応用力学論文集 Vol. 6, pp. 763-768 (2003年8月) 土木学会

陽な漸化式を用いた剛性変化時刻の推定並びに地震応答の計算

Prediction of Stiffness Variation by Explicit Recurrence Formulas for Structural Response Computation

張 富明 *, 酒井久和*, 山下忠道*, 久保哲夫 **

Fuming ZHANG, Hisakazu SAKAI, Tadamichi YAMASHITA, Tetsuo KUBO

* 工博 防災科学技術研究所地震防災フロンティア研究センター研究員 (〒651-0073 神戸市中央区脇浜海岸通 1-5-2)

** 工博 同上チームリーダー・名古屋工業大学工学部建築学科教授 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

Time history analysis using implicit recurrence formulas are performed usually under the assumption of constant stiffness matrix within the computation time increment, and it may take time for convergence computation whenever stiffness changes. The increase demand for collapse analysis using sophisticated 3D model requires a reliable computation method for searching the correct instantaneous stiffness matrix of structures. In this paper, explicit recurrence formulas are used for predicting stiffness variation either for loading or for unloading. Time increment corresponding to the stiffness variation is computed from a set of independent simple quadratic or linear equations. The proposed method is useful for replacing the convergence computation, and can trace exactly the assumed constructive rules, and the computation accuracy was discussed using SDOF vibration systems.

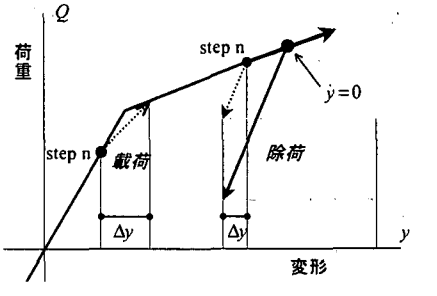
Key Words: time history analysis, piece-wised linear, stiffness variation point, explicit recurrence

1. はじめに

構造物の地震応答解析において、振動系が非線形な復元力特性を有する場合、図ー1のような区間線形的な復元力モデルであっても、Newmark の β 法[1] ($\beta \neq 0$)などの陰な時間積分法を用いると、収束計算で剛性変化点を探索しない限り、不釣合力が生じてしまう。

安定した系に対し、剛性変化で生じた不釣合力を次のステップで時間をかけて解除しても、応答結果に大きな誤差を生じることがないが[2]、復元力特性に負勾配を有する不安定な系、特にファイバーモデルによる鉄筋コンクリート部材の動的解析については、収束計算がなければ非常に大きな計算誤差が生じることがある[3]。これはファイバー要素の歪みと全体変位の間の適合関係が瞬間剛性に依存するためである。従って、瞬間剛性すなわち要素の剛性変化点を求めることが重要である。

なお、陽な漸化式と非常に小さな時間刻みを用いれば、瞬間剛性の計算を回避できる[4]。しかし、これは適合条件の瞬間剛性への依存性を解消できるものではない。また、図ー1に示すように、陽な漸化式は降伏など載荷過程の剛性変化に対しは復元力と変形が一対一の関係で問題が少ないと思われる。しかし、除荷に対しては、除荷点を変形増分で判断するか速度0点とするかによって、変形増分が等しくても復元力が異なるので除荷点を正確に抑える必要がある。



図ー1 降伏と除荷に規定される載荷経路

成行ら[5] は Newmark の β 法を用い、1自由度系の降伏と除荷に対応する剛性変化時刻を3次式で求める方法を提案したが、多自由度系への適用は困難である。

筆者ら[6]は陽な漸化式で区間線形復元力を有する系の剛性変化時刻を求める手法を提案し、ファイバーモデルによる鉄筋コンクリート橋脚の3次元崩壊解析に適用した。本研究では多自由度系の瞬間剛性が求まる時間積分法を提案し、完全弾塑性復元力特性を有する1自由度系を用いて数値積分法の計算精度、並びに計算精度を確保するための条件について検討を行う。

2. 陽な漸化式による剛性変化時刻の推定

2.1 運動方程式と Newmark の β 法

復元力特性が区間線形型の多自由度系に対る増分形の運動方程式を式(1)に示す。ここに、$[M],[C],[K]$

はそれぞれ質量・減衰・瞬間剛性のマトリックス、$\{y\}$は相対変位ベクトル、$\ddot{y}_0$は入力地震動を表わす。

$$[M]\{\Delta\ddot{y}\}+[C]\{\Delta\dot{y}\}+[K]\{\Delta y\}=-[M]\{1\}\Delta\ddot{y}_0 \quad (1)$$

