり、式 (21) は次のようになる。

$$\frac{d\eta}{dx} + \sigma - c^{-1} [E(u_n^2) - E(u^2)] = 0 \quad (26)$$

h および η を消去すると、式 (19) および (20), (26) は次の微分方程式に帰着する。

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^5 - \sigma u^2 + c^{-1} [E(u_n^2) - E(u^2)] u^2}{1 - u^3} \quad (27)$$

上式は c が決まると積分できる。これはこれまでのモデル¹⁾に現れる式と非常によく似た式であるが、重要な違いがあることに注意する必要がある。本解析の場合、急勾配斜面上の等流流速は限界流速より大きいことから、無次元等流流速 u_n は 1 より大きいということである。

4.2 境界条件と正則条件

基本解では、下流側無限遠点 ($x \rightarrow \infty$) において一様勾配 σ を有しており、等流状態が成立している。そのとき流速および水深は流下 (x) 方向に変化しない。式 (19) および (20) より次の境界条件が得られる。

$$u_n = \sigma^{1/3}, \quad h_n = \sigma^{-1/3} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (28a, b)$$

ここで $u_n > 1$ および $h_n < 1$ となるように、 σ が 1 より大きいことに注意する必要がある。流速と水深がフルード限界点の値で正規化されることから、次式が成り立つ。

$$u = 1, \quad h = 1 \quad \text{at } x = 0 \quad (29a, b)$$

上式を式 (27) に代入すると、 $x = 0$ において特異性が現れることがわかる。この点において解が存在するためには分子も分母と同時にゼロとならなければならない。すなわち次式が要求される。

$$c = \frac{E(u_n^2) - E(1)}{\sigma - 1} \quad (30)$$

$\sigma > 1$ および $E(u_n^2) > E(u^2)$ が成立するため、 c は正となることがわかる。

式 (30) を代入した後、式 (27) を積分すると次式が得られる。

$$\int_1^u \frac{1 - u^3}{u^5 - \sigma u^2 + (\sigma - 1) \frac{E(\sigma^{2/3}) - E(u^2)}{E(\sigma^{2/3}) - E(1)} u^2} du = x \quad (31)$$

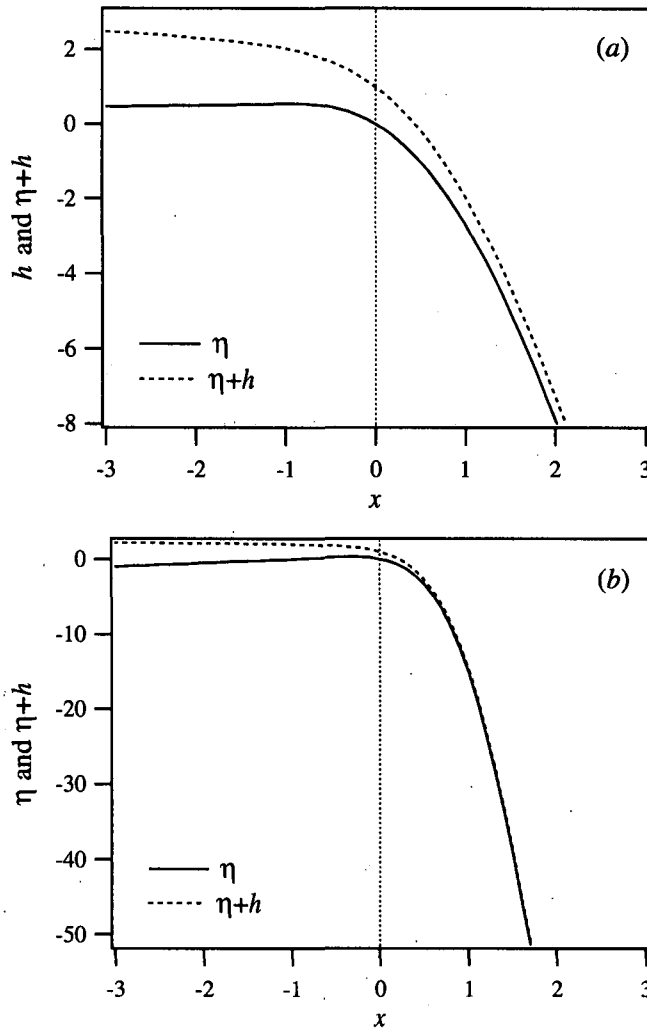


図-5 基本解（準定常解）. $\gamma = 1.0$. $\psi = 0.5$. (a) $\sigma = 5$, (b) $\sigma = 20$.

上式から u が求められると式 (26) を積分して次式が得られる.

$$\eta = \int_0^x c^{-1} [E(\sigma^{2/3}) - E(u^2)] dx - \sigma x. \quad (32)$$

ここで上式右辺第二項が一樣勾配斜面，第一項がそれからのずれを表していることがわかる.

