

成層弾性波動場での散乱体と平面波の相互作用による散乱波の解析

Analysis of scattering waves in an elastic layered medium
caused by a scattering object and a plane incident wave

東平光生*

Terumi TOUHEI

*正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

A formulation and numerical examples are presented for scattering waves in an elastic layered medium. The scattering waves are caused by a scattering object and a plane incident wave. The formulation is carried out by introducing the boundary integral equation method and the complete eigenfunction expansion form of the Green's function developed by the author. The advantage of the present method is in that the formulation itself is independent of the number of layers. In addition, the scattering waves can be decomposed into the surface wave modes for the layered wave field, which enables us to investigate properties of the scattering waves in terms of the surface wave modes.

Key Words : scattering problem, elastic layered half space, spectral form of the Green's function

1. はじめに

著者はこれまで一連の研究で成層波動場の Green 関数の完全な固有関数展開表現を誘導し、これを用いた成層波動場中の散乱波の伝播の解析例を示してきた^{1)~5)}。

この研究の背景には大きく分けて二つの側面がある。ひとつは、1904 年の Lamb の問題⁶⁾によって明らかにされた、半無限弾性波動場の点加振解から分離される実体波と表面波についての数学的な問題である。ここでの問題意識は、実体波と表面波に関する数学的な共通の枠組みを固有値問題の視点で統一的に整理することである。固有値問題の視点は、Lamb の論文以降の 20 世紀の数学の分野で提示されてきたもので⁷⁾⁸⁾、量子力学のテキスト⁹⁾では Green 関数は、この視点から離散的な固有値と連続的な固有値の固有関数で表現されることになる。以下では、固有値はスペクトルという概念で論じられていることを考慮し、離散的な固有値の集合を離散スペクトル、連続的な固有値の集合を連続スペクトルと呼ぶことにする。また、Green 関数をスペクトル上の固有関数で展開した表現のことをスペクトル表現と呼ぶことにする。

一方、近年の成層弾性波動場の Green 関数の研究は、実際に Green 関数を合成する際のさまざまな問題を背景に、計算手法の展開にも大きな努力が払われてきた^{10)~14)}。こうした中、成層弾性波動場の Green 関数を離散スペクトルと連続スペクトルの固有関数で表現しようとする試みは著者が調べた限りにおいては見られなかった。Green 関数の数学的な表現形式の視点を変えることで、新たな物理的な解釈が与えられる可能性を考えれば、1904 年に Lamb によって提示された弾性波動の数理解を、現在の知見から考察することは意味があると考えられる。

もうひとつの背景は成層波動場中の散乱体から放射される散乱波の問題であり、この領域では地震工学や資源探査などの実際の応用に関わってくる。問題の解析は成層弾性波動場の Green 関数と境界積分方程式を用いることで可能になると考えられる一方、成層弾性波動場の Green 関数の複雑な表現形式のためもあり、均質無限領域での散乱体の扱い¹⁵⁾¹⁶⁾に比べ解析の実例はあまり多くない。一方、成層波動場中の散乱波は表面波や実体波成分が混在することから、散乱波の性質を理解することは、均質無限領域を伝播する散乱波に比べ困難を伴うと考えられる。こうした問題に対し成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現がどこまで適用できるかについては検討の余地がある。

本論文の目的は、こうした背景の中での著者の一連の研究^{1)~5)}を踏まえ、まず成層弾性波動場の Green 関数の完全な固有関数展開表現(スペクトル表現)を、これまでに得られた数学的な見解をベースに境界積分方程式に適用可能な形式として提示することである。ここでは、数学的な証明はこれまでの論文に^{1)~5)}に譲り、得られる結果が明確になるように構成した。そして、この表現形式を実際に境界積分方程式に適用することで、散乱波動場の解析を行い、散乱波と成層波動場を伝播するモードとの関係を明らかにする。

2. 散乱問題の定式化

2.1 問題の定義

ここでは図-1 に示すように成層弾性体中に埋め込まれた散乱体に平面波が照射され散乱波が生じる波動場について考える。成層弾性波動場については、以下の波動方程式を考える。

$$[(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot + \mu\nabla^2 + \rho\omega^2] u(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

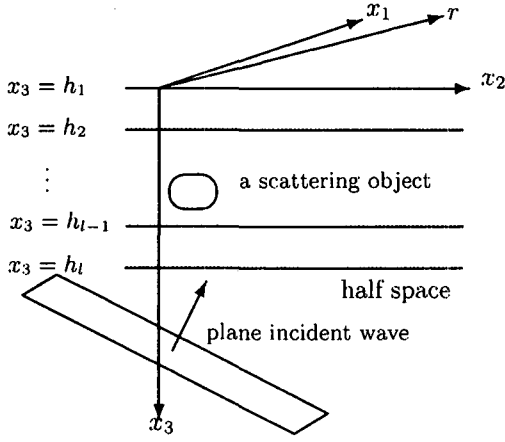


図-1 成層弾性体での散乱問題

ここに、 λ および μ は Lamé の定数、 ρ は質量密度であり、これらは層ごとに一定の深さ方向の関数とする。また、 u は変位場、 ω は角振動数、 r は波動場の空間座標を表し、具体的には

$$r = (x_1, x_2, x_3) \in R^2 \times R_+ \setminus (\Omega \cup \Gamma) \quad (2)$$

で考える。ここに Ω は散乱体の領域、 Γ は散乱体の境界を示す。成層弾性体の領域では層境界で変位の連続性と応力の釣り合い、自由表面上では表面力がゼロとなる条件を確保しなければならない。この問題については成層弾性波動場の Green 関数を用いることで解決する。散乱体の内部は均質として、次の弾性波動方程式を考える。

$$[(\lambda_{(i)} + \mu_{(i)}) \nabla \nabla \cdot + \mu_{(i)} \nabla^2 + \rho_{(i)} \omega^2] u_{(i)}(r) = 0 \quad (r \in \Omega) \quad (3)$$

ここに、Lamé の定数、質量密度および変位ベクトルにつけた添え字の (i) は散乱体内部のものであることを示す。式 (1) および (3) の解は境界積分方程式で表現され、散乱体境界 Γ での変位が等しいことと、表面力が釣り合うという条件で、二つの境界積分方程式の解は決定されることになる。

