

三次元不確定波動場のスペクトル確率有限要素解析の並列計算

Parallel Computation of Spectral Stochastic Finite Element Analysis
of Three Dimensional Uncertain Wave Field

本田利器*・村上裕宣**

Riki HONDA and Hironobu MURAKAMI

*正会員 工博 京都大学助手 京都大学防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

**学生員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

Consideration of uncertainty is essential in simulation of the earthquake motion, since material properties of the ground has many uncertain factors. Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) is a powerful computation tool for three dimensional wave propagation problems in the uncertain media. Although SSFEM is more efficient than Monte Carlo simulation, its computation involves huge matrices and requires long computation time. This paper presents an algorithm suitable for parallel computation of SSFEM with MPI. Numerical examples show that the presented scheme can reduce computation time without losing accuracy.

Key Words : stochastic finite element method, wave propagation, uncertainty, parallel computation

1. はじめに

大地震の頻発する我が国においては、地震被害の軽減は重要な課題である。効率的な地震対策や耐震設計を行うためには、地震動の正確な予測、再現が重要となる。しかし、地震動に影響を及ぼす要素の多くが不確定性を含み、そのほとんどは事実上計測が不可能であるため、地震動の予測を正確に行うことは非常に困難である。したがって、不確定な因子についてはその不確定性を定量的に考慮した検討を行うことも重要である。

本研究では、様々な不確定因子のうち、波動の伝播媒体である地盤の物性に着目する。地震動は地盤中を伝わる波であり、地盤の物性が地震動の伝わる経路や伝わり方に影響を与えることは明らかである。しかし、地盤は不規則な媒体であり、その地盤物性の完全な情報を得ることは不可能である。したがって、物性などの地盤の情報の不確定性の影響を定量的に考慮することは重要であると考えられる。

一方、地震動の伝播媒体である地盤が不均質であることにより受ける影響についても、これまでも多くの研究がなされている。例えば、干場¹⁾は不均質な構造によって発生する散乱波について輻射伝達理論を用いた検討を行っている。また、Fehler²⁾は、不均質な地盤を伝播する地震動の包絡線形状についてマルコフ近似を用いた検討を行っている。これらの検討では、不規則な媒体である地盤の物性を確率場として扱っており、その点でここで用いる解析と共通点も多い。

このような確率場を対象とした解析に用いられる手法としては、モンテカルロシミュレーションがあげられる。しかし、この手法は大量の計算を行う必要があるため必ずしも合理的ではない。効率的な手法としては確率有限要素法があげられる。確率有限要素法の特徴は、確率場における関数に対して確率空間と物理空

間での二つの関数展開を施すことである。確率有限要素法としては様々な手法が提案されてきているが、例えば Yamazaki ら³⁾や Spanos ら⁴⁾のように、Neumann 展開を用いて解を得る手法では、計算が不安定となる等の問題もあり、実際の問題への適用が困難な面もある。

そのような問題に適用できる有効な手法としては、Ghanem and Spanos⁵⁾が開発したスペクトル確率有限要素法 (Spectral Stochastic Finite Element Method, 以下、SSFEM) があげられる。SSFEM は、不確定性を有する解を、あらかじめ定められた空間上での近似として算出するものであり、不確定性の大きい問題においても比較的安定性の高い解析が可能である。

SSFEM は、モンテカルロシミュレーションよりもはるかに効率的に解析を行うことが可能であるが、計算過程において大きなマトリクスを扱わなければならない、また長い計算時間を要する。そこで、本研究では、計算時間の短縮を目的とし、SSFEM による動的問題を時間領域で効率的に並列計算するための計算手法の提案を行う。時間積分法として、酒井⁶⁾、本田⁷⁾によって提案された、収束計算を伴わない時間積分法を適用する。これにより、解を射影する空間同士の持つ相互作用を、収束計算を行うことなく考慮することができる。

2. スペクトル確率有限要素法

2.1 確率場の展開

SSFEM は、不確定性を有する変数の場を Karhunen-Loève 展開 (KL 展開) により効率的に展開し、また、得られる解を Polynomial Chaos 展開 (PC 展開) された空間上で求めるものである。KL 展開及び PC 展開とは、確率関数を基底関数を用いて離散的に展開する方法である。

後述するように、本検討では、せん断剛性がガウス確率過程として与えられるという不確定性を有する問

題に対して SSFEM を適用する。定式化の詳細は参考文献^{5),8)}に譲るものとし、以下においてはその概要を簡単に述べる。

ガウス確率過程の KL 展開について述べる。今、ガウス確率過程 $G(x, \theta)$ を考える。 x, θ はそれぞれ、位置、及び確率空間における事象を表す。確率過程 $G(x, \theta)$ は領域 D において定義されており、領域 D 内の 2 点 x, y における G の相関関数が $C(x, y)$ で与えられているとする。 G は、例えば後述する数値解析例の場合、位置 x における事象 θ に対応するせん断剛性の値に相当する。 $G(x, \theta)$ の KL 展開は、

$$G(x, \theta) = \bar{G}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \quad (1)$$

と与えられる。ここで、 $\bar{G}(x)$ は $G(x, \theta)$ の x における期待値であり、 $\xi_i(\theta)$ は互いに独立な正規ガウス確率変数である。 λ_i 及び $f_i(x)$ は、

$$\int_D C(x, y) f_i(y) dy = \lambda_i f_i(x) \quad (2)$$

の固有値及び固有解としてそれぞれ与えられる。なお、 f_i は領域 D 内における二乗積分値が 1 となるよう正規化された関数である。SSFEM の計算においては、式 (1) の和を無限大までとすることは不可能なので、KL 展開の展開次数は有限とする。式 (1) においては、固有値 λ_i の絶対値が大きい項の貢献が大きいため、固有値の絶対値が大きい項から順に採用することで、有限次数の展開で、対象としている確率過程 $G(x, \theta)$ を効率的に近似できる。なお、ここでは詳述はしないが、KL 展開による再現性等についての数値的な検討もなされている⁵⁾。

一方、解として得られる変位 $u(\theta)$ はガウス過程であるとは限らないので、これを次式のように PC 展開した形で求める。

$$u(\theta) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (3)$$

ここで、 $\Gamma_p(\cdot)$ はガウス確率変数を引数とする p 次の汎関数であり、Polynomial Chaos (PC 汎関数) と呼ばれる。この汎関数の張る空間が p 次の Homogeneous Chaos (HC 空間) となり、 $\Gamma_p(\cdot)$ はその空間の直交基底を構成する。無限大の次数までの HC 空間を考えると任意の 2 次確率過程は PC 展開された形で表すことができる。以下、簡単のため、Ghanem and Spanos⁵⁾にならい、 $a_{i_1, \dots, i_k}$ 及び $\Gamma_n(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_n}(\theta))$ に順に番号を与え、それぞれ、 u_i 及び $\Psi_i[\{\xi_i\}]$ と表わすものとする。ここで、 $\{\xi_i\}$ は必要な数の確率変数 $\xi_i (i = 1, 2, \dots)$ の集合を表す。これにより、式 (3) は次のように表される。

