応用力学論文集 Vol. 6, pp. 739-745 (2003年8月) 土木学会

地震現象の数値シミュレーションのための確率モデルと解析理論について

Stochastic modeling and analysis theory aimed at efficient numerical simulation of earthquake phenomena

堀宗朗*
Muneo HORI

*東京大学地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生)

The group of the author have been proposing stochastic modeling for the simulation of earthquake phenomena. This paper presents the analysis theory of a stochastic model. While the stochastic model problem is formulated as a boundary value problem, the proposed analysis theory transforms the boundary value problem into an equivalent variational problem, in which the correlation between the input uncertainty of the model and the output variability of the responses needs not to be explicitly considered. This paper gives detailed explanations of the analysis theory and presents efficient numerical computation methods of a stochastic model problem based on the present analysis theory.

Key Words : *stochastic modeling, earthquake phenomena, random variable, numerical simulation, stochastic variational problem*

1. 序論

地震に関わるさまざまな現象を再現・予測する際に，数値計算を利用したシミュレーションがますます大きな役割を果たすことが期待[1),2)]されている．この一因は勿論計算機の性能の進歩によるものであるが，現象のメカニズムの詳細が明らかになったことも見逃せない．しかし，高性能の計算機や解明されたメカニズムを用いても，解析モデルが妥当なものでなければシミュレーションの結果は現実と異なってしまう．地震現象の舞台となる地殻や地盤は構造が一様ではなく，構造を測定することも容易ではない．このため，精緻な解析モデルを構築することには限界がある．

通常，力学現象の数値シミュレーションには，材料特性や内部構造，境界条件が与えられたモデルが用いられる．地殻や地盤ではこのような決定論的モデルが構築しづらいため，代替として確率モデル[3)]を利用することが考えられる．確率モデルは，材料特性や内部構造，境界条件の不確からしさを確率的に表すものである．地下構造に関しては，例えば地層境界が確率的に記述され，境界の深さの平均や分散が与えられ，さらに材料パラメータの平均や分散，確率密度関数が与えられることになる．

確率モデルでは，確率的に表現されたモデルの不確からしさに対応して，変位や応力といった応答も確率的に変わり，ばらつきを持つことになる．モデルの不確からしさと応答のばらつきの関係は単純なものではない．非線形現象を扱う場合，不確からしさとばらつきの関係は当然非線形になり，不確からしさが若干増えただけでもばらつきが大きくなることもある．動的現象を扱う場合，不確からしさの空間的な寸法によって，ばらつく応答の周波数領域が変わってくる．不確からしさの大きさが比較的短い場合には，高い周波数の応答はばらつくが，低い周波数の応答は影響を受けないのである．このようにモデルの不確からしさと応答のばらつきの関係は複雑である．

確率モデルを解析する通常の方法はモンテカルロシミュレーションである．確率モデルから多数のサンプルを発生させ，個々のサンプルを解析し，応答の統計的量を計算してばらつきを求める手法である．しかし，地震に関わる力学現象では，個々のサンプルの解析には大きな計算量が必要となり，モンテカルロシミュレーション全体では計算量が膨大なものとなる．また，応答のばらつきは平均や分散といった比較的簡単な特性値で表すことで十分であるため，個々のサンプルの数値解析を行うモンテカルロシミュレーションは無駄があると思われる．

上記を背景に，著者のグループは[4),5)]，地震現象の確率モデルを効率的に解析する理論を提案してきた．この理論は不均一材料を解析する理論[6)]を拡張したものである．元来，材料の微小な不均一性を扱う理論には何らかの確率論的な考察が加わっている．著者のグループの理論は，より厳密な確率論的考察を加え，空間的な不均一性を確率的かつ空間的な不均一性として扱えるように構築されている．この理論に基づき，著者のグループ

は二つの解析手法を構築している．一つは地震波動解析用に開発されたマクロ-ミクロ解析手法[7] (Macro-Micro Analysis Method, MMAM) であり，確率モデルの平均的挙動の上下限を計算する手法である．もう一つは非線形スペクトル確率有限要素法[8),9)] (Non-Linear Spectral Stochastic Finite Element Method, NL-SSFEM) であり，地表地震断層の確率モデルの解析に開発された．