図-5 は式 (31) および (32) から導かれた斜面形状および水面形状を示す. ここで注意しなければならないのは式 (31) および (32) を導く際, x が正でなければならない条件は用いていない. したがって x に負の値を代入すれば上流側の緩勾配部分に適用することができる. 図-5(a) および (b) はそれぞれ $\sigma = 5$ および 20 に対応している. $\sigma = 5$ および $\sigma = 20$ のどちらの場合も上流側の緩勾配部がわずかながら逆勾配を有していることがわかる. このとき斜面が上流方向に移動すると逆勾配部の河床が上昇するように思われるが, 実際は侵食によって斜面は全体的に下方へ移動するため, 上流方向に移動しても下方への移動速度が十分早ければ河床は上昇しないことに注意する必要がある.

もちろん水面勾配はいずれの場合も順勾配となっている.

5. 二次元摂動問題

5.1 線形化

正規化された二次元の支配方程式は次のように表される.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} \quad (33)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} \quad (34)$$

$$\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} = -E \quad (36)$$

$$E = (u^2 + v^2 - \psi)^\gamma \quad (37)$$

式 (7) および (8) は次のように書き直される.

$$u = u_0(x) + a u_1(x) e^{\Omega t} \cos ky \quad (38a)$$

$$v = a v_1(x) e^{\Omega t} \sin ky \quad (38b)$$

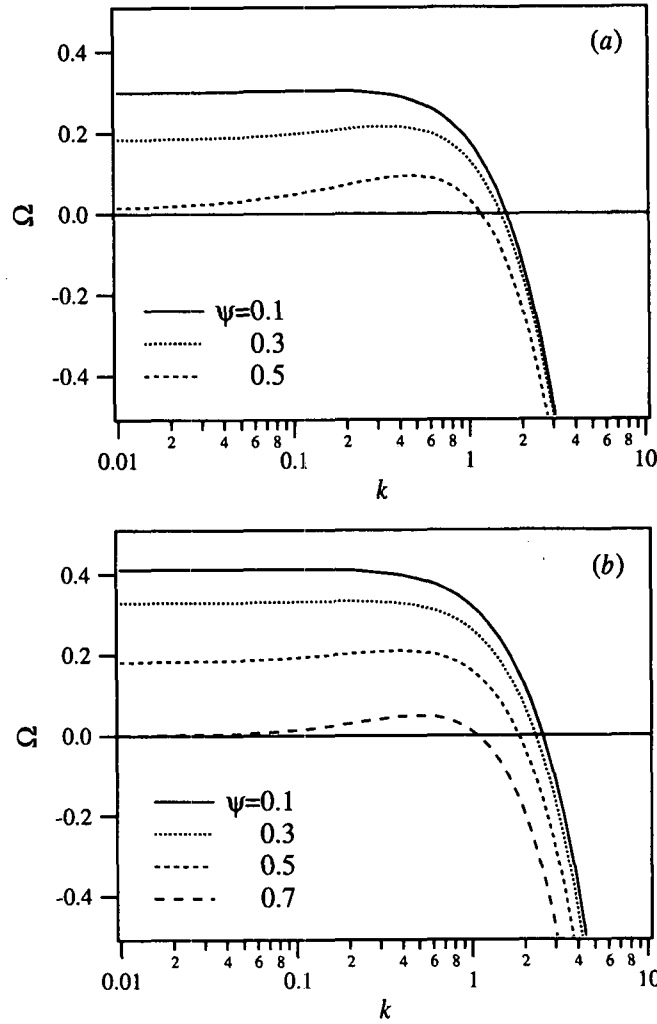


図-6 擾乱の成長率 Ω の k および σ , ψ による変化. $\gamma = 1.0$ (a) $\sigma = 5$, (b) $\sigma = 20$.

$$h = h_0(x) + ah_1(x)e^{\Omega t} \cos ky \quad (38c) \quad (43)$$

$$\eta = \eta_0(x) + a\eta_1(x)e^{\Omega t} \cos ky \quad (38d) \quad (44)$$

上式を式 (33)-(37) に代入すると $O(a)$ において次式が得られる.