2.2 成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現について

境界積分方程式には変位場の Green 関数ばかりでなく、表面力の Green 関数が必要である。ここでは、境界積分方程式の定式化で必要となる成層弾性波動場の変位と表面力の Green 関数のスペクトル表現の誘導プロセスを概観する。表面力の Green 関数は変位の Green 関数に微分演算を施して誘導することは形式的には可能であるが数値的な安定性を考えると二重極のソースに対する応答関数として導出する方法が優れていることが分かっている⁵⁾。そこで、Green 関数を算出ためのソース関数を次のように定義する。

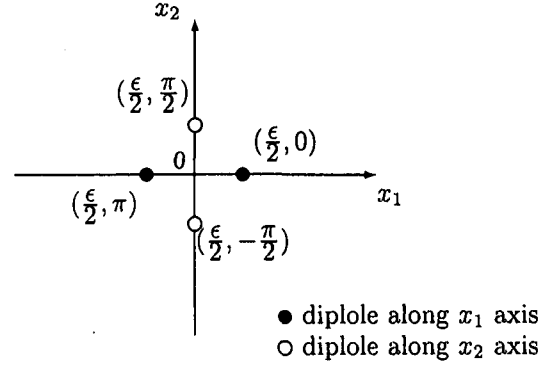


図-2 x_1 および x_2 軸におかれた二重極のソース

$$\begin{aligned} s(r, \theta) &= 1 \frac{\delta(r)}{r} \delta(\theta) \\ d_1(r, \theta) &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\delta(r - \epsilon/2)}{r} \delta(\theta) - \frac{\delta(r - \epsilon/2)}{r} \delta(\theta - \pi) \right) \\ d_2(r, \theta) &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\delta(r - \epsilon/2)}{r} \delta(\theta - \pi/2) - \frac{\delta(r - \epsilon/2)}{r} \delta(\theta + \pi/2) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 1 は 3×3 の単位行列、 ϵ は無限小の正数 (r, θ) は円筒座標系を採用した場合の水平座標成分、 δ は Dirac のデルタ関数、 s は一重極、 d_1 および d_2 はそれぞれ、 x_1 軸および x_2 軸回りの二重極のソースである。この二重極の置き方については、図-2 に示している。この図での二重極の位置に関する座標成分は円筒座標系の水平成分で表現している。この一重極と二重極のソースに対する Green 関数を次式で定義する。

$$\begin{aligned} LG(r) &= -s(r, \theta) \delta(z - z') \\ LT_\beta(r) &= -d_\beta(r, \theta) \delta(z - z'), \quad (\beta = 1, 2) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、

$$L = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot + \mu \nabla^2 + \rho \omega^2 \quad (6)$$

式 (5) を解くために Aki and Richards のテキスト¹⁷⁾ で採用されている成層弾性波動場のための Fourier-Hankel 変換を用いる。この変換と逆変換はそれぞれ次式で定義される。

$$\begin{aligned} \hat{u}_k^m(z) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r H_k^m(r, -\theta) u(r) dr \\ u(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^\infty \int_0^\infty k H_k^m(r, \theta) \hat{u}_k^m(z) dk \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 k は波数、 m は θ に関する Fourier 成分の次数、 H_k^m は水平方向へ伝播する波動の成分を特徴づけるマトリックスで

$$H_k^m(r, \theta) = [R_k^m(r, \theta), S_k^m(r, \theta), T_k^m(r, \theta)] \quad (8)$$

と表現される。ただし、 R_k^m 、 S_k^m および T_k^m は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} R_k^m(r, \theta) &= Y_k^m(r, \theta) e_z \\ S_k^m(r, \theta) &= \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) e_r + \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) e_\theta \\ T_k^m(r, \theta) &= \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) e_r - \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) e_\theta \\ Y_k^m(r, \theta) &= J_m(kr) \exp(im\theta) \end{aligned} \quad (9)$$

ここに $J_m(\cdot)$ は第1種 Bessel 関数、 e は3次元空間の単位基本ベクトルで下付きの添え字でベクトルの方向を示している。なお、 H_k^m のマトリックスとしての成分の具体的な配置やソース関数の Fourier-Hankel 変換の結果については **Appendix-A** に示している。 **Appendix-A** に示す結果によって、式 (5) の解は m に関する有限和として次式で表現される。

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-1}^1 \int_0^\infty k H_k^m(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m dk \\ T_\beta(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-2}^2 \int_0^\infty k H_k^m(r, \theta) g(z, z') \hat{d}_{\beta k}^m dk \end{aligned} \quad (\beta = 1, 2) \quad (10)$$

ここに、 $g(z, z')$ は波数領域の Green 関数で次式で定義される⁴⁾⁵⁾。

$$A_k g_k(z, z') = -1\delta(z - z') \quad (11)$$

ここに、 A_k は演算子で

$$A_k = a_1 \partial_z^2 + k a_2 \partial_z - k^2 a_3 + \rho \omega^2 \mathbf{1} \quad (12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{diag} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \mu & \mu \end{bmatrix} \\ a_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda + \mu) & 0 \\ (\lambda + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ a_3 &= \text{diag} \begin{bmatrix} \mu & (\lambda + 2\mu) & \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

である。また、 $\hat{s}_k^m$ および $\hat{d}_{\beta k}^m$ は一重極および二重極のソースに対する Fourier-Hankel 変換である。

Green 関数のスペクトル表現の誘導方法は $H_k^m(r, \theta)$ を

$$H_k^m(r, \theta) = \frac{1}{2} \left[H_k^{m(1)}(r, \theta) + H_k^{m(2)}(r, \theta) \right]$$

と分解し、積分を複素波数平面に拡張することが出発点となる。ここに、 $H_k^{m(1)}(r, \theta)$ および $H_k^{m(2)}(r, \theta)$ は

$$Y_k^{m(\tau)}(r, \theta) = H_m^{(\tau)}(kr) \exp(im\theta), \quad (\tau = 1, 2)$$

を用いて、水平方向へ伝播する波動を記述するマトリックスであり、 $H_m^{(\tau)}(\cdot)$ は Hankel 関数を示す。前論文⁴⁾⁵⁾ に示したように第1種 Hankel 関数は複素波数平面の

