

移動一般座標系での浅水流方程式の数値解析法とその検証

Numerical Simulation by means of a Depth Averaged Flow Model in Curvilinear Moving Coordinate System
and its Verification

細田 尚¹・音田 慎一郎²・浜崎 宏正³

Takashi HOSODA, Shinichiro ONDA and Hiromasa HAMASAKI

¹正会員 工博 京都大学教授, 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

²学生会員 修(工) 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻博士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

³非会員 水産庁 (〒100-8950 東京都千代田区霞ヶ関 1-2-1)

In this study, numerical methods for simple flows are investigated. A depth averaged flow model in generalized curvilinear moving coordinate system is used in order to take into account the complex topography and finite volume method and the method of characteristics are applied. As test cases, the flows in a tank under a constant acceleration and the flows and waves, which are generated by a moving wall, are simulated. To evaluate the numerical results, theoretical analysis and linear analysis were derived. The numerical results are verified through the comparison with them.

Key Words : depth averaged flow model, curvilinear moving coordinate system, numerical simulation

1. はじめに

本研究は、流れ場の境界形状が変化する場合にも適用できるように、移動一般座標系で記述された水理解析法について考察することを目的としている。

移動一般座標系を用いた流体解析は、水工学の分野でもよく用いられている。例えば、自由境界である水面や河床を座標軸として基礎式を記述し、河川流や局所洗掘の多次元数値解析が行われている^{1,2)}。また、本研究で用いる浅水流方程式についても、移動一般座標系で表記され³⁾、河岸侵食を伴う河川の流路変動解析が行われているが⁴⁾、基本的な現象に適用し、考察するために用いられたものは少ない。

そこで本研究では、単純で基本的な水理現象を取り上げる。例として、一定加速度場や振動台上に置かれた水槽内の流体挙動、造波板のように水槽の壁が動くことにより生じる波と流れなどを取り扱う。各々のケースに応じて移動一般座標系での浅水流方程式を変形し、有限体積法、TVD-Lax-Wendroffスキームを適用した特性曲線法を用いて数値解析を行う。さらに、簡易モデル、特性曲線法による解析解、理論解析、線形解析などを求め、比較を行うことで数値解析結果の適合性を検証する。

2. 加速度場に置かれた水槽

本研究では、簡単のため解析の基礎式として、連続式と運動方程式に水深方向に積分した水深積分モデルを用いる³⁾。

その際、運動量方程式の誘導に当たって静水圧を仮定する。

1 次元移動一般座標系での連続式、運動量方程式を記述すれば以下になる。

〔連続式〕

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{h}{J} \right) = 0 \quad (1)$$

〔運動量方程式〕

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{M}{J} \right) + g h \frac{\xi_x}{J} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (2)$$

ここで、 t : 時間、 ξ : 一般座標、 ξ_t, ξ_x : 変換のメトリックス、 h : 水深、 U : 流速ベクトルの反変成分 ($= u \xi_x$)、 u : x 方向の水深平均流速、 M : x 方向の流量フラックス ($= uh$)、 g : 重力加速度、 J : 座標変換のヤコビアン (1 次元解析の場合は ξ_x となる)。

式(1)、(2)を一定の加速度場に置かれた水槽の運動に対応するように基礎式を書き換えると、座標変換のメトリックスは下記のようにになる。

$$x_0 = at^2, \quad x_e = L + at^2$$

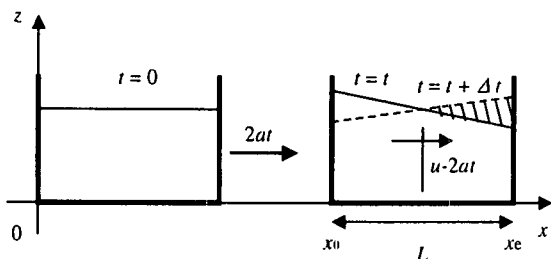


図-1 水深直線分布を仮定した簡易モデル

$$\xi = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{2at}{L}$$

ここに、 x_0 , x_e : 水槽の左端、右端の座標、 L : 水槽の長さ、 a : 加速度の1/2である。

上記の関係を式(1), (2)に代入すると、保存則系の基礎式(3), (4)が得られる。

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u - 2at)h] = 0 \quad (3)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u - 2at)hu] + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \xi} = 0 \quad (4)$$

2. 1 簡易モデル、特性曲線法による現象の定性的考察

(1) 簡易モデルによる現象の定性的記述

現象を定性的に考察し、後述の数値解析結果と比較するデータとして簡易モデルを考える。図-1のように水深を直線分布で仮定すると、次式で表される。

$$h = h_0 \left[1 - \alpha(t) \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5)$$

ここに、 h_0 : 初期水深、 $\alpha(t)$: 水深の勾配

斜線部における微小時間の水深変化を考えると、以下の式が成り立ち、さらに整理すると、式(6)が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{L}{2} \left[h_0 \left\{ 1 - \alpha(t + \Delta t) \frac{1}{2} \right\} - h_0 \left\{ 1 - \alpha(t) \frac{1}{2} \right\} \right] = h_0 (u - 2at) \Delta t$$

$$\frac{du}{dt} = 2a - \frac{L}{8} \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} \quad (6)$$

また、運動量方程式を ξ に関して0から1まで積分すると、式(7)が導かれ、式(6)を式(7)に代入し、以下の初期条件のもとで解くと、 $\alpha(t)$ に関して式(8)が得られる。

$$Lh_0 \frac{du}{dt} - gh_0^2 \alpha(t) = 0 \quad (7)$$

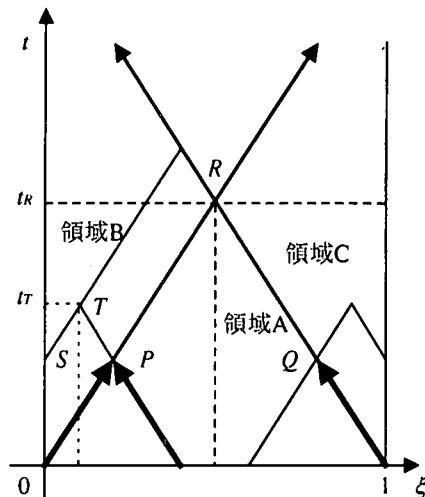


図-2 初期の水面変化に関する特性曲線

$$\frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} + \frac{8gh_0}{L^2} \alpha(t) = \frac{16a}{L} : \alpha(0) = 0, \quad \frac{d\alpha(0)}{dt} = 0$$

$$\alpha(t) = -\frac{2aL}{gh_0} \cos \left(\frac{2\sqrt{2gh_0}}{L} t \right) + \frac{2aL}{gh_0} \quad (8)$$