$$u_0 \frac{du_1}{dx} + u_0' u_1 + \frac{dh_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dx} + 2u_0^2 u_1 - u_0^4 h_1 = 0 \quad (39)$$

$$u_0 \frac{dv_1}{dx} - kh_1 - k\eta_1 + u_0^2 v_1 = 0 \quad (40)$$

$$u_0^{-1} \frac{du_1}{dx} - u_0^{-2} u_0' U_1 + u_0 \frac{dh_1}{dx} + u_0' h_1 + ku_0^{-1} v_1 = 0 \quad (41)$$

$$\Omega \eta_1 + c \frac{d\eta_1}{dx} + E_u(u_0^2) u_1 = 0 \quad (42)$$

さらに整理すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} = & -\frac{(u_0^2 + u_0^{-1})u_0' + 2u_0^4 - c^{-1}E_u(u_0^2)u_0^2}{1 - u_0^3} u_1 \\ & - \frac{k}{1 - u_0^3} v_1 - \frac{u_0 u_0' + u_0^6}{1 - u_0^3} h_1 - \frac{\Omega c^{-1} u_0^2}{1 - u_0^3} \eta_1 \end{aligned}$$

$$\frac{dv_1}{dx} = -u_0 v_1 + ku_0^{-1} h_1 + ku_0^{-1} \eta_1 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dx} = & -\frac{2u_0' + 2u_0^2 - c^{-1}E_u(u_0^2)}{1 - u_0^3} u_1 + \frac{ku_0}{1 - u_0^3} v_1 \\ & + \frac{u_0^4 + u_0^2 u_0'}{1 - u_0^3} h_1 + \frac{\Omega c^{-1}}{1 - u_0^3} \eta_1 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{d\eta_1}{dx} = -2E_u(u_0^2) u_1 - c^{-1} \Omega \eta_1 \quad (46)$$

ここで ' は d/dx を表す. また $E_u(u_0^2)$ は侵食量関数 $E(u_0^2)$ を u_0 で微分したものであり, 次式で表される.

$$E_u(u_0^2) = 2u_0 \gamma (u_0^2 - \psi)^{\gamma-1} \quad (47)$$

5.2 境界条件と正則条件

斜面上流側無限遠点では, 擾動の影響は漸近的に消滅する. したがって次式が成り立つ.

$$u_1 = v_1 = h_1 = \eta_1 = 0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (48)$$

上式は四つの境界条件を含むように思われるが, 三つを与えると残りの一つは自動的に満足されるため, 実

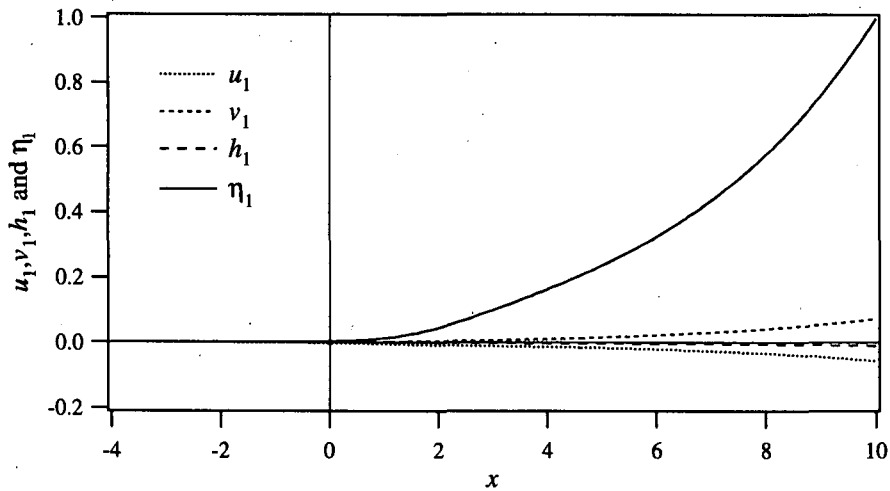


図-7 u_1 および v_1, h_1, η_1 の x 方向分布. $k = 0.5, \sigma = 20, \psi = 0.5$.

際は三つの境界条件を含んでいる。

フルード限界点では u_0 が 1 となるため、式 (43) および (45) には特異点が現れる。この点で解が存在するための正則条件は次式で表される。

$$\begin{aligned} [E_u(1) - 2c(p+1)]u_1 + kcv_1 \\ + c(p+1)h_1 + \Omega\eta_1 = 0 \\ \text{at } x = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

ここで $p = du_0/dx|_{x=0}$ である。下流側の境界条件はどのようになるであろうか？実は下流側に境界条件は必要ない。なぜなら式 (43)–(46) は四つの同次境界条件 (48) および (49) を持つ 4 変数の一階同次常微分方程式系であり、Sturm-Liouville 型の固有値問題を形成している。したがって (48) および (49) の四つの境界条件によって固有値 Ω が決定される。

ただしここでは緩和法を適用し易くするために、ある点 $x = x_d$ において η_1 を正規化する（ここで x_d は任意であるが、図-7 では $x_d = 10$ を用いている）。その時、次の境界条件が付加される。

$$\eta_1 = 1 \quad \text{at } x = x_d \quad (50)$$

すると方程式系は境界条件 (48) および (49) に (50) を加えた五つの境界条件の下で、 u_1 および v_1, h_1, η_1 に Ω の五つの変数に関する微分方程式系 (43)–(46) を解く多点境界値問題に帰着させることができる。ここでは、この多点境界値問題を緩和法を用いて解く⁴⁾。