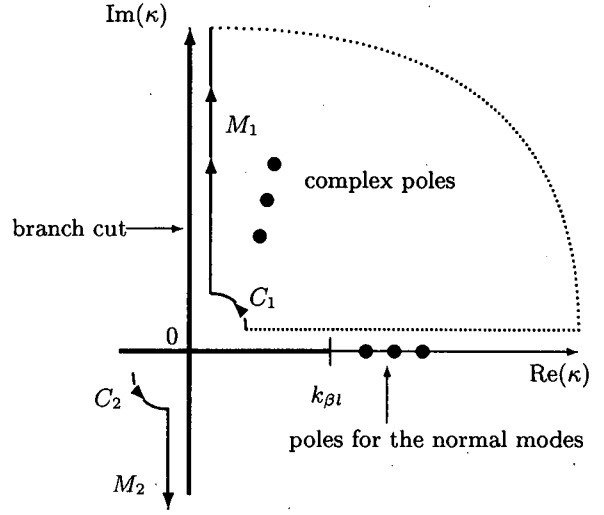


図-3 式 (14) のための積分路 M_1 , M_2 , C_1 および C_2

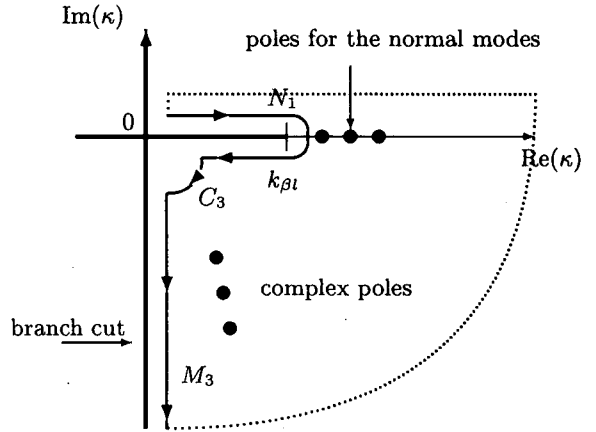


図-4 式 (15) の評価のための積分路 N_1 , M_3 および C_3

上半面で収束し、第2種 Hankel は下半面で収束するから、

$$\begin{aligned} & \int_\epsilon^\infty k H_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m dk \\ &= \int_{M_1+C_1} k H_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') H_k^m(r', -\theta') dk \\ &+ 2\pi i \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \text{Res}_{k=k_j} k H_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \int_\epsilon^\infty k H_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m dk \\ &= \int_{N_1+C_3+M_3} k H_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m dk \\ &- 2\pi i \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \text{Res}_{k=k_j} k H_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m \\ &- 2\pi i \sum_{k_n \in \sigma_{pn}} \text{Res}_{k=k_n} k H_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。ただし、積分路 C_1 , M_1 , C_3 , M_3 は図-3 お

よび図-4 に示している。また、 σ_{pn} は正の正規モードの波数の集合、 σ_{pl} は第1象限にある複素 Rayleigh 波モードの波数の集合、 k^* は k の共役複素数を表している。

ここで、複素 Rayleigh 波モードの存在について、若干のコメントを述べておく。固有関数は式 (12) に示した演算子 A_k を用いて次式を満足する同次解である。

$$A_k \Psi_k(z) = 0 \quad (16)$$

ここに、 $\Psi_k(z)$ は固有関数である。ここでの固有値問題の特徴は与えられた角振動数 ω に対して式 (16) を満足する固有関数と固有値 k を求めることである。式 (12) より明らかのように、演算子は k と k^2 の項を含み、したがって、対称な演算子の線形固有値問題に見られるように固有値が実数で得られる⁷⁾ という保証はない。式 (12) の演算子の成分を検討することで、この問題は k の項を含む Rayleigh 波成分について起こることが分かり、したがって、物理 Riemann 面においても複素 Rayleigh 波モードの存在を考慮して定式化を展開する必要がある。この物理 Riemann 面に存在する複素 Rayleigh 波モードは Watson¹³⁾ によっても論じられている。

また、図中の分岐線 (branch cut) は以下の条件を満足する波数の集合である。

$$\sigma_c = \{k \mid \operatorname{Re}(\gamma_k) = 0\} \cup \{k \mid \operatorname{Re}(\nu_k) = 0\} \quad (17)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sqrt{k^2 - k_{\alpha l}^2} \\ \nu_k &= \sqrt{k^2 - k_{\beta l}^2} \end{aligned} \quad (18)$$

であり、 $k_{\alpha l}$ および $k_{\beta l}$ は半無限層の P 波と S 波の波数である。詳細な議論は先の論文²⁾ に譲るが、この分岐線の波数は連続的に分布する固有値、すなわち連続スペクトルとしての性質を持ち、固有関数が存在することを示すことができる。

次に、積分路 C_1 、 M_1 に関する積分で $k = -k'$ の変数変換を行う。このとき文献¹⁸⁾ よりの帰結である Bessel 関数に関する性質

$$\begin{aligned} J_m(-kr) &= \exp(im\pi) J_m(kr) \\ H_m^{(1)}(-kr) &= \exp(i(m+1)\pi) H_m^{(2)}(kr) \end{aligned} \quad (19)$$

ならびにここでは詳細を省略するが波数領域の Green 関数の性質⁴⁾

$$\begin{aligned} g_{-k}(z, z') &= \operatorname{diag}[-1, -1, 1] \times \\ &\quad g_k(z, z') \times \operatorname{diag}[-1, -1, 1] \end{aligned} \quad (20)$$

を用いることで、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\int_{\epsilon}^{\infty} k H_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m dk \\ &= - \int_{M_2+C_2} k H_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m dk \\ &\quad + 2\pi i \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \operatorname{Res}_{k=k_j} k H_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') \hat{s}_k^m \end{aligned} \quad (21)$$

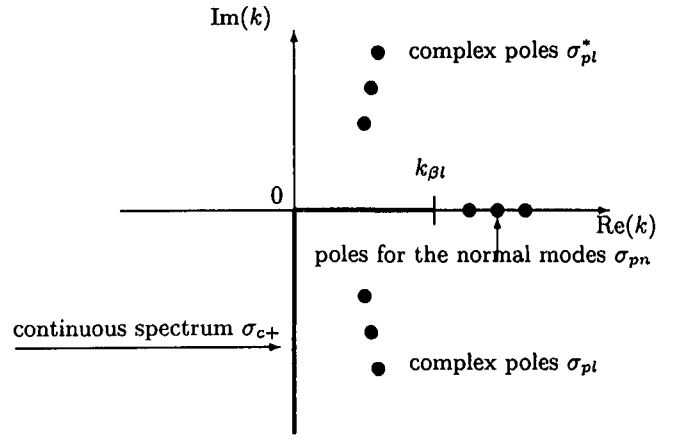


図-5 Green 関数の合成に必要な複素波数平面上のスペクトル

ただし、積分路 C_2 、 M_2 は図-3 に示している。ここで、式 (15) と式 (21) を加えることで、Green 関数のスペクトル表現を得ることができる。ただし、この和の演算では次の波数領域の Green 関数の性質を用いる。