式(8)から、一定勾配の水面を中心に単振動することがわかる。

(2) 特性曲線法を用いた考察

次に、固定格子点の特性曲線法による基礎式を導くとともに、特性曲線法を用いて初期の水面形の時間変化を考察する。まず、基礎式の未知数を h と $C = u - 2at$ に変換し、連続式、運動量方程式を行列表示すると次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ C \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} C & h \\ g & C \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} h \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2a \end{bmatrix} \quad (9)$$

式(9)を若干変形すれば、次式が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (C \pm \sqrt{gh}) + \frac{1}{L} (C \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial \xi} (C \pm \sqrt{gh}) = -2a \quad (10)$$

上記の基礎式は、移流方程式で構成されており、数値振動を避けるため、従来から開発されてきた各種のTVDスキームの適用が可能である^{5,6)}。

式(10)から初期の水面変形過程に関する解析解を求める。式(10)は次式と等価であり、図-2を参照して時間 $t=0$ から $t=t$ まで積分すると式(11)となる。

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{L} (C \pm \sqrt{gh}) \text{ 上で, } \frac{d}{dt} (C \pm 2\sqrt{gh}) = -2a$$

$$C \pm 2\sqrt{gh} = -2at \pm 2\sqrt{gh_0} : C=0 \text{ } h=h_0 (t=0) \quad (11)$$

以上より、左端($\xi=0$)、右端($\xi=1$)での水深の時間変化に関して次式が導かれる。

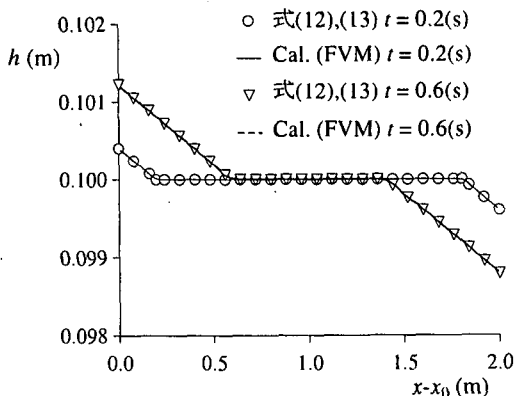


図-3 特性曲線による初期の水面変形過程 (CaseA-1)

表-1 水槽が一定加速度で移動する場合の計算条件

Case	L(m)	h_0 (m)	a (m/s ²)
A-1	2.0	0.1	0.01
A-2	2.0	0.1	1.0

$$\xi = 0 : \sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} + at, \quad C = 0$$

$$\xi = 1 : \sqrt{gh} = \sqrt{gh_0} - at, \quad C = 0$$

また、式(11)から図-2 中の領域 A 内の水理量は次式で与えられる。

[領域 A 内の解] $h = h_0, \quad C = -2at$ (12)

さらに、曲線 OR 上の点 P の位置と時間の関係は次のようになる。曲線 1R についても同様である。

$$\xi(t)_P = \frac{1}{L} \int_0^L (-2at + \sqrt{gh_0}) dt = \frac{1}{L} (\sqrt{gh_0}t - at^2)$$

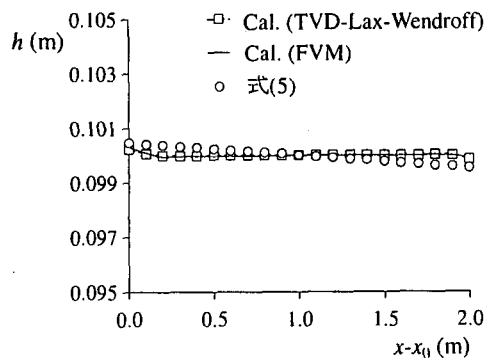
同様の考察により、領域 B 内の点 T の水理量、及び曲線 ST の軌跡は次式で表される。

$$C_T = 2a(t_s - t_T), \quad \sqrt{gh_T} = at_s + \sqrt{gh_0} \quad (13)$$

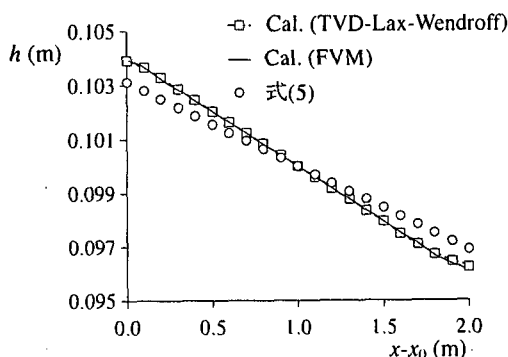
$$\begin{aligned} \xi(t)_T &= \frac{1}{L} \int_s^T (C + \sqrt{gh_0}) dt \\ &= \frac{1}{L} \{ (3at_s + \sqrt{gh_0})(t_s - t_T) - a(t_T^2 - t_s^2) \} \end{aligned} \quad (14)$$

領域 B 中の点 T の座標 ξ_T, t_T を与え、式(14)に代入して t_s を求め、さらに式(13)に代入すると点 T の水理量が計算できる。以上のようにして求めた初期の水面変形過程 (表-1 の CaseA-1) を図-3 に示した。また、数値解析法を検証するため、計算結果も併せてプロットした。壁の両端から水面が変形し、中央に及ぶ様子が確認でき、計算結果は解析解と一致している。

前述のように、水面の初期変形過程については特性曲線法から解析解が求められるが、その後の水面の時間変化については、解析解を導くことは困難であるため、本研究では次節



(i) $t = 4.0$ (s)