本論文は，MMAM と NL-SSFEM の基盤となる確率モデルの解析理論を詳細に説明することを目的とする．解析理論の主眼は，不確からしさに対応した確率モデルの設定とばらつきのある応答に対する確率変分問題の定式化という二点である．確率モデルの設定は標準的であるが，確率変分問題の定式化はいくつかの重要な式展開を含んでおり，少なくとも応用力学の分野では全く新規なものと判断している．なお，著者のグループは，有限要素法の枠組みの中で，MMAM と NL-SSFEM という二つの解析手法を統一的に説明した論文[5]を発表している．一方，本論文は，確立変分問題として定式化される確率モデルの解析理論そのものに力点を置き，その論文との区別を図っている．

なお，地震動の問題に限れば，本論文と同様に確率論的手法を適用した研究は数多く見受けられる．しかし，このような研究はデータ解析に確率論ないし統計的手法を適用するものであり，不確かな地盤構造をモデル化する際に確率理論を適用し，さらに，構築された確率モデルを力学的に解析するという点で本研究とは趣が異なっている．構造等が不確かなため地震問題の予測は不確からしさに応じた幅がある．ややもすると不確からしさを無視した決定論的なモデルの解析に基づく予測や，力学的挙動を考慮せずに統計解析が主となった予測になりがちであるが，本研究で紹介される確率モデルと解析理論は，力学理論と確率理論を相互補完的に扱うことで，不確からしさに応じた予測の幅をできるだけ合理的に求めることを試みているのである．

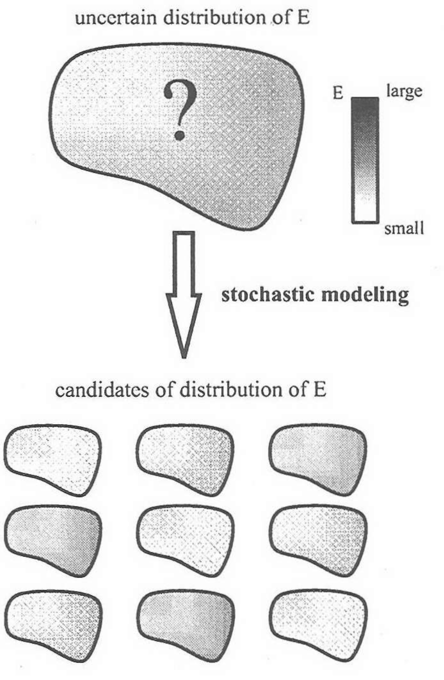
本論文の記号を簡単に説明する．直交座標 x_i を用いる．ベクトル・テンソルは添え字を使って表記し，総和規約を適用する．またカンマの後の添え字は偏微分を表す $((),_i = \partial()/\partial x_i)$．

2. 確率変数を用いた確率モデル

簡単のため等方線形弾性体 B を例に確率モデルを考える (図 2. 参照)．ポアソン比 ν は一様であるもののヤング率 E が非一様であるとする．この場合，B の不均一弾性テンソルは次のように表すことができる．

$$c_{ijkl}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x})h_{ijkl}. \tag{1}$$

ここで h_{ijkl} は ν によって決定される定テンソルである．なお，弾性体 B の材料特性が不確かである場合には，i)E は一様であるがその値が不明，ii)E は非一様でありその分布が不明，という二つがある．本論文ではより一般的な ii) の場合を対象とし，c_{ijkl} が式 (1) で与えられることとしている．また，ある面を境にヤング率 E が不連続に分布する場合には，弾性体 B はその面を境界とする異なる材料から構成されることになる．すなわち式 (1) は，材料特性の分布のみならず，内部構造を表すこともできる．



図–1 材料特性内部構造に不確からしさがある弾性体の確率モデル: ヤング率 E の分布が不確かな場合，適当な E の分布を持つ複数のモデルを考えるが，これは物理空間と確率空間で E が変化する確率モデルに対応する．

弾性体 B の材料特性分布や内部構造が分かっている時には，式 (1) の E に一つの関数を与えることができる．しかし，材料特性や内部構造が不確かな場合，一つの関数を与えることはできない．このような場合，E の分布の候補として，さまざまな関数が考えられる．簡単のため，このような候補が N 個ある場合を考える．第 n 番目の候補を E^n とすると，

$$E(\mathbf{x}) = E^1(\mathbf{x}) \text{ or } E^2(\mathbf{x}) \text{ or } \cdots \text{ or } E^N(\mathbf{x})$$

ということになる．第 n 番目の候補が実際に B のヤング率となることの確からしさは確率的に表すことができる．例えば全ての候補が同じように確かであれば，確からしさは $1/N$ となる．