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i[\{\xi_i\}] \quad (4)$$

ここで引数の θ は省略してある。

SSFEM では、KL 展開と同様に、PC 展開においても展開次数は有限とする。これは、解を、想定する HC 空間に属する確率過程として近似的に求めることを意味する。

以下では、KL 展開の展開次数を N_{KL} 、考慮する HC 空間の次数を N_{HC} 、対応する PC 汎関数の (0 次の定数関数を除く) 項数を N_{PC} と表す。

2.2 SSFEM による波動伝播解析の定式化

せん断剛性がガウス確率過程として与えられる不確定場における波動伝播を考える。

式 (1) で表されるせん断剛性 $G(x, \theta)$ に対応する剛性マトリクスを $K(\theta)$ とおくと、これは、

$$K(\theta) = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\theta) K_n \quad (5)$$

と表される。今、減衰は無いものとする、運動方程式は次式のように表される。

$$Ma(t, \theta) + K(\theta)u(t, \theta) = p(t) \quad (6)$$

ただし、 M は質量マトリクス、 $a(t), u(t), p(t)$ はそれぞれ加速度、変位及び外力ベクトルである。加速度 $a(t)$ と変位 $u(t)$ を式 (4) のように PC 展開し、その展開次数を有限値 (N_{PC}) で打ちきる。前述したように、これは加速度や変位を、対応する次数までの HC 空間に属する確率過程として求めることを意味する。なお、加速度及び変位の展開係数はそれぞれ $a_i(t)$ 及び $u_i(t)$ と表す。また、剛性マトリクスとして式 (5) において展開次数を有限 (N_{KL}) としたものを考える。これらの展開された加速度や変位、剛性マトリクスを、式 (6) に代入すると、次式が得られる。

$$M \sum_{i=0}^{N_{PC}} a_i(t) \Psi_i[\{\xi_i\}] + \sum_{n=0}^{N_{KL}} \xi_n(\theta) K_n \sum_{i=0}^{N_{PC}} u_i(t) \Psi_i[\{\xi_i\}] = p(t) \quad (7)$$

次に、式 (7) を変位場や加速度場を展開した HC 空間上で近似する事を考える。PC 汎関数 $\Psi_j[\{\xi_i\}]$ は、この HC 空間の直交基底を構成するため、式 (7) をこれらの PC 汎関数上に射影し、これにより得られる式を満たす解を算出することで、当該する HC 空間内での最良近似を得ることが出来る。ここで、式 (7) を PC 汎関数上に射影するとは、式 (7) と PC 汎関数との内積 (積の期待値) をとることである。

PC 汎関数 $\Psi_j[\{\xi_i\}]$ と式 (7) の内積をとると

$$\sum_{i=0}^{N_{PC}} \langle \Psi_i[\{\xi_i\}] \Psi_j[\{\xi_i\}] \rangle M a_i(t) + \sum_{n=0}^{N_{KL}} \sum_{i=0}^{N_{PC}} \langle \xi_n \Psi_i[\{\xi_i\}] \Psi_j[\{\xi_i\}] \rangle K_n u_i(t) = \langle p(t) \Psi_j[\{\xi_i\}] \rangle \quad (8)$$

となる。なお、加速度や変位の展開係数について

$$a_j(t) = \frac{d^2}{dt^2} u_j(t) \quad (9)$$

という関係が成立するため、式 (8) は、運動方程式と同様に二階の微分方程式として解くことができる。

以上で設定された問題は線形であるので、周波数領域で解析することが可能である。しかし、本研究では、非線形問題への適用も視野にいれ、時間領域での解法について検討する。

2.3 SSFEM の波動伝播問題への適用性

SSFEM の 2 次元波動場に対しての適用性については、本田の検討⁸⁾ 等において検証されている。本検討においても、3 次元波動場への適用性について検証するため、SSFEM 及びモンテカルロシミュレーション (MCS) により波動伝播解析を行い、両者の結果を比較し、SSFEM の適用性を検討した。以下に簡単にその結果を示す。

解析の対象としては、一辺の長さが 1 の立方体、すなわち、 $(x, y, z) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ となる $1.0 \times 1.0 \times 1.0$ の領域を考える。この領域を、一辺を 7 要素に、領域全体では $7 \times 7 \times 7 = 343$ 要素に分割し、有限要素モデルとする。単位体積重量は 1.0、ポアソン比は 0.25、せん断波速度は毎秒 0.1 とする。なお、この計算例では特定の対象を想定しているわけではないので、時間以外の値は無次元量値として与える。せん断剛性 G がガウス確率過程で与えられる不確定値であるとする。領域内の 2 点 (x_i, y_i, z_i) , $(i = 1, 2)$ におけるせん断剛性 G の自己相関関数 $C(x, y)$ は

$$C(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (\gamma \bar{G})^2 \exp \left\{ -\frac{(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)}{b} \right\} \quad (10)$$

と与えられるものとする。ここで、 b は相関距離に相当するパラメタ (以下では単に相関距離と呼ぶ。) であり、ここでは $b=1.0$ とする。 γ はせん断剛性の値のばらつきを決めるパラメタであり、ここでは標準偏差が期待値の 10% となる値 $\gamma=0.1$ を用いる。波源として、時刻 $t=0.0$ [sec] に、領域の中央にデルタ関数で与えられる爆破震源を外力として与える。

解析手法について述べる。MCS については試行回数を 5,000 回とした。試行回数を 4,000 回とした場合と 5,000 回とした場合の結果に差はほとんど見られず、5,000 回の試行を行うことで、対象とする問題の確率的な性質は十分表現できていると考えられる。SSFEM については、比較のため、KL 展開の展開次数 $N_{KL} = 2$ 及び $N_{KL} = 4$ のケースを想定した。考慮する HC 空間の次数は $N_{HC} = 2$ とした。

解析結果の例として、点 $(-0.36, -0.36, -0.36)$ における x 方向の変位の時刻歴を図-1 に示す。KL 展開の次数に関わらず、いずれも MCS の結果を良く評価できている。また、時刻 $t=4.0$ [sec] における平面 $z = -0.36$ における分散値の比較を図-2 に示す。同図には、MCS 及び SSFEM による変位の z 成分の分散値を示してある。同図より、SSFEM による分散値は MCS による値を評価できていることが分かる。KL 展開次数を $N_{KL} = 2$ とした場合の結果も、 $N_{KL} = 4$ とした場合に比較して精度は低いですが、MCS の結果をおおむね近似できていると