Theorem 1 波数領域の Green 関数は正規モードおよび複素 Rayleigh 波の特異点において次のように固有関数に分解される。

$$\operatorname{Res}_{k=k_j} g_k(z, z') = \frac{1}{2} \Psi_{k_j}(z) E_{k_j}^{-1} \Psi_{k_j}(z')^T, \quad (k_j \in \sigma_p)$$

ここに、 σ_p は正規モードと複素 Rayleigh 波モードの波数の集合、 $\Psi_{k_j}(z)$ は固有関数、 E_{k_j} はこれらのモードのために定義されたエネルギー積分である。

Theorem 2 波数領域の Green 関数は分岐線上の波数で次のように固有関数に分解表示を持つ。

$$\begin{aligned} &g_k^{\uparrow}(z, z') - g_k^{\downarrow}(z, z') \\ &= \pi i \frac{k}{|k|} \Psi_k(z) E_k^{-1} \Psi_k(z')^T \quad (k \in \sigma_c) \end{aligned}$$

ここに、波数領域の Green 関数につけた添え字 $\uparrow$ および $\downarrow$ は半無限層での波動の進行方向を示す。また、 σ_c は複素波数平面的分岐線の波数の集合で、連続スペクトルであり $\Psi_k(z)$ は連続スペクトルで定義される固有関数、 E_k はこの固有関数に対するエネルギー積分である。

Theorem 3 Horizontal wavefunction を構成する Hankel 関数の $k = 0$ での特異性は Green 関数の表現に影響を与えない。

これらの性質によって Green 関数は次のような表現を持つことになる。ただし、以下の表現では図-5 に示す複素波数面上のスペクトルの部分集合を用いて Green 関数が表現される。また、式中の σ_{p+} は図-5 の記号を用いて以下のように定義されている。

$$\sigma_{p+} = \sigma_{pn} \cup \sigma_{pl} \cup \sigma_{pl}^* \quad (22)$$

$$G(r) = -\frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \sum_{k \in \sigma_{p+}} s(k) k H_k^{m(\tau)}(r, \theta) \Psi_k(z) \\ \times E_k^{-1} \Psi_k(z')^T \hat{s}_k^m \\ - \frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \int_{\sigma_{c+}} k H_k^{m(\tau)}(r, \theta) \Psi_k(z) \\ \times E_k^{-1} \Psi_k(z')^T \hat{s}_k^m |dk| \quad (23)$$

$$T_\beta(r) = -\frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \sum_{k \in \sigma_{p+}} s(k) k H_k^{m(\tau)}(r, \theta) \Psi_k(z) \\ \times E_k^{-1} \Psi_k(z')^T \hat{d}_{\beta k}^m \\ - \frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \int_{\sigma_{c+}} k H_k^{m(\tau)}(r, \theta) \Psi_k(z) \\ \times E_k^{-1} \Psi_k(z')^T \hat{d}_{\beta k}^m |dk| \quad (24)$$

ここに $s(k)$ は次のように定義される.

$$s(k) = \begin{cases} 1 & \text{when } k \in \sigma_{pn} \cup \sigma_{pl} \\ -1 & \text{when } k \in \sigma_{pl}^* \end{cases} \quad (25)$$

また, τ は k の値に応じて次のように 1 または 2 の値をとるものとする.

$$\tau = \begin{cases} 2 & \text{when } k \in \sigma_{pn} \cup \sigma_{pl} \\ 1 & \text{when } k \in \sigma_{pl}^* \end{cases} \quad (26)$$

ここで Green 関数を構成するエネルギー積分の定義について少し見ておくことにする. 離散スペクトルの波数のためのエネルギー積分は次のように定義される.

$$E_k = k \int_0^\infty \Psi_k(z)^T K_2 \Psi_k(z) dz \\ + \int_0^\infty \partial_z \Psi_k(z)^T K_3 \Psi_k(z) dz, \quad (k \in \sigma_p) \quad (27)$$

一方, 連続スペクトルの波数に対するエネルギー積分は

$$E_k \delta(|\xi| - |k|) \\ = k \int_0^\infty \Psi_\xi(z)^T K_2 \Psi_k(z) dz \\ + \int_0^\infty \partial_z \Psi_\xi(z)^T K_3 \Psi_k(z) dz + O(1) \\ (\xi, k \in \sigma_c) \quad (28)$$

ここに K_2 と K_3 は以下の成分を持つマトリックスである.

$$K_2 = \text{diag} \begin{bmatrix} \mu & (\lambda + 2\mu) & \mu \end{bmatrix} \\ K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

式 (28) の積分は L_2 空間に属さない固有関数の積分であるため, 積分の発散を表現するために Dirac のデルタ関数を必要としている. また, Landau の記 $O(1)$ は ξ が k に近づく場合でも有限の値にとどまる項を表している. これらのエネルギー積分は対称行列であることが証明でき²⁾ Green 関数の相反性を反映する.

2.3 境界積分方程式に用いるための Green 関数の表現

式 (23) および式 (24) で Green 関数のスペクトル表現が得られたことになる. Green 関数に現れる留数項と分岐線積分項が固有関数とエネルギー積分で統一され, Lamb の問題で点加振解から分離された実体波と表面波に対して固有値問題の枠組みで数学的な共通性が明らかにされた. この数学的な形式によって, 成層構造に依存しない形で, 成層弾性波動場の中の波動源から, どのようなモードの波動が生成されるかが明確になるとともに, 変位の Green 関数の相反性がどのように実現されるかも明らかにされたことになる.

ここまで誘導してきた Green 関数は円筒座標系で表現されていることならびにソース点の水平座標が原点にあるという点で境界積分方程式に適用する上で問題がある. ここでは, この問題を解決するとともに, 二重極のソースに対する Green 関数を用いて表面力の Green 関数を構成する. まず, 観測点での変位ベクトルの成分の円筒座標から直交座標系の変換は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} \quad (30)$$

ここに, マトリックス $R(\theta)$ の成分は以下のようである.