(ii) $t = 6.0$ (s)

図-4 水面形の時間変化 (CaseA-1)

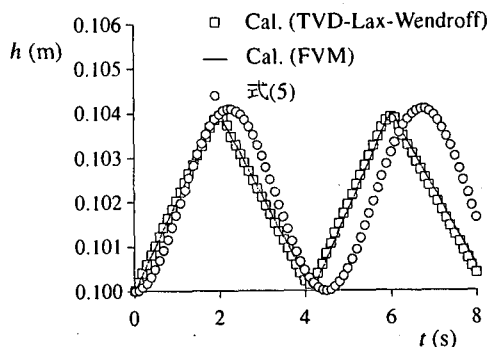


図-5 左端壁の水深の時間変化 (CaseA-1)

で数値解析による再現を試みる。

2. 2 数値解析法と計算条件

数値解析法として、固定格子点の特性曲線法と有限体積法を用いる。特性曲線法では、移流項の離散化として TVD 条件を満足する制限関数を用いた TVD-Lax-Wendroff スキームを適用している。一方、有限体積法では、変数をスタッガードで配置し、移流項の離散化として 1 次精度の上流差分を用いている。但し、段波のような現象を計算しても不連続部で数値振動が生じないように、数値粘性項を付加している。計算法の詳細は参考文献^{5,6)}に記載されているので省略する。

計算条件を表-1 に示す。水槽の長さ、初期水深を固定し、加速度の小さい場合 (CaseA-1)、大きい場合 (CaseA-2) に

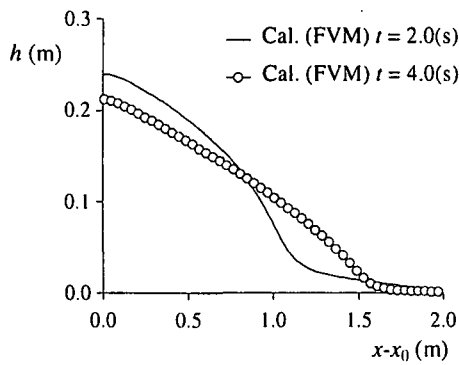


図-6 水面形の時間変化 (Case A-2)

について検討した。計算格子は100とした。

2. 3 計算結果の考察

図-4, 5は、加速度が小さい場合の水面形の時間変化。左端壁の水深の時系列を表したものである。簡易モデルによる定性的考察で述べたように、水面の振動している様子が確認できる。また、図-5をみると計算結果と簡易モデルは、振幅においてはほぼ一致しているものの、周期に違いが見られる。しかし、水槽の長さに対して水深を深くすることで両者は適合し、アスペクト比 (h_0/L) が0.2でほぼ一致した。

一方、加速度が大きい場合の水面形の時間変化を示したものが図-6である。時間の経過とともに水面がある一定の位置で固定され、水の無い領域が現れることがわかる。なお、特性曲線法では基礎式が保存則系で記述されていないため、体積が保存されなかった。

3. 壁の運動により生じる水槽内流体運動の解析

本章では、水槽の鉛直壁を一定速度で移動させた場合、あるいはある周期のもとで振動させた場合の水面変動について考察する。

3. 1 壁が一定速度で移動する場合

(1) 基礎式

図-7のように、水槽の右壁が一定速度 v_w で移動する場合を考え、保存則系と微分系の基礎式を以下に示す。

水槽の長さ L が初期値 L_0 から以下のように変化するとする。

$$L = L_0 - v_w t, \quad \frac{dL}{dt} = -v_w, \quad \xi = \frac{x}{L}$$

この場合、メトリックスは下記のようになり、式(1), (2)に代入すると連続式、運動量方程式は式(15), (16)で表される。

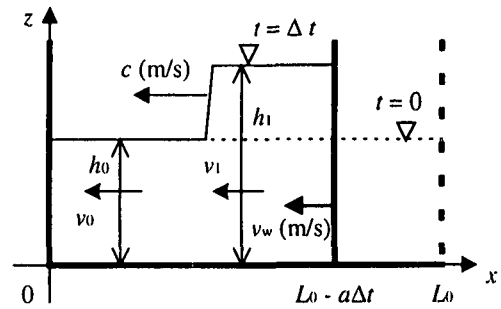


図-7 右壁を一定速度で動かす場合の模式図

表-2 壁が一定速度で移動する場合の計算条件

Case	L_0 (m)	h_0 (m)	v_w (m/s)
V-1	1.0	0.1	0.1
V-2	1.0	0.1	1.0

$$\xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{\xi}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{v_w \xi}{L}$$

[連続式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u + v_w \xi)h] = 0 \quad (15)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi}[(u + v_w \xi)hu] + gh \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (16)$$

さらに、上記の式から微分系の基礎式と特性曲線法の関係式を求める。連続式、運動量方程式を変形すると、以下のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u + v_w \xi}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{h}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u + v_w \xi}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{g}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0$$

特性曲線法の関係式を導くために、行列表記すると下記のようなになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} u + v_w \xi & h \\ g & u + v_w \xi \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} = 0$$

よって、特性曲線上の関係を表す式(17)が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \pm 2\sqrt{gh}) + \frac{1}{L} (u + v_w \xi \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial \xi} (u \pm 2\sqrt{gh}) = 0 \quad (17)$$