教科書的ではあるが，標準的な確率理論に基づいて確率モデルを説明する．前述の「E が E^n となる」ということを事象 ω^n，事象 ω^n が起こる確率を $P(\omega^n)$ とする．上記の例では $P(\omega^n) = 1/N$ である．関数 E は

B 内の全ての点の関数であるため，実際は候補の数は無限にある．そこで関数の候補を使う離散的な表現に替わって，確率変数を用いて E を表すことになる．すなわち，事象 ω に依存した次の形の関数を用いるのである．

$$E(\mathbf{x},\omega)$$

なお事象を全て含む空間を確率空間 Ω とする．ある事象 ω が起こると E は場所 $\mathbf{x}$ の関数となり，逆に一点 $\mathbf{x}$ に注目すると事象 ω に応じて E の値が変わるのである．

確率空間 Ω には無数の事象があるため，個々の事象が起こる確率を考えることは意味がない．前述の例では N が無限大となる場合に対応し，この場合は $P(\omega^n)=1/N$ は 0 になる．すなわち，個々の事象が起こる確率は 0 となる．確率変数を使う場合には，個々の事象の替わりに，適当な事象の組が起こる確率を計算することになる．このような事象の組は確率空間 Ω の部分集合となる．事象の組全体を $\mathcal{F}$ として表し，$\mathcal{F}$ の要素である事象の組に確率 P を与える．これが確率変数を扱う標準的な枠組みである．この枠組みでは，E を $(\Omega,\mathcal{F},P)$ の確率変数と呼び，確率空間，事象の組の全体，確率を明示する．上記の説明は確率モデルにこの枠組みを適用したことを除けば，何ら新規なものではないことは強調する．

実際の地震現象を解析する際，対象となる地殻や地盤に対して確率変数を設定することは決して容易ではない．これは地殻や地盤の材料特性や内部構造に関して，確定的な値は勿論，不確からしさに関する情報を測定から完全に得ることが難しいためである．著者のグループは，少数のパラメータを用いた簡単な確率分布を想定することでこの課題の解決を試みている．パラメータは平均 μ，分散 σ，相関距離 ℓ の三種であり，ガウス分布に従うこととする．地殻や地盤に対し相関関数を設定することは必要不可欠である．なぜなら，同じ地層では，ヤング率が不連続に変わることは起こりえないからである．また，相関距離を大きくすればほぼ一様な地層を表すことができる．著者のグループが想定する確率変数では，一点を指定した場合に，ヤング率の確率密度関数 ϕ_E は次のガウス分布となる．

$$\phi_E(E)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-(E-\mu)^2/\sigma^2) \qquad (2)$$

二点のヤング率の相関も簡単に計算され，次の相関関数 σ_E が与えられる．

$$\sigma_E(r)=\sigma\exp(-r/\ell) \qquad (3)$$

ここで r は二点の距離を表し，距離に応じて相関が分散 σ から指数関数的に減少する．なお式 (3) の $\exp(-r/\ell)$ は等方的な相関を表している．地殻や地盤のように水平方向と鉛直方向の相関が異なる場合には，その方向の距離と相関距離をそれぞれ (r,ℓ) と (r',ℓ') として相関関数に $\exp(-r/\ell)\exp(-r'/\ell')$ を使えばよい．

3. 確率モデルの境界値問題

前章で構築された確率モデルは，与えられた入力に対する応答を求めることが目的となる．地震現象では入力も不確かであるが，モデル自体の不確からしさに比べ取り扱いは容易であるため，本論文では入力がモデルの境界変位 $\overline{u}_i$ として確定的に与えられることとする．通常の不均一体モデルと確率モデルの違いを明確に示すため，不均一ではあるがヤング率が与えられた時の B の応答を解析する問題を明示する．これは次の境界値問題である．

$$\left\{\begin{array}{ll}(c_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}(\mathbf{x}))_{,i}=0 & \text{in } B,\\ u_i(\mathbf{x})=\overline{u}_i(\mathbf{x}) & \text{on } \partial B.\end{array}\right. \qquad (4)$$

ポアソン比 ν は一様であることから $c_{ijkl}(\mathbf{x})=E(\mathbf{x})h_{ijkl}$ として E の不均一性を強調する．ここで h_{ijkl} は ν によって決定されるテンソルである．確率モデルの場合は応答である変位も確率的に変わることになるため，境界値問題 (4) は次のように替わる．

$$\left\{\begin{array}{ll}(E(\mathbf{x},\omega)h_{ijkl}u_{k,l}(\mathbf{x},\omega))_{,i}=0 & \text{in } B,\\ u_i(\mathbf{x},\omega)=\overline{u}_i(\mathbf{x}) & \text{on } \partial B.\end{array}\right. \qquad (5)$$