見なせる。これらの結果により、SSFEM の 3 次元不規則波動場の解析への適用性が示されたと考えられる。

3. SSFEM の並列計算

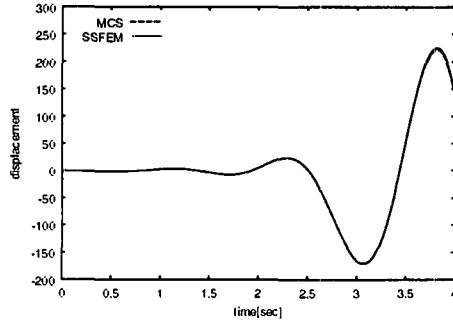
SSFEM において波動伝播解析を行う際には、式 (8) をマトリクス表記し、その式を解くことで解を得る。SSFEM では、独立した未知数、例えば節点変位などの数は、式 (7),(8) に示すように、対象となる確定的な FEM モデルの自由度に、解を展開する HC 空間の基底 (PC 汎関数) の数 $(N_{PC} + 1)$ を乗じたものとして表される。したがって、マトリクス表記された式 (8) を解く際にフルマトリクスを扱うと、その大きさは、確定的な有限要素解析のマトリクスの $(N_{PC} + 1) \times (N_{PC} + 1)$ 倍となる。(ただし疎マトリクスであるなどの理由からこの大きさのマトリクスを実際に使うことは稀である。) SSFEM による解析においては、このような大規模な計算を効率的に行ない、解析時間を短縮することが求められる¹⁰⁾。複数の CPU を用いて処理する並列計算は有効な手段の一つである。

本研究で提案する並列計算法は、動的問題の時間領域での解析であることを利用する手法である。同様の線形問題を周波数領域で解析することで効率的な並列化が可能なのは言を俟たないが、非線形問題への適用も想定していること等の理由から、ここでは時間領域での解析法について検討する。

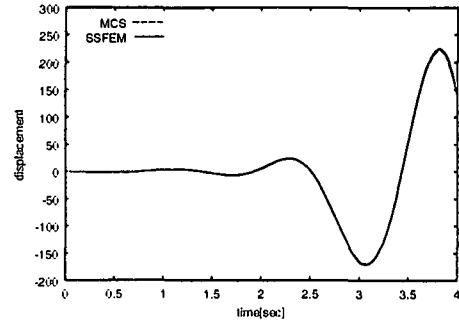
提案する手法においては、式 (8) を、それぞれの j ごとに並列処理することを考える。これは、それぞれの PC 汎関数 $\Psi_j[\{\xi_j\}]$ に射影された方程式を個別の問題として解くことに相当する。しかし、各 PC 汎関数に射影された方程式は相互作用を有し、独立ではない。このような問題を並列処理するための方法としては、時間積分に中央差分法等の陽解法を用いることも考えられる。しかし、一般に陽解法は計算が不安定で、特に非線形問題へ適用する場合には、非常に小さい時間刻みで解析することが求められ、必ずしも合理的ではない。そこで、ここでは陰解法を用いて安定的な解析を行なうことを考える。一般に陰解法による解析においては、領域間の相互作用による影響を考慮するために収束計算が必要となる。しかし、本研究においては、この相互作用を非線形外力として捕え、酒井ら⁶⁾及び本田ら⁷⁾によって提案された、収束計算を伴わない時間積分法 (Non-Iterative Time Integration Scheme. 以下、NITI 法) を適用することで、この問題を回避する。この手法を用いることで、異なる PC 汎関数に射影された方程式の間の相互作用を、収束計算を行うことなく効率的に考慮することができる。

3.1 収束計算を伴わない時間積分法 (NITI 法)

NITI 法は、陰解法と陽解法を結合させて時間積分を行なう手法である。NITI 法は、陽解法と同様に収束計算を必要とせず、陰解法と同程度の安定性を有するため、離散時間間隔を大きくとることが可能である。ここでは、陽解法として中央差分法、陰解法として Newmark β 法 (ここでは $\beta = 1/4$ としたものであるため平均加速度法となる) を用い、両者を結合させた NITI 法を用

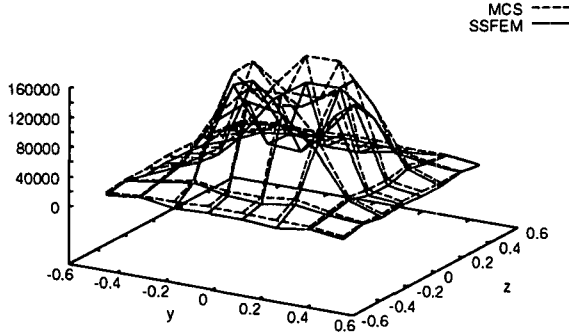


(a) KL=2, HC=2

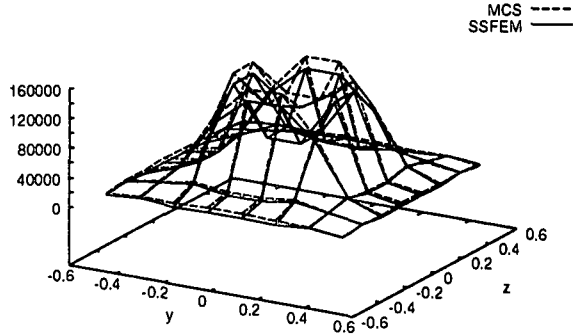


(b) KL=4, HC=2

図-1 点 $(-0.36, -0.36, -0.36)$ における変位の x 成分の期待値の時刻歴



(a) KL=2, HC=2



(b) KL=4, HC=2

図-2 面 $z = -0.36$ における変位の z 成分の分散の分布 ($t=4.0$ [sec])

いる。

以下に、次式で表される運動方程式を用いて定式化を示す。

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t, u) \quad (11)$$

ここで、 M, C, K は質量、減衰、剛性マトリクス、 $\ddot{u}, \dot{u}, u$ は加速度、速度、変位ベクトルである。 $f(t, u)$ は、変位量 u と時刻 t に依存する外力である。

時間刻み間隔を Δt とする。また、 $t_k = k\Delta t$ を k ステップ目の時刻、 $\ddot{u}_k, \dot{u}_k, u_k$ はそれぞれ k ステップ目の加速度、速度、変位ベクトルを表すものとする。