剛性変化がないと確認された場合、数値計算はNewmarkのβ法を採用し、式(2)と式(3)に応答変位と応答速度の漸化式を示す。nは計算ステップを表す。

$$\{\Delta y\}=\{\dot{y}_n\}\Delta t+\frac{1}{2}\{\ddot{y}_n\}\Delta t^2+\beta\{\Delta\ddot{y}\}\Delta t^2 \quad (2)$$

$$\{\Delta\dot{y}\}=\{\ddot{y}_n\}\Delta t+\frac{1}{2}\{\Delta\ddot{y}\}\Delta t \quad (3)$$

地震動の記録間隔Δt_0とその間の地震動増分を$\Delta\ddot{y}_{re}$とすると、時間刻みΔt（$\Delta t=\Delta t_0/n_{rt}$）間の地震動増分$\Delta\ddot{y}_0$は次の式で表わされる。$n_{rt}$は時間刻みの分割数である。

$$\Delta\ddot{y}_0=(\Delta t/\Delta t_0)\Delta\ddot{y}_{re}=\Delta\ddot{y}_{re}/n_{rt} \quad (4)$$

2.2 陽な漸化式と剛性変化時刻の算定

本節では、瞬間剛性に変化が認められた場合、降伏と除荷などに対応する剛性変化の時刻を求める手順を示す。

式(2),(3)において、Δtが十分に小さい場合、$\{\Delta\ddot{y}\}$の影響が小さい。Δtを簡単に求めるために、応答変位と応答速度の増分を次のように陽な形で表す。

$$\{\Delta y\}=\{\dot{y}_n\}\Delta t+\frac{1}{2}\{\ddot{y}_n\}\Delta t^2 \quad (5)$$

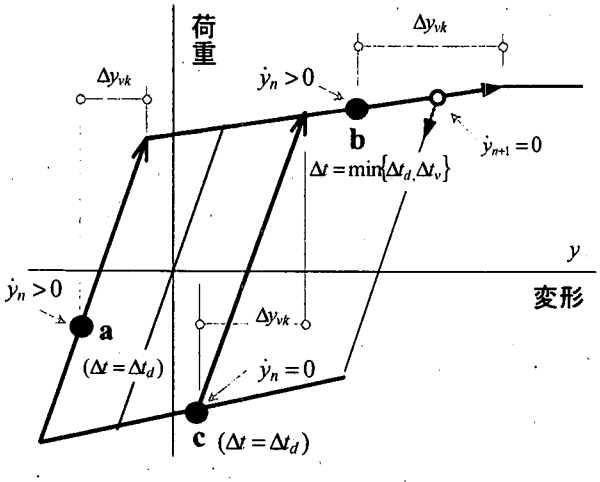
$$\{\Delta\dot{y}\}=\{\ddot{y}_n\}\Delta t \quad (6)$$

また、応答加速度の増分は次式より求まる。

$$\{\Delta\ddot{y}\}=-\frac{\Delta\ddot{y}_{re}}{n_{rt}}\{1\}-[M]^{-1}\left\{[C]\{\ddot{y}_n\}+[K]\left\{\{\dot{y}_n\}+\frac{\Delta t}{2}\{\ddot{y}_n\}\right\}\right\}\Delta t \quad (7)$$

図－2に示すように、各自由度iに対し、載荷過程における剛性変化点までの変位増分Δy_{vki}が既知とし、式(5)より、剛性変化に対応する時間増分Δt_{di}を下記の独立した2次式より求めることができる。

$$\frac{1}{2}{}_i\ddot{y}_n\Delta t_{di}{}^2+{}_i\dot{y}_n\Delta t_{di}-\Delta y_{vki}=0 \quad (8)$$



図－2　応力状態に対応する時間増分の計算

一方、除荷点すなわち応答速度が零となる時間増分Δt_{vi}は、式(9)を用いて求めることができる。

$${}_i\ddot{y}_n\Delta t_{vi}+{}_i\dot{y}_n=0 \quad (9)$$

式(8)と(9)を各自由度に対して適用し、$\Delta t_{di}<\Delta t_{vi}$であれば該当する自由度に対して載荷過程で剛性変化を生じる可能性があり、逆な場合には除荷を生じる可能性がある。なお、時間増分$\Delta t_i=\min\{\Delta t_{di},\Delta t_{vi}\}$が固定時間刻み$\Delta t_0/n_{rt}$よりも大きい場合には固定時間刻みを用いることとし、剛性変化が生じない。

N自由度の系に対し計N個の時間増分Δt_iが求められるが、その中で最小の値を示す自由度が最初に降伏もしくは除荷が生じ、この$\Delta t=\min\{\Delta t_i\}$を式(5)～(7)に代入して応答の増分が求まる。$\Delta t$の間に瞬間剛性が一定のままなので、次の計算ステップから瞬間剛性の修正を行う。