式 (4) の $c_{ijkl}(\mathbf{x})=E(\mathbf{x})h_{ijkl}$ は $E(\mathbf{x},\omega)h_{ijkl}$ に代わっている．また変位 u_i もベクトル形式の確率変数，すなわち確率ベクトルであることを強調するため，u_i の括弧の中に ω を加えている．

式 (4) と式 (5) の境界値問題は同じ形式であるため，両者に同様の解析が可能であるように見える．実際，前章で説明したように E が離散的に与えられる場合には，対応する変位 u_i^n は

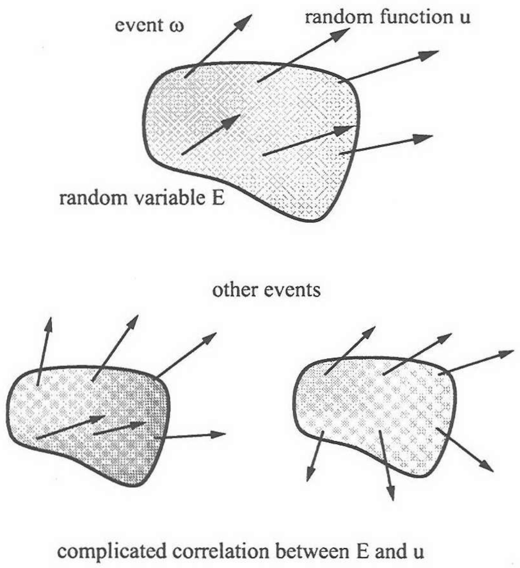
$$\left\{\begin{array}{ll}(c^n_{ijkl}(\mathbf{x})u^n_{k,l}(\mathbf{x},\omega))_{,i}=0 & \text{in } B,\\ u^n_i(\mathbf{x},\omega)=\overline{u}_i(\mathbf{x}) & \text{on } \partial B.\end{array}\right.$$

という境界値問題の解となる．勿論 c^n_{ijkl} は $c^n_{ijkl}(\mathbf{x})=E^n(\mathbf{x})h_{ijkl}$ である．したがって u_i^n が実現する確率は

$$Pr(u_i=u_i^n)=P(E=E^n)$$

として与えられる．

しかし，連続的な確率変数を用いた境界値問題 (5) では E と u_i の相関を考えなければならない．これは非常に困難な問題である．例えば E がガウス分布に従う場合でも，両者は偏微分方程式を通じて関連しているため，u_i がガウス分布に従うとは限らない．定性的に E が大きい箇所ではひずみは小さくなる傾向にあることは予想されるが，式 (5) は応力の偏微分に関するものであるから，関数の値のみならずその一階や二階の偏微分が相互に関連しなければならない．この結果，E と



図–2 確率モデルの境界値問題の解析の難しさ：入力された E の不確からしさと出力される u_i のばらつきの相関を考慮する必要性.

u_i の関係が単純なものとなることはありえないのである (図 3. 参照). したがって確率変数 E が与えられても確率ベクトル u_i の確率分布を設定することは難しい.

連続体の確率モデルを解析する古典的な手法として，モンテカルロシミュレーションとは別に，確率有限要素法 (Stochastic Finite Element Method, SFEM) が開発されていることを指摘する．このSFEMではモデルの不確からしさが小さいことを仮定し，モデルの不確からしさと応答のばらつきが同じ確率分布をすることで，上記の相関の問題を解決している．境界値問題 (5) を例にすると，SFEMでは，ヤング率と変位の平均を $E^{(\mathrm{m})}$ と $u_i^{(\mathrm{m})}$，平均からのずれを $E^{(\mathrm{d})}$ と $u_i^{(\mathrm{d})}$ とし，$E^{(\mathrm{d})} \ll E^{(\mathrm{m})}$ と $|u_i^{(\mathrm{d})}| \ll |u_i^{(\mathrm{m})}|$ の仮定の下で，

$$\begin{cases} (c_{ijkl}^{(\mathrm{m})}(\mathbf{x})u_{k,l}^{(\mathrm{m})}(\mathbf{x}))_{,i} = 0 & \text{in } B, \\ u_i^{(\mathrm{m})}(\mathbf{x}) = \overline{u}_i(\mathbf{x}) & \text{on } \partial B, \end{cases}$$