時刻 $t = t_n$ から、 $t = t_{n+1}$ への時刻の更新を考える。まず、時刻 t_{n+1} における外力を $f(t_{n+1}, u_n)$ と仮定して、平均加速度法によりタイムステップを更新する。この時の加速度、速度、変位ベクトルを、 $\ddot{u}_{n+1}, \dot{u}_{n+1}$ 及び u_{n+1} と表すものと、これらの関係は次式で与えられる。

$$\ddot{u}_{n+1} = -\ddot{u}_n - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_n + \frac{4}{\Delta t^2} (u_{n+1} - u_n) \quad (12)$$

$$\dot{u}_{n+1} = -\dot{u}_n + \frac{2}{\Delta t} (u_{n+1} - u_n) \quad (13)$$

$$u_{n+1} = \left(K + \frac{2}{\Delta t} C + \frac{4}{\Delta t^2} M \right)^{-1} \cdot \left\{ f(t_{n+1}, u_n) + M \left(\frac{4}{\Delta t^2} u_n + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_n + \ddot{u}_n \right) + C \left(\frac{2}{\Delta t} u_n + \dot{u}_n \right) \right\} \quad (14)$$

ここで、時刻 $t = t_{n+1}$ における外力ベクトルは本来、 $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ であるから、式 (12)、(13)、(14) より得られた $\ddot{u}_{n+1}, \dot{u}_{n+1}$ 及び u_{n+1} は、外力の差分 Δf_u による誤差を含む。通常、この誤差を除去するために収束計算

を行う必要があるが、NITI 法では収束計算に相当する部分を陽解法を用いて計算する。

外力の差分 Δf_u は次式で表される。

$$\Delta f_u = f(t_{n+1}, u_{n+1}) - f(t_{n+1}, u_n) \quad (15)$$

この外力による応答の加速度、速度、変位を、 $\Delta \ddot{u}_{n+1}, \Delta \dot{u}_{n+1}, \Delta u_{n+1}$ と表すすると、これらは中央差分法により次式で与えられる。

$$\Delta \ddot{u}_{n+1} = \left(M + \frac{\Delta t}{2} C \right)^{-1} \Delta f_u \quad (16)$$

$$\Delta \dot{u}_{n+1} = \left(M + \frac{\Delta t}{2} C \right)^{-1} \Delta f_u \frac{\Delta t}{2} \quad (17)$$

$$\Delta u_{n+1} = 0 \quad (18)$$

以上より、 $t = t_{n+1}$ における応答は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{n+1} &= \ddot{u}_{n+1} + \Delta \ddot{u}_{n+1} \\ &= -\ddot{u}_n - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_n + \frac{4}{\Delta t^2} (u_{n+1} - u_n) + \left(M + \frac{\Delta t}{2} C \right)^{-1} \Delta f_u \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_{n+1} &= \ddot{u}_{n+1} + \Delta \dot{u}_{n+1} \\ &= -\ddot{u}_n + \frac{2}{\Delta t}(u_{n+1} - u_n) + \left(M + \frac{\Delta t}{2}C\right)^{-1} \Delta f_u \frac{\Delta t}{2} \quad (20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \bar{u}_{n+1} \\ &= \left(K + \frac{2}{\Delta t}C + \frac{4}{\Delta t^2}M\right)^{-1} \cdot \left\{f(t_{n+1}, u_n) + M\left(\frac{4}{\Delta t^2}u_n + \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_n + \ddot{u}_n\right) + C\left(\frac{2}{\Delta t}u_n + \dot{u}_n\right)\right\} \quad (21)\end{aligned}$$

式(18)より、変位ベクトルについては外力の差分を考慮することによる変化がないため、変位依存の外力項 $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ を更新する必要はない。したがって、これ以上の収束計算は必要なく、式(19)、(20)、(21)が、時刻 $t = t_{n+1}$ における加速度、速度、変位を与える。

NITI法の解はすべての時刻において運動方程式(11)を満たし、また、Taylor展開との誤差は Δt^3 のオーダーである。すなわち、NITI法は、Newmark β 法や中央差分法と同様に、2次精度の時間積分法である。

なお、以下では減衰のない系を想定するため、 $C = 0$ とする。

3.2 NITI法によるSSFEMの並列計算のアルゴリズム

SSFEMで扱うマトリクスは、非常に大きい疎である。今、確定的な有限要素解析に用いるマトリクスの大きさを持つマトリクスをブロックと呼ぶ。個々のブロックの大きさは、(自由度) $\times$ (自由度) である。具体的には、式(8)において、質量及び剛性マトリクスについてブロックを次式のように定義する。

$$M^{ij} = \langle \Psi_i[\{\xi_i\}] \Psi_j[\{\xi_j\}] \rangle M \quad (22)$$

$$K^{ij} = \sum_{n=0}^{N_{KL}} \langle \xi_n \Psi_i[\{\xi_i\}] \Psi_j[\{\xi_j\}] \rangle K_n \quad (23)$$

各ブロックに対応した外力を

$$p^j(t) = \langle p(t) \Psi_j[\{\xi_j\}] \rangle \quad (24)$$

と定義する。

SSFEMの質量及び剛性マトリクスにおいては、対角ブロックは常に非零マトリクスとなる。提案する計算法においては、剛性マトリクスのうち、対角ブロックの部分のみを剛性マトリクスとして扱い、非対角ブロックに変位を乗じたものを外力項として作用させて定式化する。剛性マトリクス K を、対角ブロックのみからなるマトリクス K^D と、非対角項のみからなるマトリクス K^{ND} を用いて $K = K^D + K^{ND}$ と表す。このとき、式(11)は次式のように変形できる。

$$M\ddot{u} + K^D u = f(t, u) - K^{ND} u \quad (25)$$

式(25)の右辺は、変位と時間に依存する外力と見なすことができるので、時間積分法としてNITI法を用いることができる。

質量マトリクス M および剛性マトリクス K^D には対角ブロック以外の要素は含まれないため、時刻 $t = t_{n+1}$

において、式(25)はそれぞれのPC汎関数に射影された方程式ごとに、次のように解くことができる。

$$M^{ii}\ddot{u}^i(t_{n+1}) + K^{ii}u^i(t_{n+1}) = p^i(t_{n+1}) - \sum_{j \neq i} K^{ij}u^j(t_{n+1}) \quad (26)$$

ここで、 i はPC汎関数の次数を示す。式(26)の左辺は、 i 次のPC汎関数に射影された運動方程式及び変数のみを有するものであるため、他の次数のPC汎関数に射影された式とは独立に通常の運動方程式と同様に解くことが可能である。これは、確定的な有限要素法と同じ規模のマトリクスの計算となり、複数のCPU上で並列に処理することができる。