(2) 数値解析法

前章と同様に、数値解析法として固定格子点の特性曲線法と有限体積法を用いており、変数の配置、離散化、計算格子についても同様である。計算条件を表-2に示す。

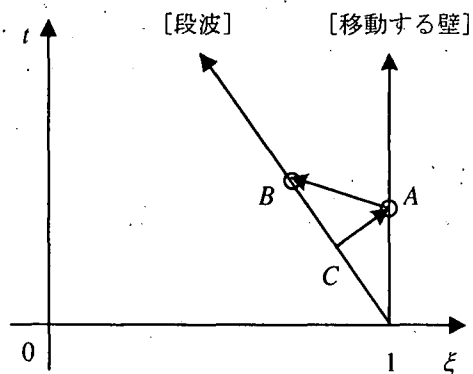


図-8 段波の波高に関する特性曲線網

(3) 壁の移動によって生じる段波

数値解析結果を示す前に、壁の移動速度と段波の特性量の関係を導く。

段波が一定の波速 c で伝播しているとする、流れ場全体に $-c$ の速度を加えることで、段波は相対的に静止する。段波をはさむ前後 2 断面での連続式は以下のように表される (図-7 参照)。

$$h_1(v_1 - c) = h_0(v_0 - c) \quad (18)$$

次に、運動量の保存を考える。流体の流出入による 2 断面間の単位時間あたりの運動量の増加は、式(18)を用いると次式となる。ここに ρ : 水の密度。

$$\rho h_1(v_1 - c)^2 - \rho h_0(v_0 - c)^2 = -\rho h_0(v_0 - c)(v_0 - v_1) \quad (19)$$

底面摩擦を無視し、圧力を静水圧で仮定すると、2 断面間の流体における力の釣り合い式が求められる。

$$\rho h_0(v_0 - c)(v_0 - v_1) + \rho g \frac{(h_1 - h_0)^2}{2} + \rho g h_0(h_1 - h_0) = 0 \quad (20)$$

式(18)、(20)から v_1 を消去し、 $v_0 = 0$ を代入すると、段波の波速の関係式が導かれる。

$$c = \sqrt{\frac{g(h_1 + h_0)h_1}{2h_0}} = \sqrt{gh_0 \left[\frac{1}{2} \frac{h_1}{h_0} \left(\frac{h_1}{h_0} + 1 \right) \right]} \quad (21)$$

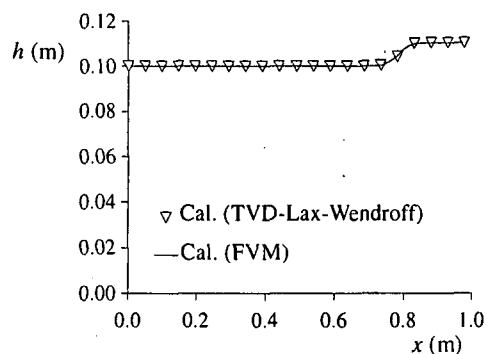
よって、 $c \geq \sqrt{gh_0}$ である。さらに、壁の移動速度と段波の波速、波高の関係式を求めるため、図-8 のような特性曲線網を考える。直線 AB, CA は特性曲線であり、段波が点 C, B に位置しているとする。式(17)から、特性曲線 AB 上で以下の式が成り立つ。

$$u_B - 2\sqrt{gh_B} = u_A - 2\sqrt{gh_A} \quad (22)$$

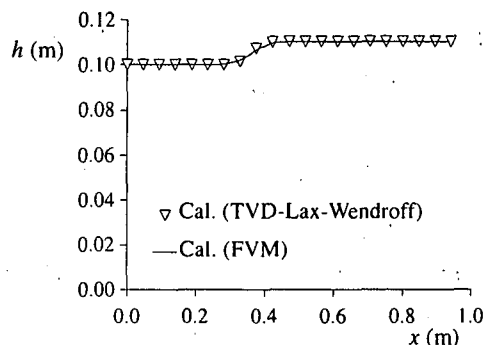
ここで、 $u_B = u_C$, $h_B = h_C$ を仮定すると、次の式が成り立つ。

$$u_A + 2\sqrt{gh_A} = u_C + 2\sqrt{gh_C} = u_B + 2\sqrt{gh_B} \quad (23)$$

式(22)、(23)から段波上流部の流速は壁の移動速度と等しい



(i) $t = 0.2$ (s)



(ii) $t = 0.6$ (s)

図-9 水面形の時間変化 (Case V-1)

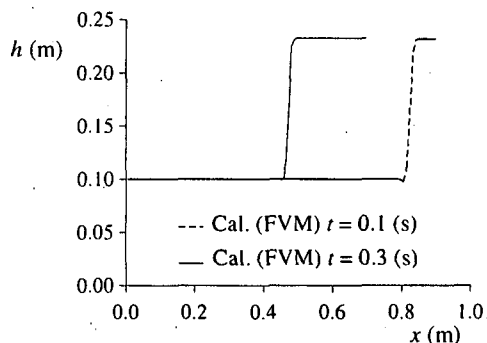


図-10 水面形の時間変化 (Case V-2)

ことが示される。

$$u_B = u_A = v_w, \quad \sqrt{gh_B} = \sqrt{gh_A} = \sqrt{gh_1}$$

次に、式(18)と(21)から上流部の波高 (水深) を求めると、以下の関係が導かれる。

$$c = \frac{h_1 v_w - 0}{h_1 - h_0} = \sqrt{gh_0 \left[\frac{1}{2} \frac{h_1}{h_0} \left(\frac{h_1}{h_0} + 1 \right) \right]} \quad (24)$$

式(24)を変形すると、壁の移動速度 v_w と波高の関係式(25)が得られる。

$$\left(\frac{h_1}{h_0} \right)^3 - \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 - \frac{h_1}{h_0} \left(1 + \frac{2v_w^2}{gh_0} \right) + 1 = 0 \quad (25)$$

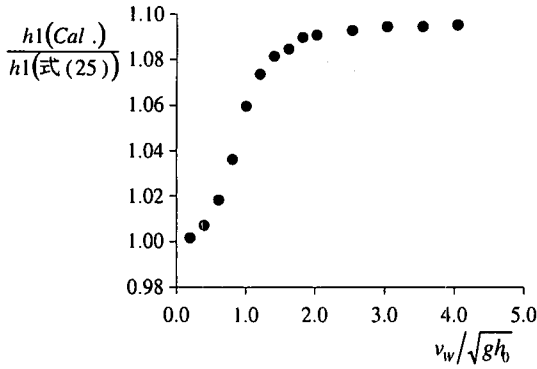


図-11 段波上流部波高に関する比較

(4) 考察

右壁の移動速度 v_w が $\sqrt{gh_0}$ を超えない場合、超える場合に ついて各々計算結果を示したものが、図-9, 10 である。なお $\sqrt{gh_0}$ を超える場合、右壁付近の運動量輸送が大きく、保存則系ではない特性曲線法では水位が急激に立ち上がり、体積が保存されないため、有限体積法のための結果を示す。図をみると、時間の経過とともに段波が進んでいく様子がわかる。また $\sqrt{gh_0}$ を超える場合と超えない場合で、段波の形状に違いがあるが、これは壁の移動による運動量輸送の大きさが異なるためではないかと考えられる。移動速度が $\sqrt{gh_0}$ を超える場合では、水深配が大きく、碎波が起ると考えられるが、本研究では碎波モデルを考慮していないので、この点については今後の課題である。