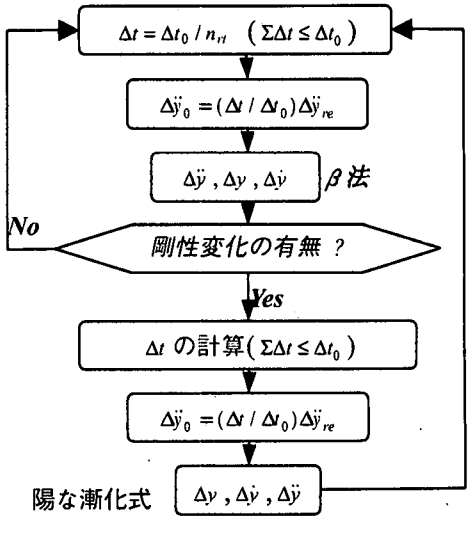
なお、多自由度系の復元力特性はこれを構成する層・部材・要素によって決められるので、各構成要素の剛性変化に対応して時間増分が求められることになる。

2.3 逐次積分法の手順及び降伏と除荷の判定

応答解析は、まずNewmarkのβ法（$\beta=1/4$）と固定時間刻みを用いて応答増分を求め、overshootingによって剛性変化点を越えた場合、先に述べた方法で剛性変化点までの時間増分を求め、応答を計算する。図－3に記録間隔Δt_0内での計算フローを示す。

式(5)と(6)の陽な漸化式は、速度が変位の導関数であるので、速度が0となるまでには変位が単調に増減する。従って、除荷点などの剛性変化点を一義的に決定される。Newmarkの$\beta=1/4$法も同じことが言える。従って、本解析法では剛性一定の場合には$\beta=1/4$を用いる。なお、後の計算精度の検討では$\beta=0$などとした場合についても併せて検討する。

図－2の復元力特性における応力状態によって、



図－3　計算のフロー

次の３つのケースが想定され、異なる剛性判定条件を用いる。弾性状態 a については、載荷と除荷の剛性が等しいので計算時間を短縮するために除荷判定を行わないこととする。降伏状態 b については、次の剛性変化点への到達及び考えられる除荷をもって時間増分を求める。前計算ステップで除荷と判定された状態 c の場合、除荷方向に対応する剛性変化点に到達する時間増分を求める。なお、求められる時間増分は固定時間刻みより大きい場合、固定時間刻みを用いることとし、この計算ステップにおいて剛性変化が生じることがない。また、変形の進める方向は速度の符号で決定される。

2.4 陽な漸化式に対する考察

式(5),(6)の陽な漸化式と式(2),(3)の Newmark の β 法と比較すると、陽な漸化式は変位と速度に対する応答加速度増分 $\{\Delta\ddot{y}\}$ の項を無視している。しかしながら、陰な漸化式 $\beta=1/4$ 法に対し、地震動の変わりに図－４に示す下記の単位質量あたりの有効荷重 $\{\Delta\ddot{y}_{0_ext}\}$ を用いれば、陽な漸化式と同じ応答結果が得られる。

$$\Delta\ddot{y}_{0_ext}=\begin{cases}\Delta\ddot{y}_{0_\mathrm{var}}(t), & t_n\le t<t_n+\Delta t\\ \Delta\ddot{y}_{0_imp}, & t=t_n+\Delta t\end{cases} \tag{10}$$

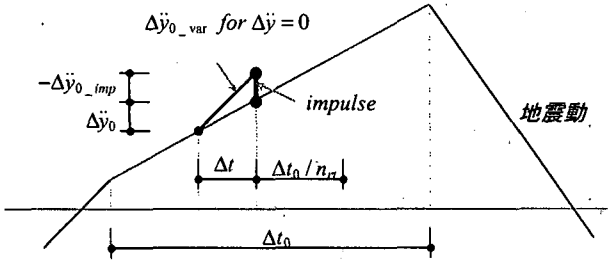
$$\{\Delta\ddot{y}_{0_\mathrm{var}}\}=-[M]^{-1}\{[C]\{\Delta\dot{y}\}+[K]\{\Delta y\}\} \tag{11}$$

$$\{\Delta\ddot{y}_{0_imp}\}=(\Delta t/\Delta t_0)\Delta\ddot{y}_{re}\{1\}-\{\Delta\ddot{y}_{0_\mathrm{var}}\}_{(t=t_n+\Delta t)} \tag{12}$$

すなわち、有効荷重 $\{\Delta\ddot{y}_{0_\mathrm{var}}\}$ に対し、式(2),(3)により $\{\Delta\ddot{y}\}=\{0\}$ となり、また、有効荷重 $\{\Delta\ddot{y}_{0_imp}\}$ により $\{\Delta\ddot{y}\}=-\{\Delta\ddot{y}_{0_imp}\}$ が得られ、それらの応答の和は陽な漸化式と同じ結果となる。なお、$\{\Delta\ddot{y}_{0_imp}\}$ を求める際に、式(5),(6)の応答増分を用いる。従って、有効荷重とは陽な漸化式と同じ応答結果を得るために、陰な漸化式に用いられる見かけの荷重である。