ただし、前述したように、異なる次数のPC汎関数への射影の間での相互作用があるため、これらは完全に独立した方程式にはならない。式(26)の右辺には、異なる次数のPC汎関数への射影の項が含まれる。これらの項も考慮した効率的な解析が必要である。

提案する計算法では、NITI法を用いるため、まず、式(26)の右辺において、時刻 $t = t_n$ における変位量を用いて解く。すなわち、

$$M^{ii}\ddot{u}^i(t_{n+1}) + K^{ii}u^i(t_{n+1}) = p^i(t_{n+1}) - \sum_{j \neq i} K^{ij}u^j(t_n) \quad (27)$$

としたものを解く。これは、確定的な有限要素法と同じ規模のマトリクスの計算となる。

次に、変位が更新されたことによる影響、すなわち、相互作用の更新による影響を考慮するため、関係する次数のPC汎関数上での変位の値が必要となる。そのため、各CPU間で状態量の受渡しを行い、各PC汎関数上へ射影された運動方程式に

$$\Delta f_u^i = - \sum_{j \neq i} K^{ij} \{\bar{u}^j(t_{n+1}) - u^j(t_n)\} \quad (28)$$

という外力が時刻 $t = t_{n+1}$ において作用した場合の応答について考える。これらは、式(16)、(17)、(18)より以下のように求められる。

$$\Delta \ddot{u}^i = M^{ii-1} \Delta f_u^i \quad (29)$$

$$\Delta \dot{u}^i = M^{ii-1} \Delta f_u^i \frac{\Delta t}{2} \quad (30)$$

$$\Delta u^i = 0 \quad (31)$$

これらの値を、式(19)、(20)、(21)にそれぞれ代入することで、時刻 $t = t_{n+1}$ における値を求めることができる。

なお、SSFEMで扱うマトリクスは、非対角項は疎であるので、提案した手法で効率的に計算を行なうことができる。

3.3 並列計算の流れ

具体的な並列計算の手順について述べる。図-3に、SSFEMにおける並列計算の流れ図を示す。同図においては、 i 次のPC汎関数を i -th PC と表記してある。

計算を始める前に、各PC汎関数に射影された運動方程式について、式(19)、(20)、(21)の計算に必要なマトリクスや、異なる次数のPC汎関数間の相互作用の

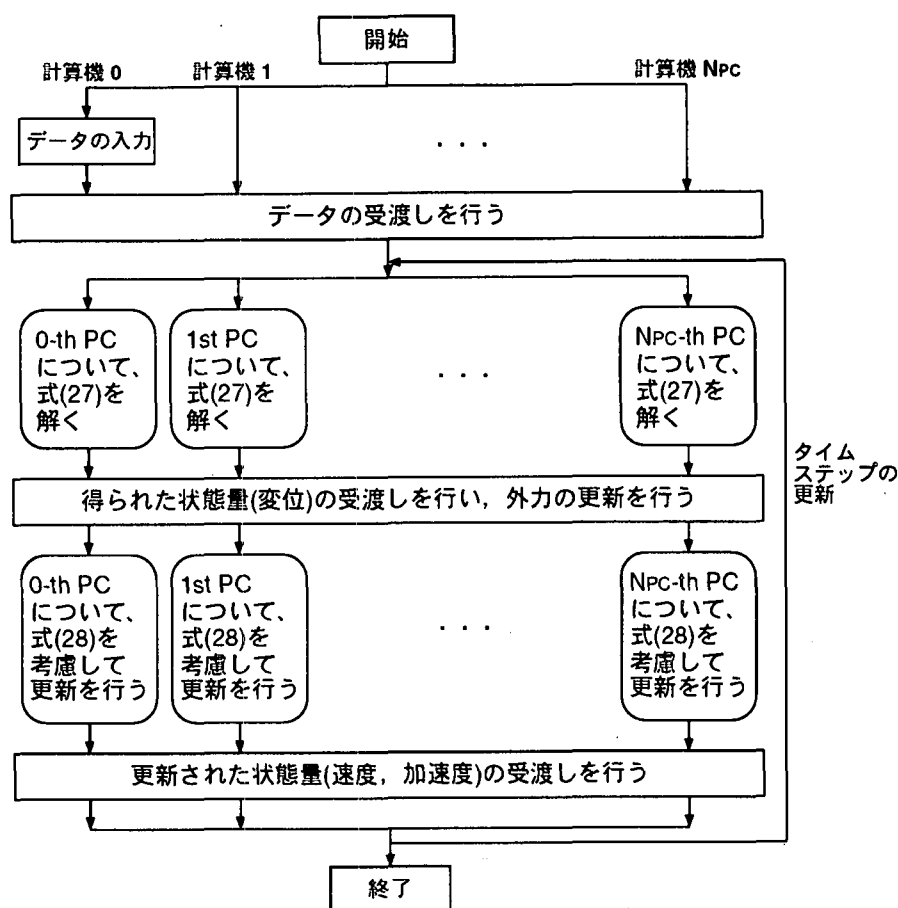


図-3 並列計算の流れ

算出に必要なマトリクス等を算出しておく。これらは、全計算時間を通じて不変であるので、計算開始時点で一度計算するのみで良い。

時間ステップの更新ごとにこれらのマトリクスを用いた計算を行なう。それぞれのCPUが扱うマトリクスの大きさは、確定的な有限要素解析のマトリクスと同程度の大きさであり、極端に大きなものとはならないため、効率的な計算が可能となる。

以下に、具体的な計算手順について、図-3に示す計算過程に基づいて説明を行う。

1. ひとつのCPUに、SSFEMの並列計算に必要な基本的なデータ（入力パラメタ等その他、各PC汎関数の計算に用いるマトリクスの値等も含む。）を入力し、これらのデータをそれぞれのCPUに渡す。
2. 時間積分を並列計算で行う。それぞれのCPUで、割り当てられたPC汎関数について式(27)の計算を行う。前ステップの時刻における変位量は前ステップの時間積分計算を行った際に、既に各CPUに渡してあるのでこの段階では他のCPUとのデータの受け渡しは必要としない。
3. 更新された変位量をCPU間で受け渡し、その変位量に基づき相互作用に相当する外力を更新する。
4. 式(28)で表される外力の差分による影響を考慮し、それぞれのPC汎関数上での状態量を算出する。（速度と加速度が更新される。）

5. ひとつのCPUから結果の出力を行う。このために、更新された状態量をCPU間で受け渡す。
6. 以下、最終時刻まで、上記2.～5.の手順を繰り返す。

4. 数値解析例

提案する計算手法の適用性を検討するため、数値計算を行ない、1CPUによる解析との比較検討を行なう。本数値計算例により、提案する並列計算手法の精度を検証し、また、計算効率の向上程度を検討する。