6. 結果と考察

6.1 擾乱の最大成長率をもたらす特性波数

図-6(a) および (b) はそれぞれ $\sigma = 5$ および 20 における Ω の k による変化を示している。図によると一般的に k が 1–3 のある値より小さいとき擾動の成長率 Ω は正となることがわかる。これは擾動の波長がある限界値より大きい擾乱のみが成長することを示している。無次元限界剪断力 ψ が小さい、すなわち底面剪断力が

大きい場合は Ω のピークはあまりはっきりと現れないが、 ψ が大きいとき、 Ω は $k = 0.6$ 付近で最大となる。したがって ψ が大きい場合、特性波数はおよそ 0.6 となる。しかも注目すべきことは、この特性波数は斜面勾配の大きさにほとんど依存しないことである。このことは、ここで考えているような適度に勾配の急な斜面（流れは射流になるが浅水方程式で表される程度の勾配を持つ斜面）では、ガリの形成間隔は勾配によらずほぼ一定となることを意味している。

無次元波数 k は波長の次元量 $\tilde{\lambda}$ と次のように関係付けられる。

$$\tilde{\lambda} = 2\pi \frac{\tilde{H}_c}{kC_f} \quad (51)$$

したがって特性波長 $\tilde{\lambda}_m$ （成長率を最大にする波長）は限界水深 $\tilde{H}_c$ を底面摩擦係数 C_f で割った値のほぼ 10 倍であることがわかる。すなわち次式が得られる。

$$\tilde{\lambda}_m \sim 10 \frac{\tilde{H}_c}{C_f} \quad (52)$$

ここで C_f は 0.01–0.05 であるとする、発生初期において支配的となる水路間隔はフルード限界水深の 200–1000 倍となることがわかる。

6.2 ガリの形成間隔と斜面形状

図-1 によれば、典型的な水路間隔は 1–2 m である。本解析によれば、水路の形成間隔はフルード限界水深の 200–1000 倍程度となることが導かれた。図-1 中の斜面上を流れる表面流の水深は不明である。そこでここでは逆に水路間隔に合う水深を見積もってみる。すると水路間隔が 1–2 m に対応する水深は 1–10 mm であることがわかる。降雨時に観察される斜面上のシートフローから推測すると、この水深の値は現実的な値であると考えられる。

図-7 は $\sigma = 20$ および $\psi = 0.5$ における、 u_1 および v_1, h_1, η_1 の流下方向分布を示している。図では $x = 10$ で $\eta_1 = 1$ となるように正規化している。図によると上流側の領域 ($x = -4 \sim 0$) で η_1 は下流端近傍に

おける η_1 と比較して、非常に小さいことがわかる。すなわちこのことは次のようなことを意味している。たとえ下流部の急勾配斜面上において顕著なガリが発達しても上流側の緩勾配斜面上では目視できない程度しかガリは発達していない。このような状況は図-1に示したように様々な場所で観測されている。理論の結果は観測結果を定性的に一致していることがわかる。従来のモデル^{1),2)}と同じく、本理論においても、集水が生じるのはあくまでも上流側の緩勾配斜面部分である。緩勾配斜面部分における集水のせいで、下流の急勾配斜面部分に、緩勾配斜面部分よりはるかに顕著なガリが生じることが本理論により明らかとなった。

7. 結論

急勾配斜面上における水路群の初期形成機構を線形安定解析の手法を用いて明らかにした。解析の結果によるとガリ（初期形成水路）はフルード限界水深の200-1000倍の間隔で形成されることが明らかとなった。これは観測の結果とも定性的に一致している。また理論は、ガリの形成が上流側の緩勾配斜面よりもむしろ下流側の急勾配斜面上で活発に生じるという現地観測の結果と整合性のある結果を与えることがわかった。

謝辞：本研究を行うにあたって、北海道河川防災研究センターの研究助成を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 泉 典洋：水路群発生 の線形安定論—斜面下流端からの発生理論—，土木学会論文集 No. 614/II-46, 65-75, 1999.
- 2) Izumi, N and Parker, G.: Linear stability analysis of channel inception: downstream-driven theory, *J. Fluid Mech.*, 419, 239-262, 2000.
- 3) Izumi, N and Parker, G.: Inception of channelization and drainage basin formation: upstream-driven theory, *J. Fluid Mech.*, 283, 341-363, 1995.
- 4) Press, H. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P.: *Numerical Recipes in FORTRAN*. 2nd Ed, Cambridge, 1992.
- 5) Parker G. and Izumi, N.: Purely erosional cyclic and solitary steps created by flow over a cohesive bed, *J. Fluid Mech.*, 419, 203-238, 2000.

(2003年4月18日受付)