もしインパルスが $\{\Delta\ddot{y}_{0_imp}\}=\{0\}$ であれば、有効荷重 $\{\Delta\ddot{y}_{0_ext}\}$ は地震動そのものであり、この場合に限って二つの数値積分法が同じ入力を受けることになり、また、同じ応答結果が得られる。従って、陽解法の陰解法からの乖離は $\{\Delta\ddot{y}_{0_imp}\}$ で評価できる。この値が大きくなると数値計算の誤差が大きくなる。

図－４に示すように、有効荷重は不釣合力の解除に似ているが、ここではあくまでも２つの数値積分法による応答の差を図るための仮想な荷重である。



図－４　有効荷重と地震動入力の比較

3. 弾塑性地震応答解析と計算精度

3.1 １自由度系及び地震動入力

１自由度系の弾性固有周期 T を $0.001s-1.0s$、粘性減衰定数を $h=c/(2m\omega)=0.05$、復元力特性を完全弾塑性型、降伏せん断力係数を $q=0.20$ とする。系の降伏変位は次式から求まる。g は重力加速度である。

$$\delta_y=\frac{T^2g}{4\pi^2}q \tag{13}$$

地震動は El Centro, May 18, 1945 の NS 成分を用いる。記録間隔は $\Delta t_0=0.02s$、解析時間を 40s とした。

固定時間刻み $\Delta t=\Delta t_0/n_{rt}$ に対して解析の精度を検討する。なお、剛性の変化が認められた場合には先に述べたように可変時間刻みを用いるが、剛性が一定の場合には固定時間刻みに対し陰な漸化式（$\beta=1/4$，式(2),(3)）に加え、半陽な漸化式（$\beta=0$，式(2),(3)）及び陽な漸化式(式(5),(6))の計算精度も検討する。また、正解は陰な漸化式に $n_{rt}=2000$ とした場合の応答値とする。

3.2 剛性が一定の場合に対し陰な漸化式（$\beta=1/4$）を適用したときの計算精度

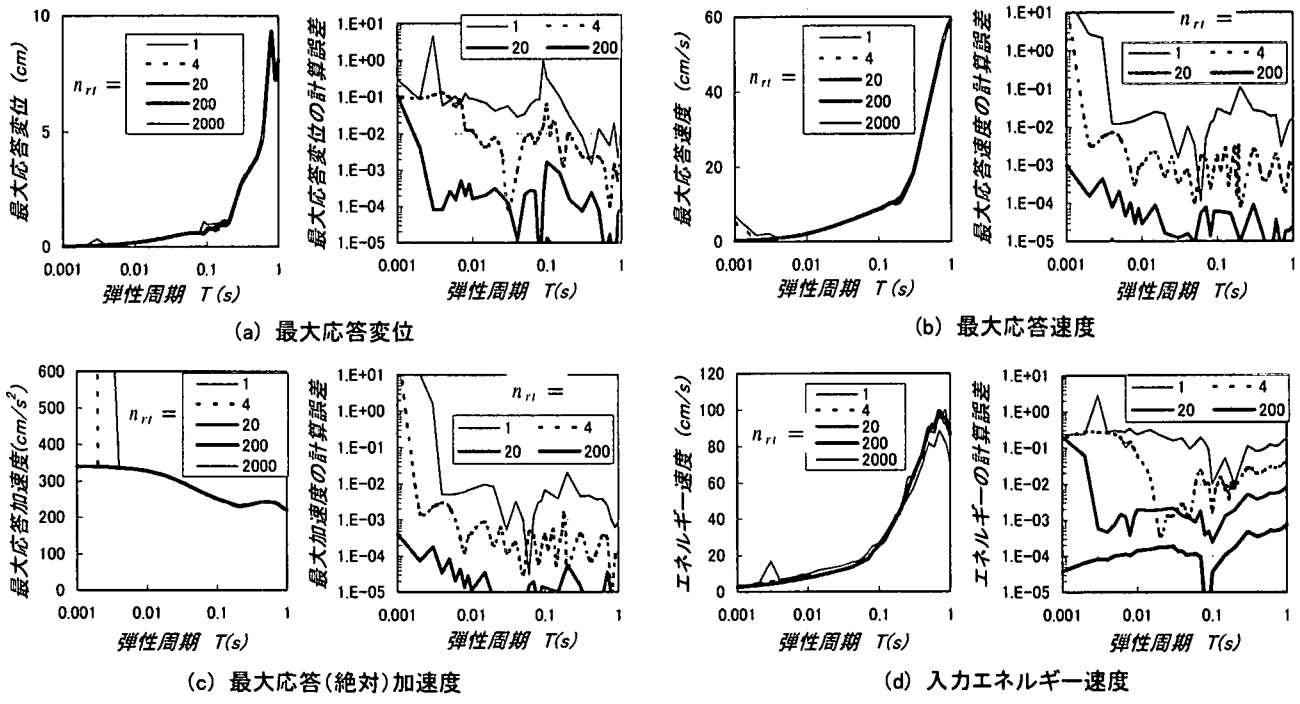
時間増分 $\Delta t\le\Delta t_0/n_{rt}$ に対し、n_{rt} を 1,4,20,200,2000 と変化して解析結果を比較する。