次に、初期水深、壁の移動速度を様々に変化させ、段波上流部の波高に関して理論解と有限体積法による計算結果を比較したものが、図-11 である。壁の移動速度が小さい場合には運動量輸送も小さく、式(25)を導く際の仮定が成り立つため計算結果と解析値が一致している。

3. 2 右壁を振動させる場合

(1) 基礎式

右壁を以下のように一定周期 T で振動させる場合を考え、前節と同様に、保存則系と微分系の基礎式を以下に示す。

$$L = L_0 + d_w \sin(\omega_0 t), \quad \frac{dL}{dt} = d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

よって、座標変換メトリックスは、次のようになる。

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_x = \frac{1}{L}, \quad \xi_t = -\frac{\xi}{L} \frac{dL}{dt} = -\frac{\xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)}{L}$$

上記の関係を式(1), (2)に代入すると、連続式、運動量方程式について以下の式が得られる。

[連続式]

表-3 右壁を振動させる場合の計算条件

Case	L_0 (m)	h_0 (m)	d_w (m)	T (s)
D-1	1.0	0.1	0.2	5.0
D-2	1.0	0.1	0.02	20.0
D-3	1.0	0.1	0.02	4.0
D-4	1.0	0.1	0.02	2.8

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lh) + \frac{\partial}{\partial \xi} \{ [u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)] h \} = 0 \quad (26)$$

[運動量方程式]

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lhu) + \frac{\partial}{\partial \xi} \{ [u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)] hu \} + gh \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad (27)$$

式(26), (27)を変形すると、次式となる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{h}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{g}{L} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0$$

特性曲線法の基礎式を導くため、上式を行列表記すると以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) & h \\ g & u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

従って、式(28)を変形すると、式(29)が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \pm 2\sqrt{gh}) + \frac{1}{L} (u - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial \xi} (u \pm 2\sqrt{gh}) = 0 \quad (29)$$

(2) 数値解析法

前節と同様に、数値解析法として特性曲線法と有限体積法を用い、変数の配置、離散化、計算格子については前述のとおりである。計算条件の一部を表-3に示す。

(3) 線形解

壁の振幅 d_w が壁の長さ L_0 に比べて十分小さく、角振動数 ω_0 も小さい (ゆっくりと振動する) 場合について理論解析を行い、線形解を求める。

まず、次式のように水理量を平均値と微小な偏差の和として表し、基礎式を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad u = u_0 + u' \quad (u_0 = 0) \quad (30)$$

上式を基礎式系に代入すると以下ようになる。

[連続式]

$$(L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial \xi} - d_w \xi \omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (31)$$

[運動量方程式]

$$(L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial u'}{\partial t} - \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) \frac{\partial u'}{\partial \xi} + g \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (32)$$

式(31), (32)を変形すると, h' に関する線形化方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & - (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t))^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \\ & - \xi d_w \omega_0^2 \{ L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w \sin^2(\omega_0 t) + d_w \} \frac{\partial h'}{\partial \xi} \\ & + 2 \xi d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial \xi} \\ & + (g h_0 - \xi^2 d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)) \frac{\partial^2 h'}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

次に, 壁面での境界条件は次のように与えられる.

[$\xi = 1$ (移動する壁)]

$$u' = \frac{dL}{dt} = d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad \frac{du'}{dt} = -d_w \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \quad (34)$$

この流速に関する境界条件を用いて, 水面変動の境界条件が導かれる. 式(34)を運動量方程式(32)に代入し, 連続式(31)を用いて変形すると, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} & d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \frac{\partial h'}{\partial t} \\ & - d_w h_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \\ & + [g h_0 - \{d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2] \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

[$\xi = 0$ (固定壁)]

$$u' = 0, \quad \frac{\partial h'}{\partial \xi} = 0 \quad (36)$$

ここで, h' をべき乗展開を用いて次のように表す.

$$h' = C_0(t) + C_2(t) \xi^2 + C_3(t) \xi^3 + C_4(t) \xi^4 + C_5(t) \xi^5 + \dots \quad (37)$$

式(37)を式(35)に代入すると, 境界条件として式(38)を得る.

$$\begin{aligned} & d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \\ & \times \left(\frac{dC_0}{dt} + \frac{dC_2}{dt} + \frac{dC_3}{dt} + \frac{dC_4}{dt} + \frac{dC_5}{dt} \right) \\ & - d_w h_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) (L_0 + d_w \sin(\omega_0 t)) \\ & + [g h_0 - \{d_w \omega_0 \cos(\omega_0 t)\}^2] \{ 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 \} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

また, 式(37)を式(33)に代入すると, 式(39)が得られる.

$$\begin{aligned} & - \{ L_0^2 + 2d_w L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 \sin^2(\omega_0 t) \} \\ & \times \left(\frac{d^2 C_0}{dt^2} + \frac{d^2 C_2}{dt^2} \xi^2 + \frac{d^2 C_3}{dt^2} \xi^3 + \frac{d^2 C_4}{dt^2} \xi^4 + \frac{d^2 C_5}{dt^2} \xi^5 \right) \\ & - \xi d_w \omega_0^2 \{ L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w \cos^2(\omega_0 t) + d_w \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (2C_2 \xi + 3C_3 \xi^2 + 4C_4 \xi^3 + 5C_5 \xi^4) \\ & + 2 \xi d_w \omega_0 \{ L_0 \cos(\omega_0 t) + d_w \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \} \\ & \times \left(2 \frac{dC_2}{dt} \xi + 3 \frac{dC_3}{dt} \xi^2 + 4 \frac{dC_4}{dt} \xi^3 + 5 \frac{dC_5}{dt} \xi^4 \right) \\ & + (g h_0 - \xi^2 d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)) \\ & \times (2C_2 + 6C_3 \xi + 12C_4 \xi^2 + 20C_5 \xi^3) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