と

$$\begin{cases} (c_{ijkl}^{(\mathrm{m})}(\mathbf{x})u_{k,l}^{(\mathrm{d})}(\mathbf{x},\omega))_{,i} & \\ \quad + (c_{ijkl}^{(\mathrm{d})}(\mathbf{x},\omega)u_{k,l}^{(\mathrm{m})}(\mathbf{x}))_{,i} = 0 & \text{in } B, \\ u_i^{(\mathrm{d})}(\mathbf{x},\omega) = 0 & \text{on } \partial B \end{cases}$$

という $u_i^{(\mathrm{m})}$ と $u_i^{(\mathrm{d})}$ に対する連立した境界値問題を導く．なお $c_{ijkl}^{(\mathrm{m})}(\mathbf{x}) = E^{(\mathrm{m})}(\mathbf{x})h_{ijkl}$ と $c_{ijkl}^{(\mathrm{d})}(\mathbf{x},\omega) = E^{(\mathrm{d})}(\mathbf{x},\omega)h_{ijkl}$ である．平均からのずれ $E^{(\mathrm{d})}$ と $u_i^{(\mathrm{d})}$ は線形関係にあるため，両者の確率分布は一致する．この線形関係を導くためには，仮定，$E^{(\mathrm{d})} \ll E^{(\mathrm{m})}$ と $|u_i^{(\mathrm{d})}| \ll |u_i^{(\mathrm{m})}|$，が不可欠である．したがって不確からしさが大きい地殻や地盤の確率モデルの解析にはSFEMは適していない.

4. 確率モデルの変分問題とその解法

確率変数 E と確率ベクトル u_i の相関も求めなければならないため，確率モデルの境界値問題 (5) を解くことは容易ではない．代替として著者のグループが提案している確率モデルの解析理論は，境界値問題 (5) と等価な変分問題を設定し，その変分問題を近似的に解くものである．本論文では確率モデルの変分問題を確率変分問題と呼ぶ．確率変分問題の正解を求めることは，境界値問題と同様，困難である．しかし，境界値問題と異なり，適当な近似解を求めることが可能となる．確率変分問題はやや難解ではあるが，導入する利点はここにある.

境界値問題が与えられた場合，それと等価な変分問題は，境界値問題の支配方程式の弱形式から導くことができる．境界値問題 (5) の支配方程式の弱形式は次のようになる.

$$\int_{B\times\Omega} \delta u_j(\mathbf{x},\omega)(c_{ijkl}(\mathbf{x},\omega)u_{k,l}(\mathbf{x},\omega))_{,i}\mathrm{d}vP(\mathrm{d}\omega)$$
$$= -\int_{B\times\Omega} \delta u_{i,j}(\mathbf{x},\omega)c_{ijkl}(\mathbf{x},\omega)u_{k,l}(\mathbf{x},\omega)\mathrm{d}vP(\mathrm{d}\omega). \tag{6}$$

境界条件より境界 ∂B において $\delta u_i = 0$ であることが使われている．式 (6) の右辺より，境界値問題 (5) と等価となる確率変分問題に用いられる汎関数を設定することができる．境界 ∂B において $u_i = \overline{u}_i$ を満たす確率ベクトル u_i に対する次の汎関数である.

$$J(\mathbf{u};E) = \int_{B\times\Omega} e(\mathbf{x},\omega)\mathrm{d}vP(\mathrm{d}\omega). \tag{7}$$

ここで e は次のように定義されるひずみエネルギー密度の確率変数である.

$$e(\mathbf{x},\omega) = \frac{1}{2}c_{ijkl}(\mathbf{x},\omega)u_{i,j}(\mathbf{x},\omega)u_{k,l}(\mathbf{x},\omega). \tag{8}$$

なお，確率空間の積分に $P(\mathrm{d}\omega)$ が用いられているが，これは事象の確率に応じた重みがかかった積分である．次に示すように，この積分を用いることで式 (6) に対応した汎関数に物理的な意味を与えることができる.