4.1 解析条件

剛性がガウス確率場となっている不規則場における波動伝播に対して、SSFEMを適用する。

解析の対象としては、2.3における解析と同様に、一辺の長さが1の立方体の領域を考える。ただし、要素分割においては一辺を40要素に分割し、モデル全体で $40 \times 40 \times 40 = 64,000$ 要素を用いる。せん断剛性の期待値 $\bar{G}$ は、せん断波速度が毎秒1.0なるように与える。せん断剛性の相関関数は式(10)で与えられるものとし、相関距離 $b = 1.0$ 、ばらつきの大きさ $\gamma = 0.1$ は前述の解析例と同様に与える。また、ポアソン比、単位体積重量は前述のモデルと同様にそれぞれ0.25及び1.0とする。

解析において、離散時間間隔は0.01秒とし、合計300

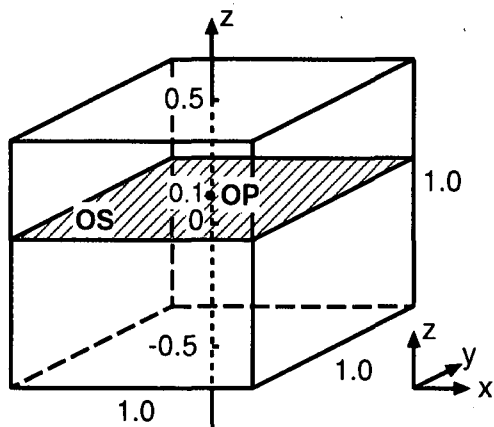


図-4 観測点 $(x, y, z) = (0.0, 0.0, 0.1)$ および観測面 $z = 0.1$

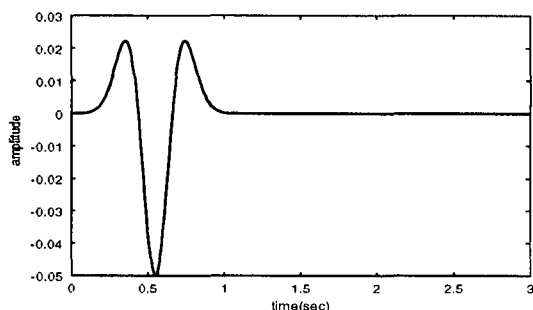


図-5 入力波の時刻歴

ステップ行うものとする。境界はすべて自由境界とする。波源としては、領域の中央の一要素に、卓越周波数が 2 Hz の Ricker 波を、爆破震源に相当する形で外力として与える。入力波の時刻歴波形を図-5 に示す。

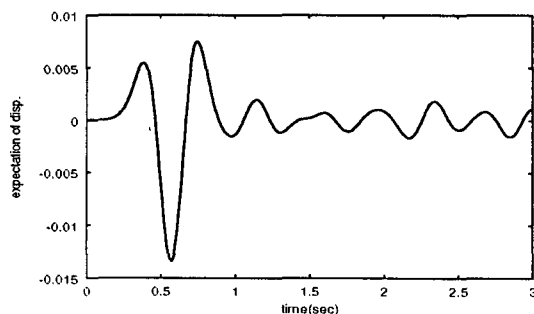
FEM 要素としては 8 節点要素を用いた。本検討での入力波の卓越周期 2Hz に相当する波長は 0.5 である。したがって要素分割として、1 波長あたり 20 要素（要素の対角長さで換算した場合 11.6 要素）が設けられている。

本解析では、適用性の検討において行なった計算結果も参考にし、KL 展開の展開次数及び HC 空間の次数はそれぞれ、 $N_{KL}=2$ 及び $N_{HC}=2$ とした。この場合、PC 展開の展開次数は $N_{PC}=5$ となる。したがって、式 (8) を、 $j = 0, \dots, 5$ の 6 種類について解く必要がある。本研究では、並列計算に 6 台の CPU を用いる。よって、それぞれの PC 汎関数についての計算はひとつの CPU を用いて行うことができる。

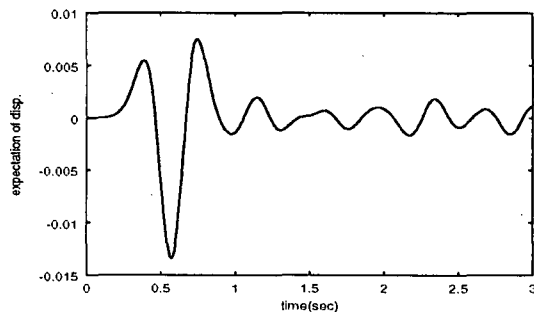
4.2 解析結果

上述の条件のもとで行った解析において、観測点 $(x, y, z) = (0.0, 0.0, 0.1)$ （以下、点 OP と呼ぶ）と、観測面 $z = 0.1$ （以下、面 OS と呼ぶ）における変位に着目して結果を検証する。点 OP 及び面 OS は、図-4 に示す通りである。なお、点 OP は面 OS の中心に位置する。

点 OP における変位の z 成分の期待値の時刻歴を図-6 に示す。また、面 OS における、時刻 $t=0.1$ [sec], 0.3 [sec], 0.5 [sec], 0.7 [sec] での変位の z 成分の期待値



(a) 1CPU



(b) 6CPU

図-6 点 OP における変位の z 成分の期待値の時刻歴

の分布を図-7 に、分散の分布を図-8 に示す。これらの図においては、1CPU による計算によって得られた結果と、6 台の CPU を用いて提案する計算手法によって行った並列計算による結果が示されている。

図-6 において、並列計算によって得られた結果は、1CPU による計算によって得られた結果とほぼ一致している。1CPU による結果と 6CPU による結果の差異を表す指標として「誤差率」を次式で定義する。

(誤差率)

$$= \left\{ \frac{\sum_1^N \{ (1\text{CPU による値}) - (6\text{CPU による値}) \}^2}{\sum_1^N (1\text{CPU による値})^2} \right\}^{1/2} \quad (32)$$

ここで、 N は節点数を表す。本計算における変位の分散値の誤差率は、 10^{-10} 程度であった。

図-6 から、点 OP における応答は、時刻 $t=0.3$ [sec], 0.5 [sec], 0.7 [sec] 付近で極値をとることが分かる。これらの時刻における面 OS での変位の分布を図-7、図-8 に示す。図-7 より、時間の経過とともに変位の期待値が外向きに伝播していく様子がわかる。また、図-8 より、変位の分散値も外向きに伝播するとともに、その絶対値も大きくなっていく様子も見られる。なお、変位の分散値の誤差率は 10^{-7} 程度であった。