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

同様に外力ベクトルの成分の直交座標系から円筒座標系への変換は次のようである.

$$\begin{pmatrix} f_z \\ f_r \\ f_\theta \end{pmatrix} = R(0)^T \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (32)$$

ただし, ここでは外力ベクトルの作用位置の水平座標は座標系の原点に置かれているものとしている. したがって, $\theta = 0$ となっている.

直交座標系で表現された変位の Green 関数でソース点の水平座標が必ずしも原点にないものを $U(r, r')$ と表現しよう. ただし, r' はソース点とする. 直交座標系で観測点とソース点の座標成分を次のように表現する.

$$r = (x_1, x_2, x_3) \\ r' = (x'_1, x'_2, x'_3) \quad (33)$$

ここまでの議論から $U(r, r')$ は一重極のソースの Green 関数を用いて次の表現を持つことが分かる.

$$U(r, r') = -\frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \sum_{k \in \sigma_{p+}} s(k) k \\ \times \phi_k^{m(\tau)}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) E_k^{-1} S_k^m(x'_3) \\ - \frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \int_{\sigma_{c+}} k |dk| \\ \times \phi_k^m(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) E_k^{-1} S_k^m(x'_3) \quad (34)$$

ここに ϕ_k^m と S_k^m は次のように表される.

$$\begin{aligned} \phi_k^{m(\tau)}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) \\ = R(\theta) H_k^{m(\tau)}(r, \theta) \Psi_k(x_3), \quad (\tau = 1, 2) \end{aligned} \quad (35)$$

$$S_k^m(x'_3) = \Psi_k(x'_3)^T \hat{s}_k^m R(0)^T \quad (36)$$

ただし, ここで r と θ は次のように定義した.

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} \quad (37)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x_2 - x'_2}{x_1 - x'_1} \quad (38)$$

表面力の Green 関数も同様のプロセスで求められる. 前に求めた二重極のソースに対する Green 関数 T_β , を用いれば以下の結果を得る.

$$\begin{aligned} T(r, r') = & -\frac{i}{4} \sum_{m=-2}^2 \sum_{k \in \sigma_{p+}} s(k) k \\ & \times \phi_k^{m(\tau)}(x_1 - x'_1, x_1 - x'_2, x_3) E_k^{-1} D_k^m(x'_3) \\ & -\frac{i}{4} \sum_{m=-2}^2 \int_{\sigma_{c+}} k |dk| \\ & \times \phi_k^{m(2)}(x_1 - x'_1, x_1 - x'_2, x_3) E_k^{-1} D_k^m(x'_3) \end{aligned} \quad (39)$$

ここに $T(r, r')$ は表面力の Green 関数で D_k^m の成分は次式で求められる.

$$\begin{aligned} [D_k^m(x'_3)]_{\alpha\beta} = & \lambda n_\beta [S_{\gamma k}^m(x'_3)]_{\alpha\gamma} + \mu n_\gamma [S_{\gamma k}^m(x'_3)]_{\alpha\beta} \\ & + \mu n_\gamma [S_{\beta k}^m(x'_3)]_{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (40)$$

ここに $[\]_{\alpha\beta}$ は行列の成分を示し, n は表面力を定義するための境界の法線ベクトルを表している. また式 (40) では総和規約を用いている. さらに,

$$\begin{aligned} S_{\beta k}^m &= \Psi_k(x'_3)^T \hat{d}_{\beta k}^m R(0)^T \quad (\beta = 1, 2) \\ S_{\beta k}^m &= \Psi'_k(x'_3)^T \hat{s}_k^m R(0)^T \quad (\beta = 3) \end{aligned} \quad (41)$$

とした. ただし, $\Psi'_k(x'_3)$ は固有関数の導関数である.

以上の Green を用いて散乱体の外部領域について境界積分方程式を立てることが可能となる. この境界積分方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} cu(r) + \int_\Gamma T(r, r') u(r') d\Gamma(r') \\ = \int_\Gamma U(r, r') \tau(r') d\Gamma(r') + u_F(r), \quad (r \in \Gamma) \end{aligned} \quad (42)$$

ここに c は free term の係数行列, u_F は平面波による成層波動場の自由応答を示す. この積分方程式と, ここでは省略するが内部領域の境界積分方程式を連立させて解くことで散乱波動場の解析が可能になる. そして, 境界積分方程式に現れる境界値が決定できれば散乱波は次式から計算できる.

$$\begin{aligned} u_s(r) = & - \int_\Gamma T(r, r') u(r') d\Gamma(r') \\ & + \int_\Gamma U(r, r') \tau(r') d\Gamma(r') \\ & r \in R^2 \times R_+ \setminus (\Gamma \cup \Omega) \end{aligned} \quad (43)$$

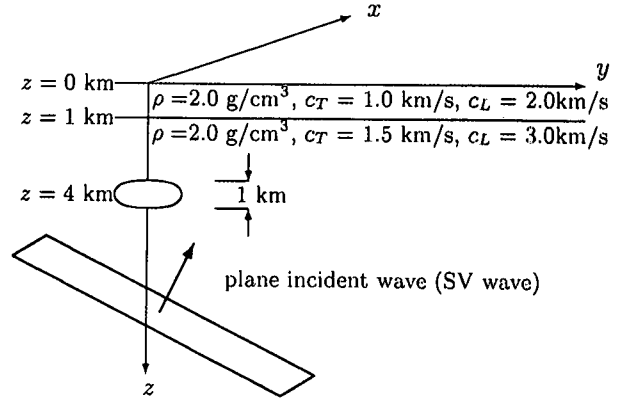


図-6 散乱問題の解析モデル

ここに, $u_s(r)$ は成層波動場を伝播する散乱波を示す. 式 (34) および (39) を式 (43) に代入し, 境界積分を遂行することで次の散乱波に対する表現を得る.

$$u_s(r) = \sum_{k \in \sigma_{p+}} y_k(r) + \int_{\sigma_{c+}} y_k(r) |dk| \quad (44)$$

ここに y_k は次式で計算される.

$$\begin{aligned} y_k(r) = & \frac{i}{4} \sum_{m=-2}^2 s(k) k \int_\Gamma d\Gamma(r') \\ & \times \phi_k^{m(\tau)}(x_1 - x'_1, x_1 - x'_2, x_3) E_k^{-1} D_k^m(x'_3) u(r') \\ & - \frac{i}{4} \sum_{m=-1}^{+1} s(k) k \int_\Gamma d\Gamma(r') \\ & \times \phi_k^{m(\tau)}(x_1 - x'_1, x_1 - x'_2, x_3) E_k^{-1} S_k^m(x'_3) \tau(r') \end{aligned} \quad (45)$$

式 (44) は散乱波がスペクトル上のモードに分解されることを示している. 後述の数値計算例によって, 散乱波をモードに分解することで散乱波の特性の理解することに役立てることが可能となる.