図－５に、(a)相対変位、(b)相対速度、(c)絶対加速度、(d)入力エネルギー速度の応答スペクトル並びに計算誤差（=(計算値－正解値)／正解値）を示す。

地震記録間隔の分割数 n_{rt} が大きくすなわち固定時間刻みが小さくなるにつれ、また、固有周期が長くなるに従って、最大応答が急速に正解値に収束していく。全体的には、相対速度と絶対加速度の計算誤差が小さい。入力エネルギー速度の計算誤差がやや大きいが、これは入力エネルギー速度が入力エネルギーの平方根のためである。以下に図－５(a)の応答変位について考察を行う。

$n_{rt}=1,4,20,200$ と n_{rt} が大きく、すなわち小さい時間刻みを用いることによって応答変位が急速に正解値に収束し、最も短い計算周期 $T=0.001s$ に対して $n_{rt}=1$ を用いても応答の発散が生じなかった。これは可変時間刻みによって応答増分が制限され、発散が回避できたと思われる。計算精度は固有周期が長い系に対して良いが、n_{rt} の影響が大きい。

$n_{rt}=1,4,20$、すなわち $\Delta t\le\Delta t_0/n_{rt}=0.02s,0.005s,0.001s$ とすれば、$T\ge10\Delta t_0/n_{rt}=0.2s,0.05s,0.01s$ に対し、計算誤差が 5%以下である。$T\ge10\Delta t_0/n_{rt}$ は Newmark の β 法（$\beta=0$）の安定条件より厳しいが、弾性系の計算精度を確保するための条件とも言われている [7]。



図－5　最大応答及び計算精度

また、$n_{rt}=20$ とすれば、 $T \geq 3\Delta t_0 / n_{rt} = 0.003s$ に対しも 1/1000 の計算精度を得ることができる。

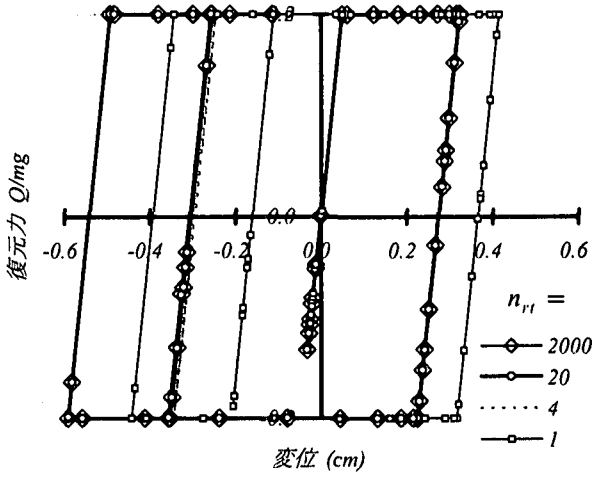
計算誤差が生じた原因の一つは可変時間刻みの陽な漸化式において $\{\Delta\ddot{y}\}$ の項を無視したためと思われる。短周期域で応答加速度の増分が大きく応答加速度の変化が激しいので、式(6)による応答速度の精度が良くない。また、後述のように、応答加速度の予測精度も良くなく、有効荷重と地震動入力の乖離が大きいためと考えられる。

なお、本報では計算結果を示していないが、降伏せん断力係数が小さく塑性化の度合いが大きいほど、粘性減衰定数が大きいほど、計算精度が良くなることが確認されている。

図－6 に固有周期が $T=0.1s$、固定時間刻みの分割数 $n_{rt}=1,4,20,2000$ とした場合、復元力の履歴ループの一部を示す($t=1.5s-2.5s$)。復元力は降伏点または速度 0 の除荷点で折曲がっている。また、$n_{rt} \geq 4$ とすれば、$T=0.1s$ 対して $T \geq 10\Delta t_0 / n_{rt} = 0.05s$ の条件が満足され、正解($n_{rt}=2000$)に近い履歴ループも得られている。

図－7 に固有周期 $T=0.01s, 0.1s, 1.0s$ に対し、応答変位及び有効荷重の時刻歴の一部($t=1.5s-2.5s$)を示す。なお、2.4 に述べたように、有効荷重とは陽な漸化式($\{\Delta\ddot{y}\}=\{0\}$)と陰な漸化式($\beta=1/4$)が等しい応答結果を得るために、陰な漸化式に用いる仮想な荷重である。有効荷重と地震動入力との差が小さければ、どちらの漸化式を用いても近い応答結果が得られることになる。