式(39)を ξ の各オーダーで整理し, ξ^0, ξ^1, ξ^2 の各係数を0とすると, 式(40)~(42)が得られる.

$$\xi^0 : - \{ L_0^2 + 2d_w L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 \sin^2(\omega_0 t) \} \frac{d^2 C_2}{dt^2} + g h_0 2C_2 = 0 \quad (40)$$

$$\xi^1 : 6g h_0 C_3 = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \xi^2 : & - \{ L_0^2 + 2d_w L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 \sin^2(\omega_0 t) \} \frac{d^2 C_2}{dt^2} \\ & - d_w \omega_0^2 \{ L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w \cos^2(\omega_0 t) + d_w \} 2C_2 \\ & + 2d_w \omega_0 \{ L_0 \cos(\omega_0 t) + d_w \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \} 2 \frac{dC_2}{dt} \\ & + 12g h_0 C_4 - d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) 2C_2 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

また, 体積一定の条件から次式が得られる.

$$\begin{aligned} & L_0 \left(C_0 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{4} C_3 + \frac{1}{5} C_4 + \frac{1}{6} C_5 \right) \\ & + d_w \sin(\omega_0 t) \left(h_0 + C_0 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{4} C_3 + \frac{1}{5} C_4 + \frac{1}{6} C_5 \right) = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

ここで, $C_0 \sim C_5$ を以下のようにおく. 但し, 式(41)から $C_3 = 0$ とする.

$$C_0 = \alpha_{01} \sin(\omega_0 t) + \beta_{01} \cos(\omega_0 t) \quad (44a)$$

$$C_2 = \alpha_{21} \sin(\omega_0 t) + \beta_{21} \cos(\omega_0 t) \quad (44b)$$

$$C_4 = \alpha_{41} \sin(\omega_0 t) + \beta_{41} \cos(\omega_0 t) \quad (44c)$$

$$C_5 = \alpha_{51} \sin(\omega_0 t) + \beta_{51} \cos(\omega_0 t) \quad (44d)$$

式(44)を式(43)に代入すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} & \sin(\omega_0 t) \left(L_0 \alpha_{01} + \frac{1}{3} L_0 \alpha_{21} + \frac{1}{5} L_0 \alpha_{41} + \frac{1}{6} L_0 \alpha_{51} + d_w h_0 \right) \\ & + \cos(\omega_0 t) \left(L_0 \beta_{01} + \frac{1}{3} L_0 \beta_{21} + \frac{1}{5} L_0 \beta_{41} + \frac{1}{6} L_0 \beta_{51} \right) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

同様に, 式(38)は(46)となる.

$$\begin{aligned} & (d_w \omega_0 L_0 \cos(\omega_0 t) + d_w^2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)) \\ & \times [\cos(\omega_0 t) \omega_0 (\alpha_{01} + \alpha_{21} + \alpha_{41} + \alpha_{51}) \\ & - \sin(\omega_0 t) \omega_0 (\beta_{01} + \beta_{21} + \beta_{41} + \beta_{51})] \\ & - \{ d_w h_0 \omega_0^2 L_0 \sin(\omega_0 t) + d_w^2 h_0 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \} \\ & + \{ g h_0 - d_w^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \} \\ & \times \{ \sin(\omega_0 t) (2\alpha_{21} + 4\alpha_{41} + 5\alpha_{51}) \\ & + \cos(\omega_0 t) (2\beta_{21} + 4\beta_{41} + 5\beta_{51}) \} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

さらに、式(40), (42)に代入して d_w^2 の項を無視し、 $\sin(\omega_0 t)$, $\cos(\omega_0 t)$ の係数を0とおくと、以下の代数方程式が得られる。

式(46)：

$$\sin(\omega_0 t) : -d_w h_0 \omega_0^2 L_0 + g h_0 (2\alpha_{21} + 4\alpha_{41} + 5\alpha_{51}) = 0 \quad (47a)$$

$$\cos(\omega_0 t) : 2\beta_{21} + 4\beta_{41} + 5\beta_{51} = 0 \quad (47b)$$

式(40)：

$$\sin(\omega_0 t) : L_0^2 \omega_0^2 \alpha_{01} + 2g h_0 \alpha_{21} = 0 \quad (48a)$$

$$\cos(\omega_0 t) : L_0^2 \omega_0^2 \beta_{01} + 2g h_0 \beta_{21} = 0 \quad (48b)$$

式(42)：

$$\sin(\omega_0 t) : L_0^2 \omega_0^2 \alpha_{21} + 12g h_0 \alpha_{41} = 0 \quad (49a)$$

$$\cos(\omega_0 t) : L_0^2 \omega_0^2 \beta_{21} + 12g h_0 \beta_{41} = 0 \quad (49b)$$

式(45)：

$$\sin(\omega_0 t) : \alpha_{01} + \frac{1}{3}\alpha_{21} + \frac{1}{5}\alpha_{41} + \frac{1}{6}\alpha_{51} = -\frac{d_w h_0}{L_0} \quad (50a)$$

$$\cos(\omega_0 t) : \beta_{01} + \frac{1}{3}\beta_{21} + \frac{1}{5}\beta_{41} + \frac{1}{6}\beta_{51} = 0 \quad (50b)$$

式(48), (49)からそれぞれ

$$\alpha_{01} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \alpha_{21}, \quad \beta_{01} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \beta_{21}$$

$$\alpha_{41} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \alpha_{21}, \quad \beta_{41} = \frac{-2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} \beta_{21}$$