3. 数値計算例

ここでは成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現の境界積分方程式への適用可能性および散乱波の特性の検討を主眼として数値計算を行う. 図-6 に解析モデルを示す. ここでは2層からなる成層弾性体に散乱体が埋め込まれ, 平面 SV 波が入射する問題を考える. 解析モデルの定数は図中に示すとおりであり, c_T は S 波の位相速度を c_L は P 波の位相速度を表している. また, 散乱体の境界要素分割は図-7 に示している. 解析振動数は 1 Hz とし, 平面 SV 波の進行する方向ベクトルは図-6 に示す座標系で

$$a = (1, 1, -1) \quad (46)$$

とする. また, 平面 SV 波の入射波としての振幅は入射波による地表面上での自由応答の変位ベクトルの振幅の大きさが 1 cm になるように正規化している. なお, 計算ケースでの平面 SV 波入射波の水平成分の波長は

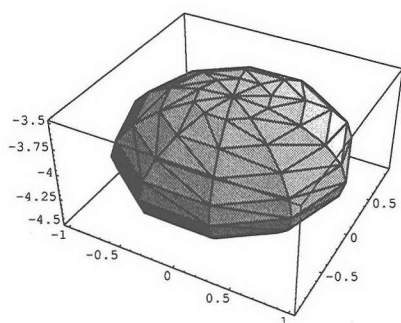


図-7 散乱体の境界要素分割

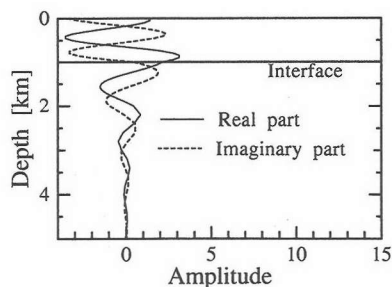


図-9 複素 Rayleigh 波モードの形状

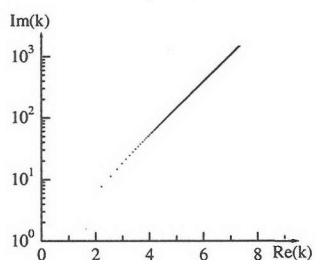


図-8 複素波数平面第1象限に分布する複素 Rayleigh 極

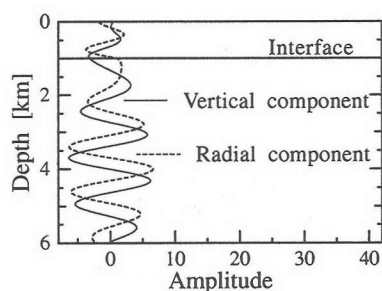


図-10 連続スペクトルのモード形状

1.83 km であり、散乱体の水平方向の直径 2 km とほぼ同程度となっている。

前述の定式化では、複素 Rayleigh 波モードが存在する可能性について述べたが、実際に複素 Rayleigh 波は存在し、Green 関数の合成ではその考慮が必要になる。著者の前論文⁵⁾でも示したように複素 Rayleigh 波はソース点近傍で非常に大きな振幅を持ち、ソース点から離れるに従い急速にその振幅が減衰する定常波である。複素 Rayleigh 波はその影響がソース点近傍でしか認められないことから、これまであまり考慮されることが少なかったものと言える。以下の数値計算結果では散乱波から複素 Rayleigh 波モードを抽出することを試みる。このとき、複素 Rayleigh 波のソース点近傍で大きな振幅を示す性質より、複素 Rayleigh 波が散乱体付近のみで大きな振幅を示すことになると予想できる。この複素 Rayleigh 波の性質が検証できれば、今後、散乱波から散乱体の特徴づける方法の展開につながる可能性も考えられよう。

ここでは、複素波数平面の第1象限での複素 Rayleigh 波モードの波数の分布の様子を図-8 に示す。これによると複素 Rayleigh 波モードは虚数軸を対数で表現すれば、ほぼ直線上に分布している。これらの絶対値の大きな波数は Green 関数を合成する際ソース点と観測点の水平距離が非常に小さな場合、ここでは 0.02km 以下の領域で必要となってくる。

解析振動数 1.0 Hz での複素 Rayleigh 波の波数の中で最も絶対値の小さなものは $k = (1.33 + 3.41i) \text{ km}^{-1}$ である。この波数の複素 Rayleigh 波モードの形状を

図-9 に示す。この図ではモードの radial 成分についての実部と虚部を示している。複素 Rayleigh 波モードは表層で大きな振幅を持ちながらも、半無限層では振動を示しながら振幅が減衰し、半無限層で振幅が単調に減少する正規モードとは性質が異なっている。また、連続スペクトルで定義される固有関数のモード形状を図-10 に示す。ここでは連続スペクトル領域の波数として $k = 0.2k_{bl} = 0.84 \text{ km}^{-1}$ を選んだ。ただし、前述のように k_{bl} は半無限層での S 波の波数である。図-10 に示すように連続スペクトルの固有関数は表層での振幅がむしろ小さく、半無限層で振動を繰り返す、下方へエネルギーの逸散を示すモードである。

解析手法の妥当性を検証するために散乱体内部の材料定数を散乱体外部と全く同じとして解析を行う。そして得られる応答結果と伝達マトリックス法で求めることのできる自由場の応答を比較する。図-11 は解析モデルで示す y 軸に沿った地表面上の x 方向変位を表す。これによると両者は極めて良好に一致しており、成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現の境界積分方程式への適用可能性が検証されたと言える。