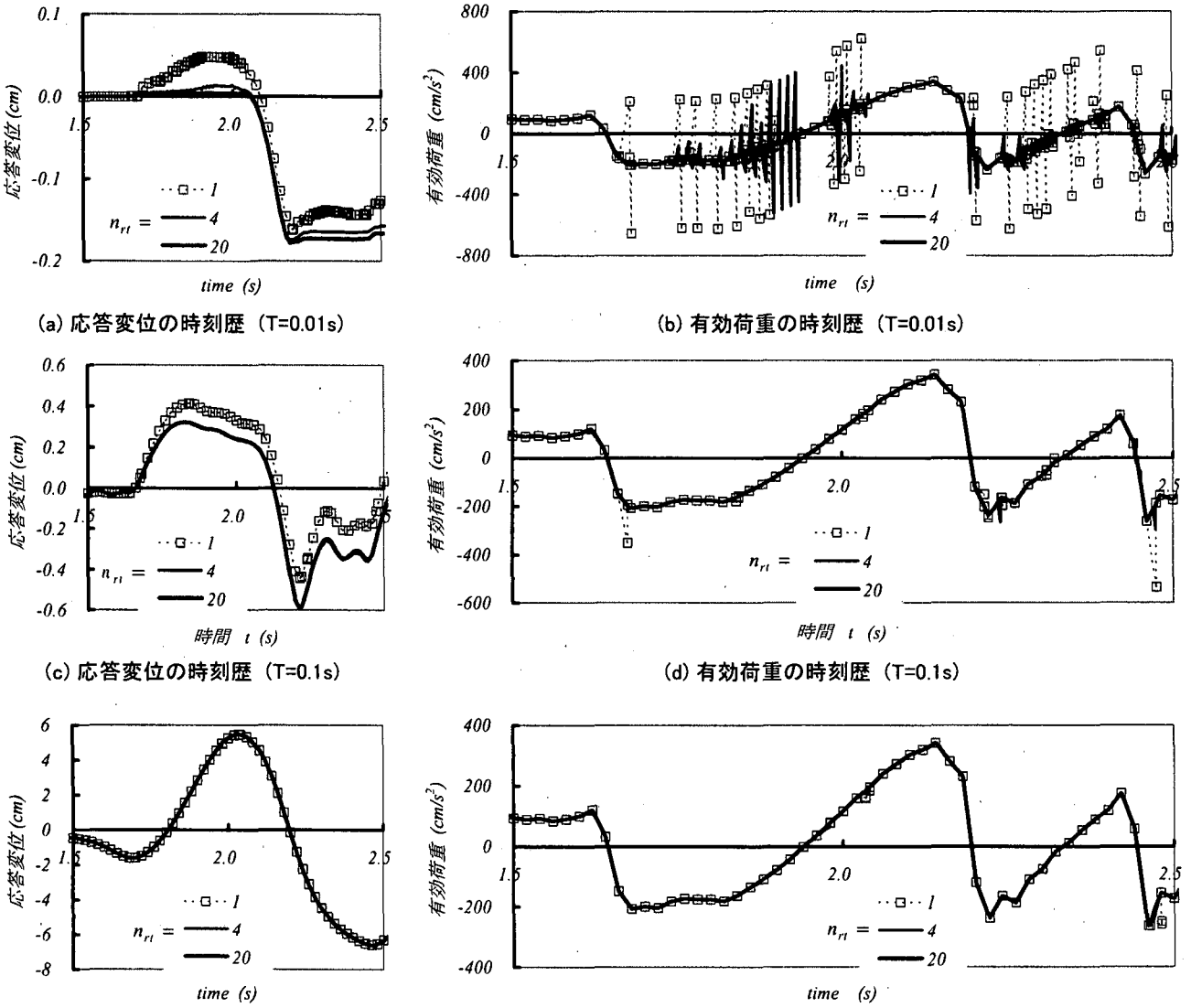
固有周期 $T=0.01s$ の場合、図－7 の(a)と(b)に示すように、n_{rt} が大きくすなわち時間刻みが小さければ



図－6　履歴ループ (T=0.1s, when t=1.5s-2.5s)

変位応答の計算誤差が小さく、有効荷重は地震動入力からの乖離も小さくなる。$n_{rt}=20$ の場合、$T=0.01s$ 対して $T=10\Delta t_0 / n_{rt}=0.01s$ となり、有効荷重は地震動入力とほとんど一致する。しかし、$n_{rt}=1,4$ に対し、n_{rt} が小さいほど有効荷重が地震動入力から外れる頻度が多くなり、応答に対する $\{\Delta\ddot{y}\}$ の影響を無視して生じる誤差が頻繁に発生し、結局には応答結果に大きな計算誤差を生む。しかし、有効荷重と地震動入力との乖離には限界が存在し、降伏条件により応答加速度の増分が $\pm 400cm/s^2 (=2q \cdot g = 2\times0.2\times980)$ 以内に制限されている。そのため、可変時間刻みで剛性変化点を抑える本計算法では、$n_{rt}=1$ の場合でも応答変位の発散が生じることがない。