式 (7) の汎関数 J は通常の弾性体問題に用いられるひずみエネルギーの汎関数と同様の形式である．実際，J は e を物理空間 B で積分し，さらに確率空間 Ω で積分している．したがって J の停留値は確率モデル B に蓄えられるひずみエネルギーの期待値となることがわかる．また，$E > 0$ の場合，テンソル c_{ijkl} は正定値となるため，汎関数の停留値は最小値となる．この二つの性質も通常の汎関数と同じであり，境界値問題 (5) の解を u_i^{sol} とおくと，次の不等式が成立することになる.

$$\int_B \langle e^{sol}\rangle \mathrm{d}v = J(\mathbf{u}^{sol};E) \leq J(\mathbf{u};E). \tag{9}$$

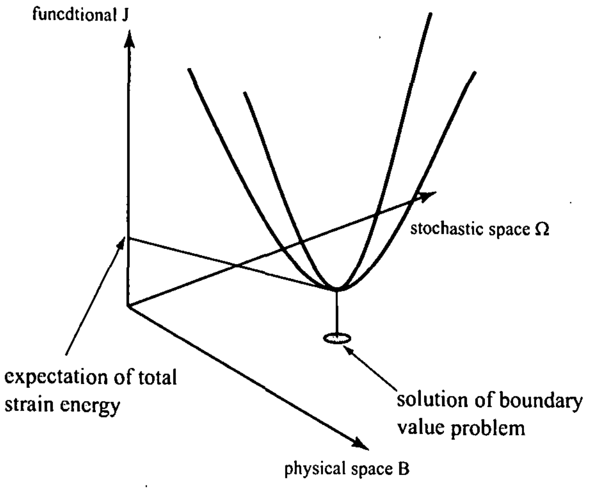


図-3 確率変分問題の汎関数の概念図: 物理空間と確率空間の確率ベクトル u_i に対する汎関数が式 (7) の J であり，式 (9) で示すように J の最小値が確率モデル B の全ひずみエネルギーの期待値と一致する.

ここで $\langle e^{sol}\rangle$ は $e^{sol}=\frac{1}{2}c_{ijkl}u^{sol}_{i,j}u^{sol}_{k,l}$ として計算されるひずみエネルギー密度の期待値であり，式 (9) の左辺は B 全体のひずみエネルギーの期待値である．一方，右辺の $J(\mathbf{u};E)$ は境界条件を満たす任意の変位に対して計算される値である．すなわち，式 (9) は，B 全体のひずみエネルギーの期待値が $J(\mathbf{u};E)$ の最小値であることを示している.

数値計算では u_i を離散化して J の変分問題を解くことになる．不等式 (9) により，J をより小さくする u_i が境界値問題 (5) のより良い近似解となることがわかる．この変分問題の数値解析では，ヤング率と変位の相関を直接考える必要はないことを強調する．離散化された確率ベクトルの中で，汎関数 J を最小化するものを見つけるだけで，最も適当な近似解を見つけることができるのである (図 4. 参照).

確率変分問題を用いた確率モデルの解析理論に基づき，著者のグループは確率変分問題を解く手法を提案している．第一章で触れた MMAM と NL-SSFEM が具体的な手法である．以下，式 (7) の J を例に二つの解析手法を説明する.

4.1 MMAM

MMAM は，確率ベクトルではなく，その期待値を評価することを目的[4]とする．具体的には，確率モデルから決定論的モデルを構築し，そのモデルを解析して変位の期待値を評価する．図 4. に示すように決定論的モデルは期待値を挟むように構築されている.

汎関数 J の定義により，事象 ω に依存しない u^{det}_i を代入すると確率空間の積分は E のみに作用することになる．この結果，次の不等式が式 (9) より導かれる.

$$\int_B \langle e\rangle \mathrm{d}v < J(\mathbf{u}^{det};E) = \int_B \frac{1}{2}\langle E\rangle(\mathbf{x})h_{ijkl}u^{det}_{i,j}(\mathbf{x})u^{det}_{k,l}(\mathbf{x})\mathrm{d}v \tag{10}$$

ここで $\langle E\rangle$ はヤング率の期待値 ($\langle E\rangle(\mathbf{x})=\int_\Omega E(\mathbf{x},\omega)P(\mathrm{d}\omega)$) である．式 (10) の左辺はヤング率が $\langle E\rangle$ として与えられた決定論的モデルの汎関数と見なすことができる．また，左辺の最小値は，この決定論的モデルの境界値問題の解によって与えられる．すなわち，仮想的ではあるが

$$E^+(\mathbf{x})=\langle E\rangle(\mathbf{x})$$

によって与えられる決定論的モデルは確率モデル B の全ひずみエネルギーの期待値の上限を与えることになる．同様に

$$E^-(\mathbf{x})=1/\langle 1/E\rangle(\mathbf{x})$$

によって与えられる決定論的モデルは全ひずみエネルギーの期待値の下限を与えることを示すことができる．これが MMAM で用いられる上下限体理論 (bounding medium model theory) である．上下限体の解は全ひずみエネルギーの期待値を挟むため，この意味で，MMAM では u_i の期待値を評価する.