次に、散乱体内部の材料定数を散乱体内部で小さくする。具体的には S 波の位相速度を $0.75 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 、P 波の位相速度を $1.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ とする。図-12 は地表面上で得られた散乱波を示す。図中の矢印は入射 SV 波の方向の $x-y$ 平面への射影である。図-12 に見られるように散乱波は散乱体の真上付近をほぼ同心円上に伝播している。しかしながら、良く観察すると散乱波の波長は散乱体前方で長く、散乱体後方で短くなっている。ま

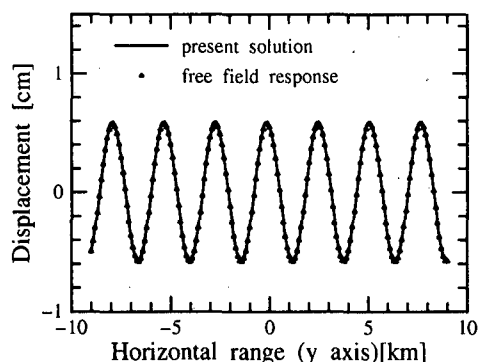


図-11 地表面応答変位分布の比較 (x 方向変位)

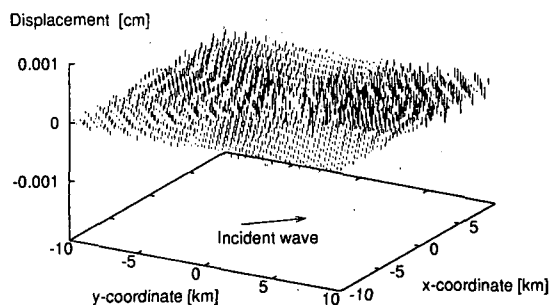


図-13 散乱波から分離された Rayleigh 波基本モードの地表面での伝播

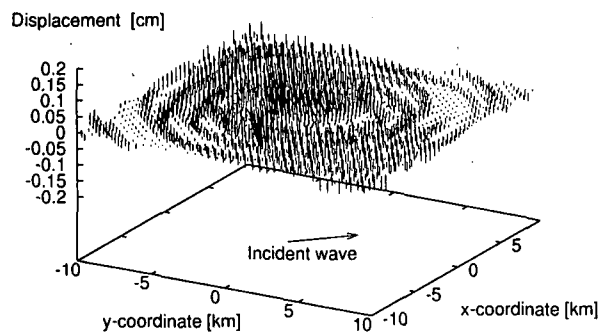


図-12 地表面での散乱波の伝播性状

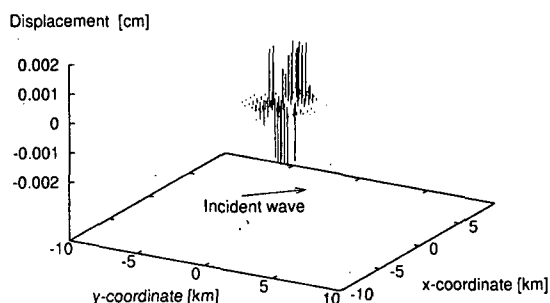


図-14 散乱波から分離された複素 Rayleigh 波モードの地表面での伝播

た、振幅は散乱体の前方より後方で大きくなっている。

ここで、散乱波を式 (45) に従いモードに分解してみる。扱っている成層構造モデルでの Rayleigh 波の波数は解析振動数 1.0 Hz の場合、基本モードは 6.69 km^{-1} 、高次 1 次モードは 4.68 km^{-1} である。図-13 は図-12 から Rayleigh 波基本モードを分離したものである。ここから見てとれるように Rayleigh 波基本モードは全体の振幅は小さいもののはっきりと散乱体前方へ向かって伝播することが分かる。そして、後方および側方へ伝播する散乱波の振幅は小さい。

図-14 は図-12 から分離された複素 Rayleigh 波モードのうち、最も絶対値の小さな波数すなわち、 $k = (1.33 + 3.41i) \text{ km}^{-1}$ のものである。これによると、前述の予測どおり複素 Rayleigh 波の振幅の大きな領域は散乱体の真上付近に限られていることが分かる。一方、振幅については、正規の Rayleigh 波基本モードの振幅よりは大きいものの、散乱波全体の中では $1/10$ ほどである。

図-15 は図-12 から分離された連続スペクトルの成分 $k = k_{\beta L} = 4.19 \text{ km}^{-1}$ の散乱波である。図-15 によれば、散乱波は前方と後方に主に伝播している。そして側方へ伝播する波の振幅は小さい。ただし、前方へ

の波の広がり方は Rayleigh 波に比べ大きくなっている。

図-16 は図-12 から分離された連続スペクトルの成分 $k = 0.0 \text{ km}^{-1}$ の散乱波である。ここでは、散乱波の進行に指向性は見られず、等方的に周囲へ広がって行く。そして、振幅は散乱体から離れるにつれ単調に減少してゆくことが分かる。また振幅の大きさそのものは連続スペクトルの成分 $k = k_{\beta L}$ のものに比べれば、はるかに小さくなっている。

以上から、散乱波の伝播特性は、波数が小さくなるほど、波の散乱体からの広がり方が大きくなるという特徴を持つ。また、複素 Rayleigh 波は散乱体近くでは正規の Rayleigh 波モードよりも大きな振幅を示す一方、散乱体から離れるに従いその振幅は急速に減衰する。平面 SV 波に伴う成層波動場の自由応答は、連続スペクトル領域にあることから、散乱体から伝播する散乱波も連続スペクトルの成分が重要になるものと考えられる。図-12 に示された散乱波全体の伝播の指向性と図-13 に見られる Rayleigh 波の伝播の指向性の違いにより散乱波の連続スペクトル成分の重要性を反映している帰結と考えられる。

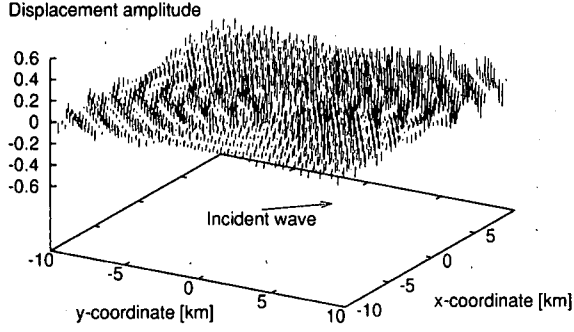


図-15 散乱波から分離された連続スペクトルのモードの地表面での伝播 ($k = 4.19 \text{ km}^{-1}$)