固有周期 $T=0.1s$ の場合、図－7 の(c)と(d)に示すように、有効荷重が地震動入力から大きく外れる頻



(a) 応答変位の時刻歴（T=0.01s）

(b) 有効荷重の時刻歴（T=0.01s）

(c) 応答変位の時刻歴（T=0.1s）

(d) 有効荷重の時刻歴（T=0.1s）

(e) 応答変位の時刻歴（T=1.0s）

(f) 有効荷重の時刻歴（T=1.0s）

図－7　時刻歴応答及び有効荷重　(t=1.5s-2.5s の間)

度が少なくなり、$n_{rt}=1$ を用いても有効荷重と地震動入力の差が $400cm/s^2$ より小さく、更に $n_{rt}=4$ とすれば有効荷重は地震動入力とほとんど一致するようになる。

固有周期が更に長い $T=1.0s$ の場合、図－7の(e)と(f)に示すように、$n_{rt}=1$ でも有効荷重は地震動入力とほとんど一致し、時間刻みによらず応答変位の差が小さい。

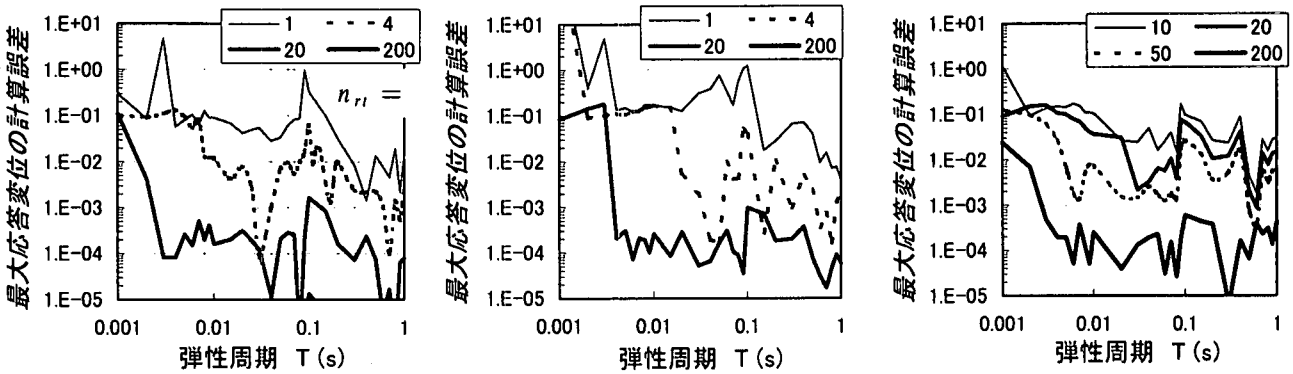
3.3 剛性一定に対して半陽な漸化式（$\beta=0$）並びに陽な漸化式を適用したときの計算精度

本計算法は剛性変化時刻を陽な漸化式に基づいて予測するものである。剛性が一定の場合に対し先のように陰な漸化式（$\beta=1/4$）を用いて良い計算精度を確保できることが分かった。しかし、半陽な漸化式($\beta=0$)及び陽な漸化式($\{\Delta\ddot{y}\}=\{0\}$)は逆マトリックスの計算が不必要なので、計算時間の短縮に繋がる場合も考えられる。

図－8にそれぞれの漸化式を用いた場合の応答変位の計算精度を示す。(a)の陰な漸化式（$\beta=1/4$）を用いた場合に比べ、(b)に示すように半陽な漸化式($\beta=0$)を用いた場合の計算精度が僅かに低下する。これに対し、陽な漸化式(式(5),(6))を用いた場合は計算精度が大幅に低下し、同じ精度を得るためには更に 1/10 の固定時間刻みが必要である。