以上のように、いずれの時刻においても、期待値、分散値ともに、並列計算による結果は 1CPU による計算によって得られた結果とよく一致していることが分かる。

なお、1CPU による逐次計算と並列計算では結果にわずかながら差が生じているが、これは、1CPU での計算が Newmark β 法による解析であるのに対し、並列計算では効率的な計算のため NITI 法を使っていることに起因する。両者とも 2 次精度の積分法であるた

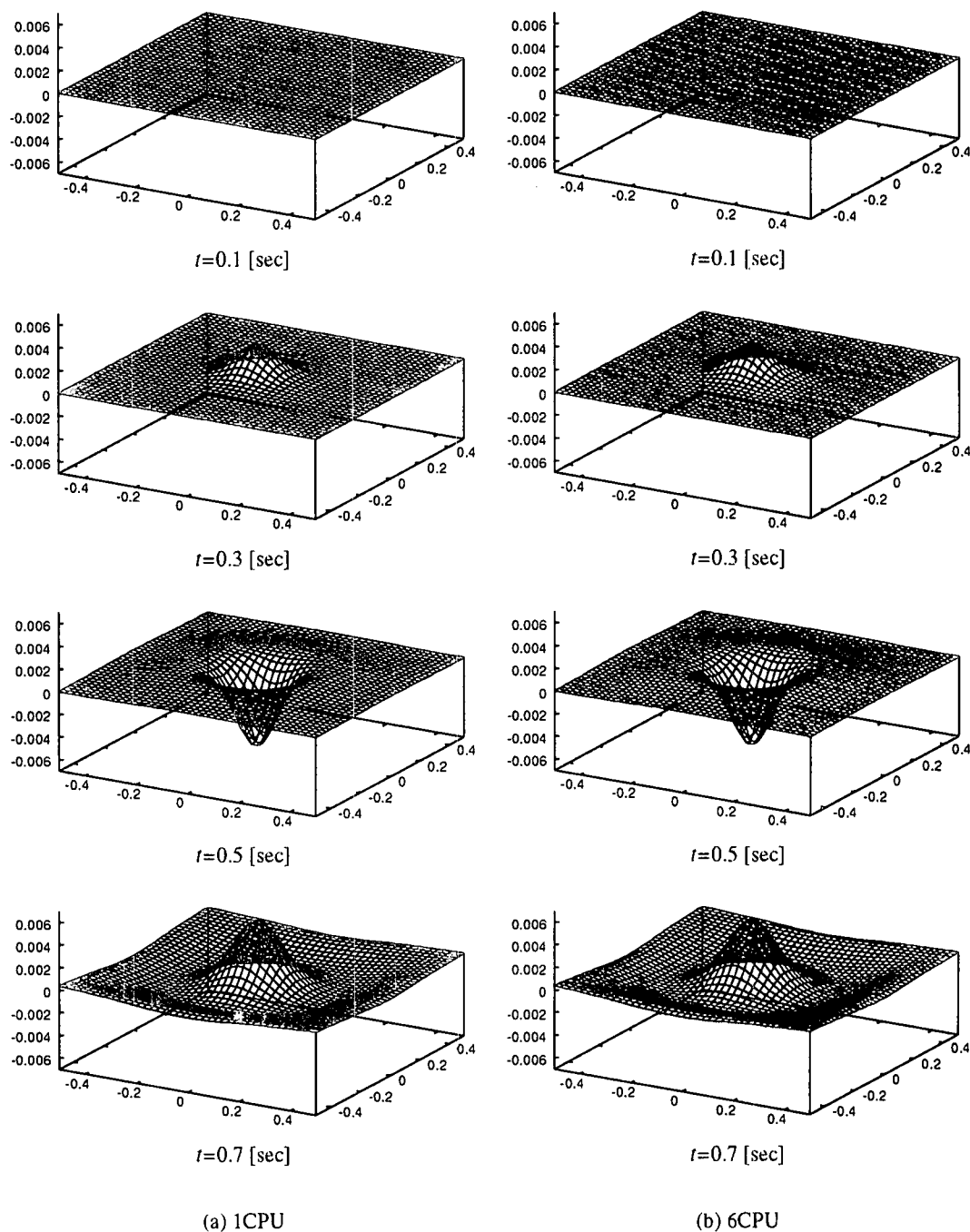


図-7 面 OS における変位の z 成分の期待値の分布

め、 Δt^3 のオーダーの誤差は含まれ得る。上述の計算の場合、時間刻みが $\Delta t = 0.01$ であるため、誤差として、 Δt^3 が 300 ステップ蓄積された場合に、最大では $(0.01)^3 \times 300 = 0.0003 \sim 10^{-4}$ 程度の誤差はあり得る。高精度な計算が必要ならば、時間刻み Δt を小さくすればよく、この時、1CPU と 6CPU の解析結果の差異も小さくなる。したがって、上述の「誤差」は本質的な問題ではないと考えられる。

また、便宜的に 1CPU による解析結果からの差異を「誤差」と呼んでいるが、1CPU の計算結果が、波動伝播現象の真値を与えているわけではない。提案する解析手法は 2 次精度の計算を効率的に実行するものである。1CPU との比較の目的は、並列化による影響の検証であり、波動伝播解析自体の正確さを検証するため

のものではない。

4.3 並列化効率

計算時間及び並列化による計算の効率化について述べる。計算は、クロック数 2.66 GHz の Pentium 4 により行なった。用いた CPU 数は 6 である。

CPU 時間についての比較を表-1 に示す。提案するアルゴリズムは、領域間での相互作用力の受け渡し以外はすべて並列で行なうものであるため、並列化の効率は高い。アムダールの法則にしたがって表記すれば、並列化部分率は 99.9% であり、6 台の CPU を用いる場合の速度向上比の上限はほぼ 6 となる。ただし、並列化に伴い、式 (28) 及び式 (29),(30) に示されるように、異なる領域間での相互作用の更新、及びその影響を評価