が導かれ、式(47), (50)に代入して整理すると、次式となる。

$$\left(2 - \frac{L_0^2 \omega_0^2}{3g h_0}\right) \alpha_{21} + 5\alpha_{51} = \frac{d_w h_0 L_0 \omega_0^2}{g h_0}$$

$$\left(-\frac{2g h_0}{L_0^2 \omega_0^2} + \frac{1}{3} - \frac{L_0^2 \omega_0^2}{60g h_0}\right) \alpha_{21} + \frac{1}{6}\alpha_{51} = -\frac{d_w h_0}{L_0}$$

上記の連立1次方程式を解くと、係数が次のように求まる。

$$\alpha_{21} = \frac{d_w h_0}{L_0} \frac{36X(X+30)}{6(X^2-48X+360)} \quad (51)$$

$$\alpha_{51} = \frac{d_w h_0}{L_0} \frac{-36X^3}{60(X^2-48X+360)} \quad (52)$$

さらに、 α_{01} , α_{41} が得られる。

$$\alpha_{01} = \frac{-d_w h_0}{L_0} \frac{72X(X+30)}{6(X^2-48X+360)} \quad (53)$$

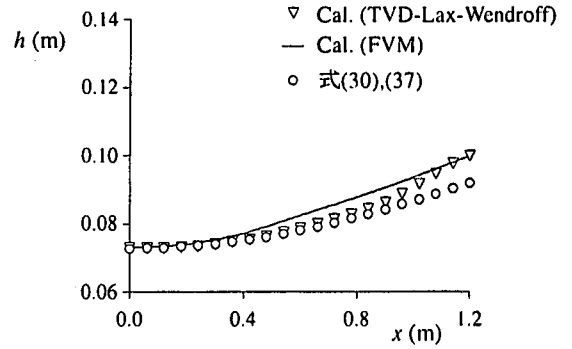
$$\alpha_{41} = \frac{-d_w h_0}{L_0} \frac{3X(X+30)}{6(X^2-48X+360)} \quad (54)$$

ここに、 X は次式で定義される。

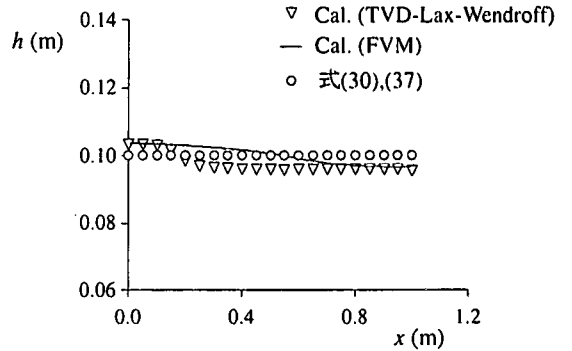
$$X = \frac{L_0^2 \omega_0^2}{g h_0}$$

同様にして、 β については以下の式が成り立つ。

$$\beta_{01} = \beta_{21} = \beta_{41} = \beta_{51} = 0 \quad (55)$$

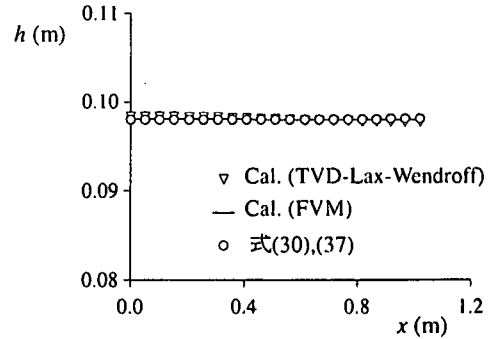


(i) $t=21.25$ (s)

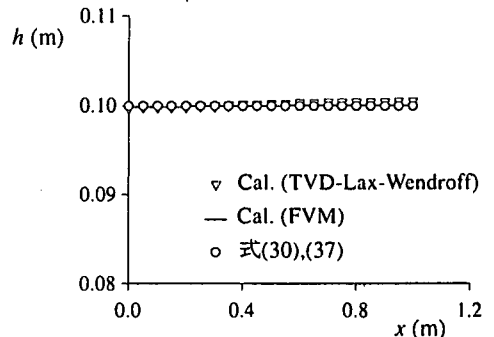


(ii) $t=22.5$ (s)

図-12 水面形の時間変化 (CaseD-1)



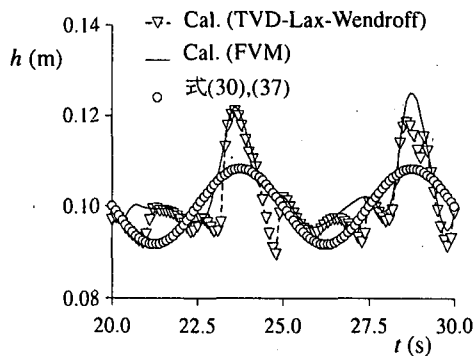
(i) $t=45.0$ (s)



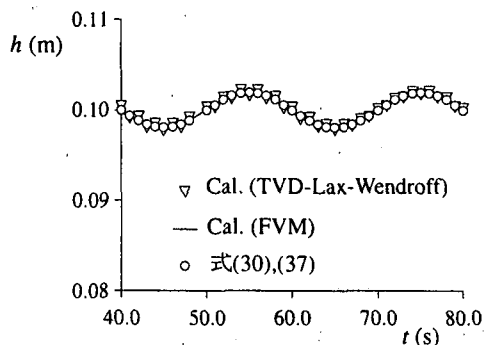
(ii) $t=50.0$ (s)

図-13 水面形の時間変化 (CaseD-2)

式(51)~(55)を式(37)と(44)に代入することで、水面変動に関する線形解を計算することができる。



(a) CaseD-1



(b) CaseD-2

図-14 右端壁における水深の時間変化

(4) 考察

壁の振動の角振動数や振幅が大きい場合について異なる時刻での水面形の比較を示したものが図-12である。図をみると、この計算条件では角振動数、振幅が大きいため、計算結果と線形解が適合していない。

一方壁の振動振幅が小さく、振動の周期が大きい場合について水面形の時間変化を示したものが図-13である。この場合には、線形解と計算結果がほぼ一致している。

さらに、線形解と数値解析結果の適合性を検証するため、右端壁における水深の時系列を示したものが図-14である。CaseD-1を(a)として、(a)の振幅を1/10、周期を4倍に長くしたものが(b)である。図を見ると、振幅を小さく、周期を長くするにしたがって3者が一致していく様子が確認できる。