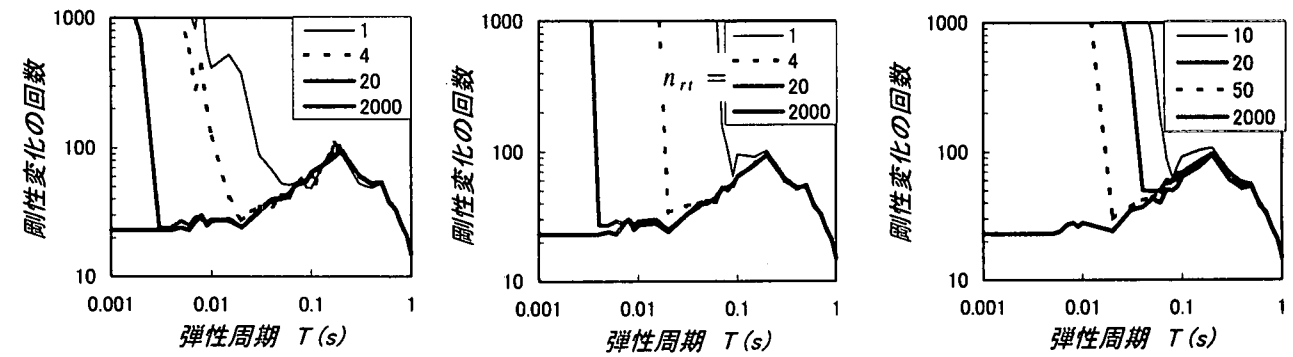
式(2),(3)と式(5),(6)を比較すると、半陽な漸化式($\beta=0$)でも、陽な漸化式(式(5),(6))でも応答変位の表現が同じ式となっているが、応答速度の表現が異なっている。応答速度に関する漸化式の精度が計算精度を左右することが分かる。

図－9に剛性変化が生じた回数を示す。(a)のように陰な漸化式（$\beta=1/4$）及び(b)のように半陽な漸化式($\beta=0$)を適用した場合、$n_{rt}=1,4,20$、すなわち固定時間刻み $\Delta t \le \Delta t_0/n_{rt}=0.02s,0.005s,0.001s$ を用いれば、$T \ge 10\Delta t_0/n_{rt}=0.2s,0.05s,0.01s$ に対し、剛性変化の回数



(a) 陰な漸化式（β=1/4）　(b) 半陽な漸化式（β=0）　(c) 陽な漸化式

図－8　剛性一定に対し異なる漸化式を用いた場合の計算誤差



(a) 陰な漸化式（β=1/4）　(b) 半陽な漸化式（β=0）　(c) 陽な漸化式

図－9　異なる漸化式を用いた場合の剛性変化が生じた回数

を正しく評価されている。また、(c)のように陽な漸化式を適用した場合、n_{rt}=10,20,50、すなわち固定時間刻み $\Delta t \le \Delta t_0 / n_{rt} = 0.002s, 0.001s, 0.0004s$ を用いれば、$T \ge 100\Delta t_0 / n_{rt} = 0.2s, 0.1s, 0.04s$ に対し、剛性変化の回数を正しく評価されている。これらの条件は計算精度を保証するための条件にも対応する。

4. まとめ

本研究は復元力特性を区間線形と仮定した多自由度系の瞬間剛性及び地震応答を求める数値計算法を提案した。具体的には、まず Newmark のβ法（β=1/4）に固定時間刻みを用いて応答の増分を求め、剛性変化が認められた場合には応答変位並びに応答速度に関する陽な漸化式を適用し、復元力モデルの載荷過程の剛性変化点については２次式、除荷点については１次式より剛性変化までの時間増分を求め、可変時間刻みと正しい瞬間剛性を用いて応答解析を行うものである。

本数値計算法の計算精度を、完全弾塑性復元力特性を有する１自由度系の応答解析により検討した。その結果、固定時間刻みと固有周期の間に $\Delta t / T \le 1/10$ の条件を満足すれば、5/100 以内の計算精度を確保できることが分かった。なお、本数値解析法の精度はファイバーモデルによる３次元解析によっても別途で検討され、ほぼ同様な条件により計算精度が保証されることが分かっている。

謝辞：本研究の一部は H15 年度科研費 No. 15360304 による。

参考文献

1) Newmark,N.M.: A method of computation for structural dynamics, proceeding of EM, ASCE, , Vol.85, pp.67-94,1959.
2) 滝見直之、堀田久人：不釣合力の除去方法が地震応答解析精度に及ぼす影響に関する研究、日本建築学会大会梗概、No.23485、pp.969-970、2002
3) Li,K., Kubo,T.: Reviewing the multi-spring model and fiber model, the 10th Japan Earthquake Engineering Symposium, pp.2369-2374, 1998.11.
4) 北嶋圭二、安達洋、中西三和：２方向入力を受ける鉄筋コンクリート造柱の地震応答解析、日本建築学会構造系論文集、No.461、pp.85～94、1994年7月.
5) 成行義文、平尾潔、新川和之、竹園雅樹：Multi-linear型１自由度系の地震応答解析における剛性変化時刻の一算定法、土木学会応用力学論文集Vol.4、pp.503～514、2001年8月.
6) 張富明、酒井久和、山下忠道、久保哲夫：鉄筋コンクリート橋脚の３次元地震応答解析と崩壊性状、土木学会第４回構造物の破壊過程解明に基づく地震防災性向上に関するシンポジウム、 pp.227～232、2003.3.
7) Chopra,A.: Dynamics of structures, theory and application to earthquake engineering, Prentice-Hall, 1995.

（2003 年 4 月18日受付）