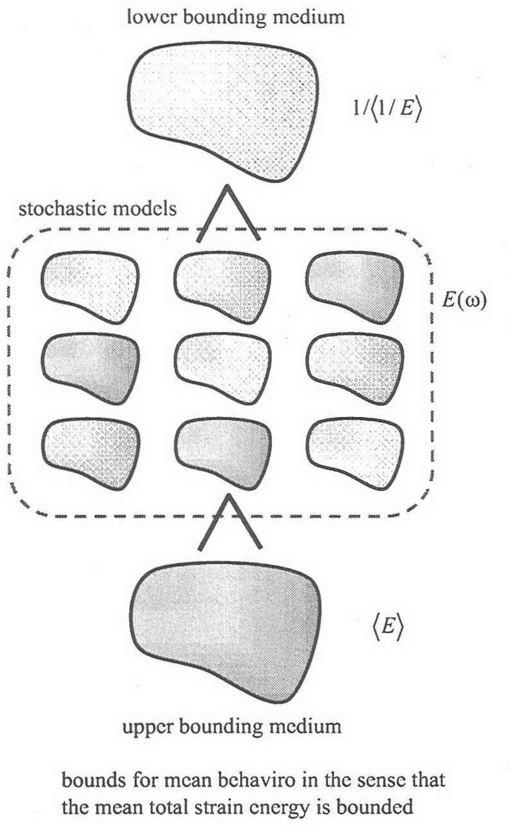
4.2 NL-SSFEM

NL-SSFEM ないし SSFEM は確率ベクトル u_i を近似的[8),9)]に計算する．その基となるのはヤング率 E と変位 u_i の確率空間での関数展開[3),10)]である．確率空間の関数は抽象的であり，例えば，事象 ω に対して陽な形で関数を書くことはできない．しかし，平均や分散，そして高次モーメントを計算することは可能である．確率空間での展開された関数はこの意味で与えられる (図 4. 参照).

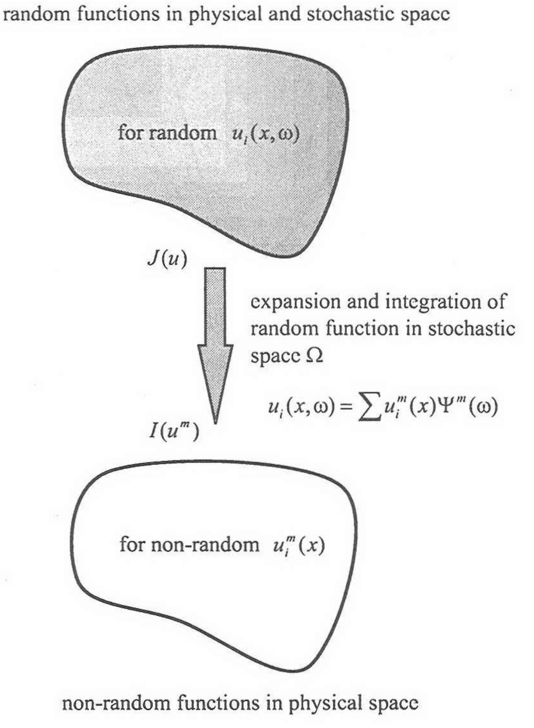
確率空間での関数展開にはさまざまな方法があるが，我々のグループは Ghanem and Spanos[3)]に習い，Karhunen-Loeve 展開 (KL 展開) と polynomial chaos 展開 (PC 展開) を E と u_i に適用する.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x},\omega) &= \sum_{n=0}\lambda^n\phi^n(\mathbf{x})\xi^n(\omega), \\ u_i(\mathbf{x},\omega) &= \sum_{m=0}u^m_i(\mathbf{x})\Psi^m(\omega). \end{aligned} \tag{11}$$

ここで $\{\phi^n\}$ と $\{\xi^n\}$ は E の相関関数のスペクトル分解から計算される物理空間と確率空間の基底であり，$\{\Psi^m\}$ は $\{\xi^n\}$ の多項式として与えられる (式 (11) の詳細は参考文献[3),8)]を参照)．また $\{\lambda^n\}$ は E の相関関数の固有値であり，u_i が未知であるため $u^m_i=\langle u_i\Psi^m\rangle$ として定義される u^m_i は未知の物理空間の関数となる．式 (11) の展開を用いることで，SSFEM は E と u_i を