線形解析における水深分布式(37)の係数である式(51)~(54)の分母を0にすると、振幅と角振動数に関する共鳴関係式として次式が得られる。

$$X^2 - 48X + 360 = 0 \quad (56)$$

上記の式から、共鳴点を示す角振動数について2つの解が存在する。

$$X = \frac{L_0^2 \omega_0^2}{g h_0} \approx 9.3 \text{ or } 38.7 \quad (57)$$

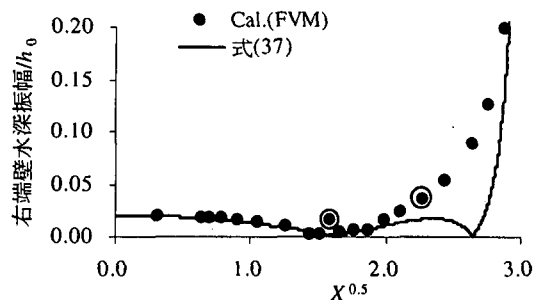
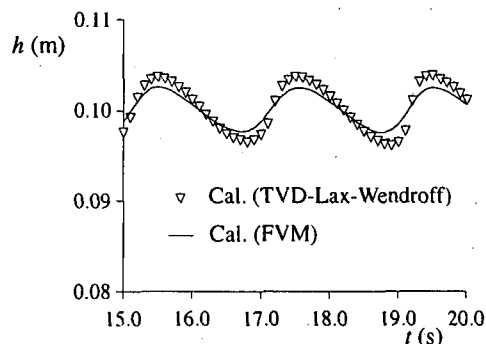
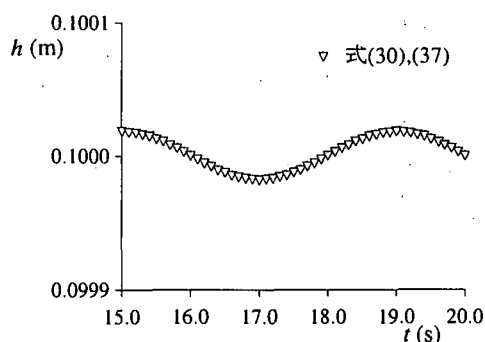


図-15 壁の振動数に対する水面の振動振幅の変化



(a) Cal.



(b) 式(36)

図-16 右端壁における水深の時間変化 (CaseD-3)

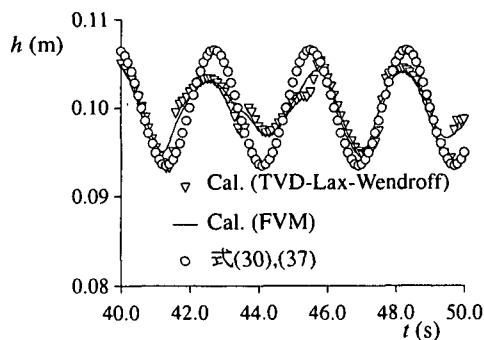


図-17 右端壁における水深の時間変化 (CaseD-4)

そこで、水槽の長さ $L_0 = 1.0$ (m)、初期水深 $h_0 = 0.1$ (m)、振幅を小さい場合の $a = 0.02$ (m) に固定し、角振動数 ω_0 を変化させて数値解析を行い、共鳴関係について考察する。図-15は、

横軸に $\sqrt{X}$ ，縦軸に初期水深で無次元化された振幅をとり，計算結果と線形解についてまとめたものである。なお，現実的な場合を考え，最も小さい周期を2.2(s)とする。図を見ると，計算結果は共鳴関係とほぼ一致しているが， $\sqrt{X}$ が1.5付近と共鳴点近傍で適合性が十分ではない。そこで，両者の違いが顕著な2ケース（図中の○印） $T=4.0$ (s)と $T=2.8$ (s)について，右端壁の水深の時系列を比較する。図-16は $T=4.0$ (s)の場合の右端壁水深の時系列を示したものである。図を見ると，有限体積法による計算結果では線形解に比べて，周期が半分の高周波となり，また振幅もかなり大きくなっている。図-17は， $T=2.8$ (s)の場合の右端壁水深の時系列を示したものである。周期に関しては一致しているが，振幅にはずれがある。周期，振幅の違いについては，今後検討していきたい。

5. おわりに

本研究は，移動一般座標系で表示した浅水流方程式を基礎式とし，単純で基本的な水理現象の数値解析法について考察したものである。テストケースとして，一定加速度場や造波板のように水槽の壁が動くことにより生じる波と流れなどを取り扱った。簡易モデル，解析解などと比較することで，モデルの検証を行った。今後，鉛直加速度を考慮した基礎式による数値解析を行うとともに振動台上の水槽内の水面挙動について考察したい。

参考文献

- 1) 木村一郎，細田 尚，音田慎一郎：非線形 $k-\epsilon$ モデルによる斜め越流型水制周辺の三次元流況に関する数値解析，応用力学論文集，第6号，2002。
- 2) Nagata, N., Hosoda, T., Nakato T. and Muramoto, Y. : 3D numerical simulation of flow and local scour around a cylindrical pier, *J. Hydrosci. and Hydraulic Eng.*, vol.19, No.2, pp.113-125, 2002.
- 3) 細田 尚，長田信寿，村本嘉雄：移動一般座標系による開水路非定常流の数値解析，土木学会論文集 No.553/ II-34, pp.267-272, 1996.
- 4) Nagata, N., Hosoda, T. and Muramoto, Y. : Numerical analysis of river channel processes with bank erosion, *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, vol.26, No.4, pp.243-252, 2000.
- 5) 朝位孝二，細田 尚：移流方程式の数値解析，水工学における計算機利用の講習会講義集(土木学会水理委員会基礎水理部会)，pp.13-22, 1999.
- 6) 細田 尚，朝位孝二：ダム破壊流れの1次元解析，水工学における計算機利用の講習会講義集(土木学会水理委員会基礎水理部会)，pp.23-31, 1999.

(2003年4月18日受付)