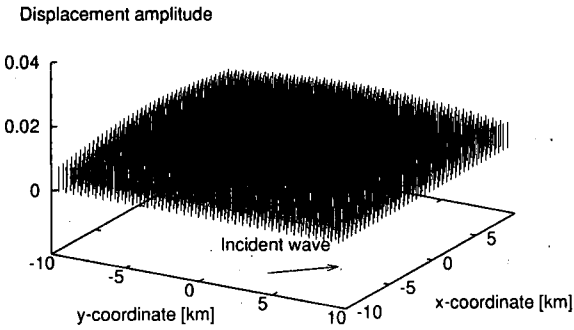


図-16 散乱波から分離された連続スペクトルのモードの地表面での伝播 ($k = 0.0 \text{ km}^{-1}$)

4. 結論

本論文は、成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現を境界積分方程式に適用するための定式化を示すとともに、これを実際に境界積分方程式に適用し、成層波動場中の散乱体と平面波の相互作用で生じる散乱波の特性について検討を行った。Green 関数のスペクトル表現の誘導は、空間の原点で定義された一重極と二重極のソースについての応答関数として、著者の一連の研究結果を再構成する形で行った。そして、境界積分方程式に適用するために、円筒座標系から直交座標系に座標変換を施した形式で変位と表面力の Green 関数を示した。

数値計算は、二層の弾性体に埋め込まれた散乱体に平面 SV 波を照射する問題を扱った。これによるとスペクトル表現された成層弾性波動場の Green 関数は精度良く境界積分方程式に適用可能であることが分かった。また、散乱波の進行の様子から Rayleigh 波と連続スペクトル成分、すなわち実体波成分の性質の違いに

ついても明らかにすることができた。

Appendix A 一重極と二重極のソースの Fourier-Hankel 変換について

ここでは、本文で示した一重極と二重極のソース $s(r, \theta)$, $d_\beta(r, \theta)$, $\beta = 1, 2$ に対する Fourier-Hankel 変換の具体的な形について記述する。本文でも示したように

$$\begin{aligned}\hat{s}_k^m &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r H_k^m(r, -\theta) s(r, \theta) dr \\ \hat{d}_{\beta k}^m &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r H_k^m(r, -\theta) d_\beta(r, \theta) dr \\ &(\beta = 1, 2) \quad (\text{A.1})\end{aligned}$$

である。また、水平方向への波動伝播を記述するマトリックス $H_k^m(r, \theta)$ の行列としての具体的な成分については本文で記述しなかったので、ここで表すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned}H_k^m(r, \theta) &= \begin{bmatrix} Y_k^m(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) & \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \\ 0 & \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) & -\frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) \end{bmatrix} \\ &(\text{A.2})\end{aligned}$$

式 (A.1) の演算を直接実行することで次式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{s}_k^m &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (m = 0) \\ \hat{s}_k^m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm(1/2) & -(1/2)i \\ 0 & -(1/2)i & \mp(1/2) \end{bmatrix} \quad (m = \pm 1) \\ \hat{s}_k^m &= 0 \quad (\text{otherwise}) \quad (\text{A.3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_{1k}^m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & k/2 \end{bmatrix} \quad (m = 0) \\ \hat{d}_{1k}^m &= \begin{bmatrix} \pm k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (m = \pm 1) \\ \hat{d}_{1k}^m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k/4 & \mp(k/4)i \\ 0 & \mp(k/4)i & -k/4 \end{bmatrix} \quad (m = \pm 2) \\ \hat{d}_{1k}^m &= 0 \quad (\text{otherwise}) \quad (\text{A.4})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_{2k}^m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k/2 \\ 0 & -k/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (m = 0) \\ \hat{d}_{2k}^m &= \begin{bmatrix} -(k/2)i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (m = \pm 1)\end{aligned}$$

$$\hat{d}_{2k}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp(k/4)i & -(k/4) \\ 0 & -(k/4) & \pm(k/4)i \end{bmatrix} \quad (m = \pm 2)$$

$$\hat{d}_{2k}^m = 0 \quad (\text{otherwise}) \quad (\text{A.5})$$

参考文献

- 1) Touhei, T.: A scattering problem by means of the spectral representation of Green's function for a layered acoustic half space, *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 477-488, 2000.
- 2) Touhei, T.: Complete eigenfunction expansion form of the Green's function for elastic layered half space, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, pp. 13-38, 2002.
- 3) Touhei, T.: Spectral structures and radiation patterns of scattering waves in a layered acoustic half space, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, pp. 363-378, 2002.
- 4) Touhei, T.: Analysis of scattering waves in an elastic layered medium by means of the complete eigenfunction expansion form of the Green's function, *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 40, pp. 3347-3377, 2003.
- 5) 東平光生: 成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現に関わる horizontal wavefunction の特異性および複素 Rayleigh 波モードについて, 応用力学論文集 Vol. 5, pp. 611-618, 2002.
- 6) Lamb, H.: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A203, pp. 1-42, 1904.
- 7) 新井朝雄: ヒルベルト空間と量子力学, 朝倉書店, 1997.
- 8) 吉田耕作, 河田敬義, 岩村聯: 位相解析の基礎, 岩波書店, 1960.
- 9) Newton, R.G.: *Scattering theory of waves and particles.*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1982.
- 10) Fuchs, K and Müller, G.: Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations, *Geophys. J.*, Vol. 23, pp. 417-433, 1971.
- 11) Bouchon, M.: Discrete wavenumber representation of elastic wavefields in three space dimensions, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp. 3609-3614, 1979.
- 12) Harvey, D. J.: Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophys. J. R. astr. Soc.* Vol. 66, pp. 37-69, 1981.
- 13) Watson, T.H.: A real frequency, complex wavenumber analysis of leaking modes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 62, 369-384, 1972.
- 14) Haddon, R. A. W.: Response of an oceanic wave guide to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 77, pp. 1804-1822, 1987.
- 15) Budreck, D.E. and Achenbach, J.D.: Three dimensional elastic wave scattering by surface-breaking cracks, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 86, pp. 395-406, 1989.
- 16) Colton, D. and Kress, R.: *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Berlin, Springer, 1998.
- 17) Aki, K. and Richards, P.G., *Quantitative Seismology*, Box. 6.5, pp. 215-216, New York, Freeman and Company, 1980.
- 18) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 岩波数学公式 III, 岩波書店, 1993.

(2003 年 4 月 18 日受付)