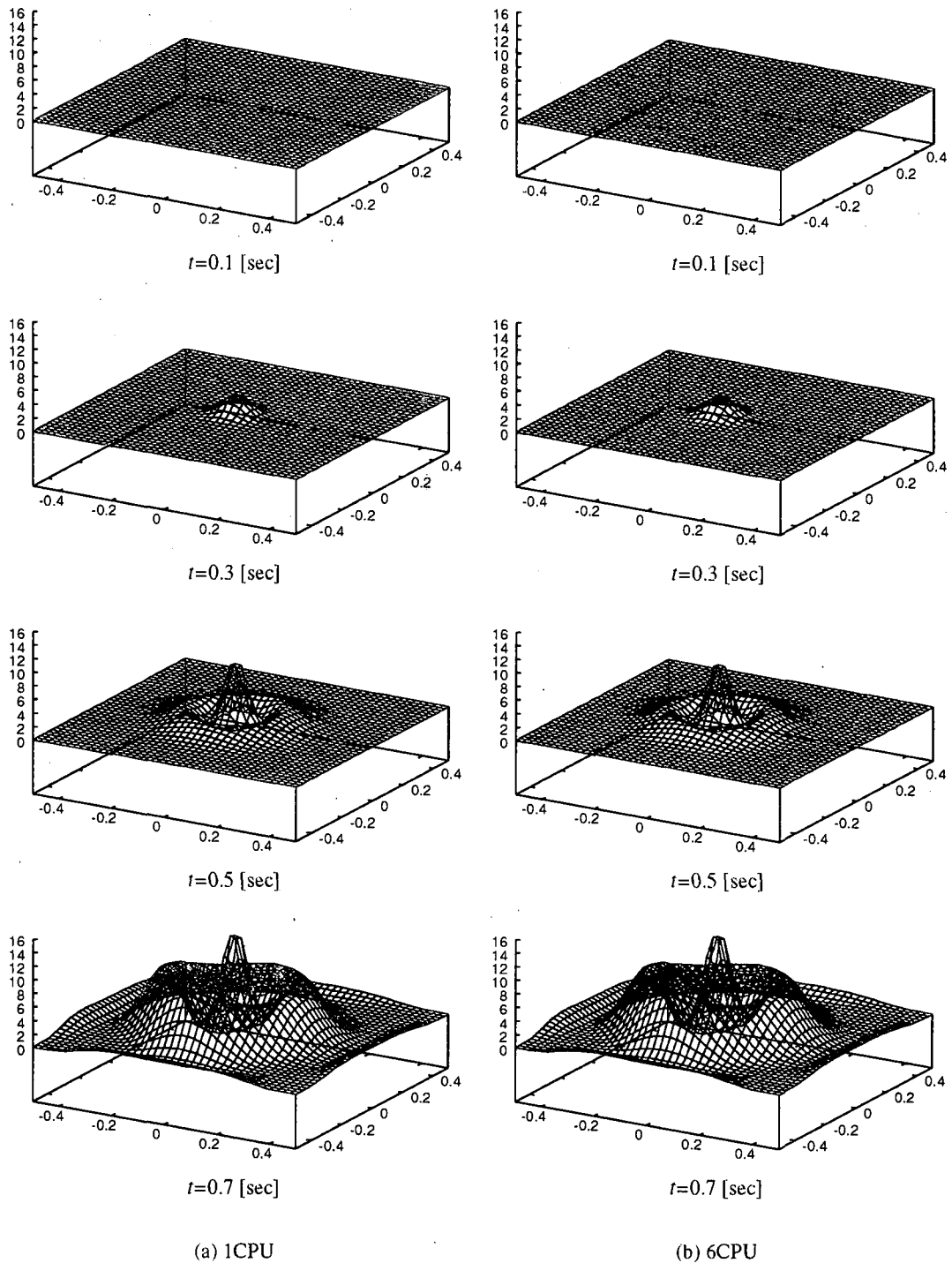


図-8 面 OS における変位の z 成分の分散の分布

する計算が必要となり、若干計算量が増えるため、この速度向上比を実現するのは難しい。ただし、各 CPU に割り当てられる計算量はほぼ均一であり、付加の不均衡は小さい。したがって、並列化により CPU 時間は比較的効率良く低減されていることが分かる。

表-2 に、解析の経過時間と速度向上率（1CPU による計算に要した経過（CPU）時間と並列計算の経過（CPU）時間の比）の比較を示す。6 台の CPU を用いた場合の速度向上率は、3.69 であった。並列化効率は 0.61 となる。今後、タイムステップの更新の際に必要な状態量の受け渡し方法の改良等により、計算の効率化を

計ることが可能であると考えられる。

表-1 CPU 時間および速度向上率

CPU 数	1	6
CPU 時間 [min]	257.2	45.0
速度向上率	1	5.71

表-2 経過時間および速度向上率

CPU 数	1	6
経過時間 [min]	257.2	69.7
速度向上率	1	3.69

5. おわりに

本研究では、不確定性を有する三次元の不規則場における波動伝播解析を、スペクトル確率有限要素法 (SS-FEM) を用いて行った。計算過程を並列化するにあたり、効率的な解析を行うために、酒井ら⁶⁾、本田ら⁷⁾による時間積分法を適用した。

並列計算によって得られた結果は、1CPU による計算によって得られる結果と一致した。また、本研究では、6 次の PC 汎関数を考えた場合に、計算時間を 30% 未満に短縮することができた。

今後の課題としては、アルゴリズムの改良や CPU 間でのデータの受渡しの効率化により、高速化を計ることがあげられる。また、より高次の PC 汎関数を考慮した場合や、より多くの並列計算機を用いた並列化を行い、その効率化についても検討するとともに、非線形問題への適用も考えたい。

参考文献

- 1) 干場充之：輻射伝達理論およびモンテカルロシミュレーションによるコーダエンベロープの記述, 地震, 第 2 輯, 第 54 巻 (2001), 109-125 頁。

- 2) Fehler, M., Sato, H. and Huang, L.-J. : Envelope Broadening of Outgoing Waves in 2D Random Media : A Comparison between the Markov Approximation and Numerical Simulations, Bulletin of the Seismological Society of America, 90, 4, pp.914-928, 2000.
- 3) Yamazaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G. : Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis, Journal of Engineering Mechanics, ACSE, Vol.114, No.8, pp.1335-1354, 1988.
- 4) Spanos, P. D. and Ghanem, R. : Stochastic Finite Elements Expansion for Random Media, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.115, No.5, pp.1035-1053, 1989.
- 5) Ghanem, R. G. and Spanos, P. D. : Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach, Springer - Verlag NY, 1991.
- 6) 酒井久和, 澤田純男, 土岐憲三 : 収束計算を伴わない動的非線形 FEM のための時間積分法, 土木学会論文集, No.507/I-30, 1995.
- 7) Honda, R., Sakai, H., Sawada, S. : Non-Iterative Time Integration Scheme for Nonlinear Dynamic FEM Analysis, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, (accepted)
- 8) 本田利器 : スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析, 土木学会論文集, No.689/I-57, pp.321-331, 2001.
- 9) パチエコ, P. (秋葉博 訳) : MPI 並列プログラミング, 培風館, 2001.
- 10) Pellisetti, M. F. and Ghanem, R. : Iterative Solution of Systems of Linear Equations arising in the context of Stochastic Finite Elements, Advances in Engineering Software, 31, pp.607-616, 2000.

(2003 年 4 月 18 日 受付)