図–4 MMAM で用いられたバウンディングメディアの概念図：適当な E の分布を持つ複数のモデルは確率モデルに対応するが，$1/\langle 1/E\rangle$ と $\langle E\rangle$ の分布を持つモデルの挙動が確率モデルの挙動の上限と下限を与える．



図–5 SSFEM の確率変数ベクトルの離散化の概念図：確率ベクトルである変位 $u_i(\mathbf{x},\omega)$ を既知の $\{\Psi^m\}$ を使って PC 展開することで，その係数，すなわち，物理場の関数である $\{u_i^m\}$ に対する境界値問題が導かれる．

確率空間 Ω で離散化する．離散化された E と u_i を J に代入して Ω での積分を行うと，形式的に u_i^m に対する次の汎関数が導かれる．

$$I(\mathbf{u}^m)=\sum_{m,m'}\int_B c_{ijkl}^{mm'}(\mathbf{x})u_{i,j}^m(\mathbf{x})u_{k,l}^{m'}(\mathbf{x})\mathrm{d}v. \qquad (12)$$

ここで $c_{ijkl}^{mm'}$ は変位の係数 u_i^m と $u^{m'}$ を結ぶ見かけの弾性テンソルであり，

$$c_{ijkl}^{mm'}(\mathbf{x})=\sum_n\langle\xi^n\Psi^m\Psi^{m'}\rangle\lambda^n\phi^n(\mathbf{x})$$

として与えられる．通常の有限要素法のように，SSFEM は $\{u_i^m\}$ を領域 B で離散化し最適な近似解を計算する．

非線形問題の場合も同様である．展開の係数 $\{u_i^m\}$ の増分に対する式 (12) の I と同様の汎関数を導き，NL-SSFEM は，対応する確率変分問題から最適な近似解を求める．なお，式 (11) の展開は適当な項数で打ち切られるが，展開項数が大きくなるほど，近似解は正解に近づくことになる．

5. 結論

本論文は，確率変分問題として定式化される確率モデルの解析理論を示した．確率変分問題ではモデルの不確からしさと応答のばらつきの間の相関を考える必要がないことに最大の利点がある．この解析理論に基づく具体的な解析手法である MMAM と NL-SSFEM は，この利点を活かし，効率的な数値計算を実現している．地震現象の場となる地殻や地盤にはこのような確率モデルを用いたシミュレーションが必要であるため，効率的な解析手法の基となる確率モデルの解析理論は有用であると思われる．

本研究は科学技術振興事業団および日本学術振興会の科学研究費補助金の補助を受けた．ここに記して感謝の意を表する．

参考文献

1) Rice, J.: New perspectives on crack and fault dynamics, in *Mechanics for a New Millennium* (Proceedings of the 20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 27 Aug - 2 Sept 2000, Chicago), eds. Aref, H. and Phillips, J.W., Kluwer, pp. 1-23,

2001.
2) Lay, T. and Wallace, C.: *Modern Global Seismology*, Academic press, 1995.
3) Ghanem, R.G. and Spanos, P.D.: *Stochastic finite elements: a spectral approach*, Springer, 1991.
4) Hori, M. and Munashinge, S.: Generalized Hashin-Shtrikman variational principle for boundary-value problem of linear and non-linear heterogeneous body, *Mechanics of Materials*, **31**, pp. 471-486, 1999.
5) Hori, M., Ichimura T. and H. Nakagawa, H.: Analysis methods of stochastic model: application to strong motion and fault problems, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng.*, JSCE (in print).
6) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, 2nd edition, North-Holland, New York, 1998.
7) Hori, M. and Ichimura, T.: Macro-micro analysis for wave propagation in highly heterogeneous media - prediction of strong motion distributions in metropolis -, in *Wave 2000* (Proceedings of the International Workshop, Dec. 13-15, Bochum, Germany), eds. N. Chouw and G. Schmid, Balkema, pp. 379-398, 2000.
8) Anders, M. and Hori, M.: Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 46, pp. 1897-1916, 1999.
9) Anders, M. and Hori, M.: Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic body, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 51, pp. 449-478, 2001.
10) Honda, R.: Analysis of wave propagation in random media by spectral stochastic finite element method, *J. Struct. Mech./Earthquake Eng.*, JSCE, Vol. 689(I-57), pp. 321-331, 2001.

(2003年4月18日受付)