

マルチメカニズムを考慮した粒状材料の構成則に関する研究

A study on the constitutive equation of granular materials with multiple mechanisms in plastic deformation

鄒 春躍*, 岸野佑次**

Chunyue ZOU, Yuji KISHINO

*学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**フェロー 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

This paper presents a constitutive model based on the multiple plastic mechanisms which result in the incrementally nonlinear behavior and it also discusses the consequent instability. The constitutive equation is derived through 3D-GEM simulations of tri-axial compression and extension tests as well as a series of stress probe tests. The test results show that two types of plastic mechanism govern the plastic behavior of granular materials. The first one is called the basic mechanism, which obeys the non-associative flow rule. The other one is called the additive mechanism, which is generated in each stress probe. The last part is dedicated to a bifurcation analysis performed in terms of the presented constitutive model.

Key Words : 3D GEM, multiple mechanisms, non-associative flow rule, basic mechanism, additive mechanism, discontinuous bifurcation, dilatancy

1. はじめに

従来、材料の安定性議論が種々なされているが、これらは用いる構成則に大きく依存している。従って、まず材料が実際にどのような挙動を示すかについて詳細な検討を行う必要がある。材料の弾塑性変形挙動を完全に把握するためには、応力成分数に対応して自由度 6 の応力プローブ試験を実施する必要があるが、現状の実験手段では、このような応力プローブ試験を行うことは不可能である。これに対して、コンピュータシミュレーション試験は応力やひずみの自由な制御を可能とし、現実の試験を補間するものとして有効である。岸野らはこのような目的で粒状要素法(GEM)を開発した^{1, 2)}。本手法は DEM と同様に粒子集合モデルを解析対象とするが、解析アルゴリズムに静的平衡条件を満たすための剛性法を導入する点に特徴がある。本論文では 3 次元粒状材料について、とくに、三軸応力状態を出発点とする分岐载荷に対応する弾塑性変形挙動を 3 次元粒状要素法により把握し、構成則の考察を行うことを目的とする。

近年地盤材料に関して、弾塑性論における仮定を一般化し、応力増分の降伏曲面接平面方向成分に対しても塑性ひずみが生じるようなモデル^{3, 4)}や、弾塑性論とは別個の増分非線形モデル^{5, 6)}が提案されている。このようなモデルで予測される非弾性変形

挙動が実際に生じるか、また、そのような挙動の微視的メカニズムはどのようなものであるかを調べるためには、シミュレーション解析に頼る必要があると考えられる。3次元粒状要素法を用いた予備的シミュレーション⁷⁾によると三軸载荷状態からの応力プローブ試験においても、側圧 2 成分の間に差を生じるような応力プローブに対しては従来の流動則が成立しないという知見を得ている。本論文ではこのような挙動を説明するために、マルチメカニズム^{8~10)}の考えを導入することが必要であることを示す。さらに、3軸応力状態に限定したものではあるが、マルチメカニズムを考慮した構成則を提示してこれを安定問題解析¹¹⁾に応用し、考察する。

2. 3次元 GEM による粒状体の変形挙動の検討

2.1 解析の対象

本研究で用いた供試体は、図-1 に示したように、粒径 2.0~6.0mm の球粒子 540 個を球状の 3 次元領域にランダムにパッキングした粒子集合体である。粒子は剛体とみなす。粒子の重なりを許し、粒子と粒子の間の接触力は弾性バネ要素と摩擦性要素に制御されて生じるもととする。弾性バネは粒子の法線方向と接線方向別に設定する。砂のような材料は粘着力を無視できると考えるので、引張力に抵抗しないこととし、これをノーテンション要素として表現

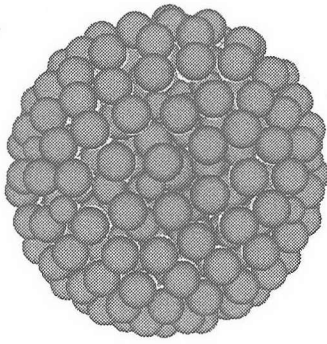


図-1 供試体

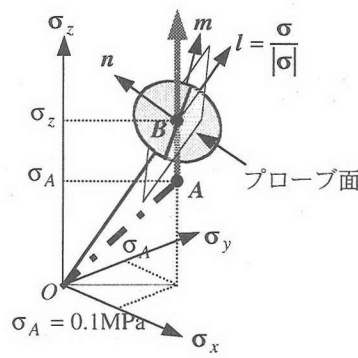


図-2 三軸圧縮荷重経路

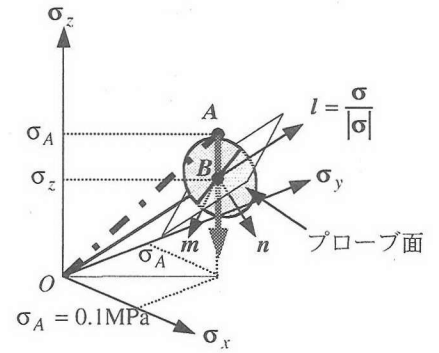


図-3 三軸伸張荷重経路

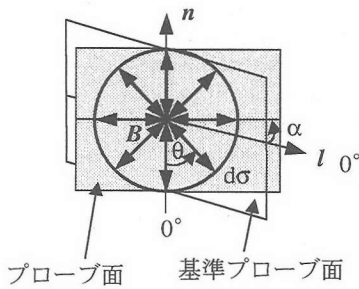


図-4 プローブ面

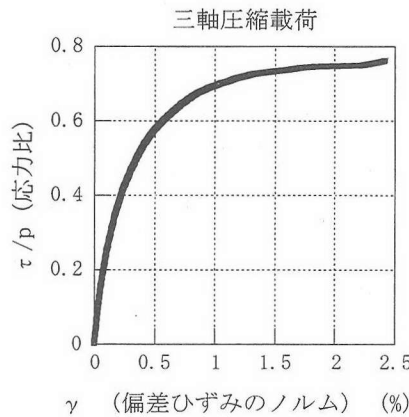


図-5 三軸圧縮荷重の応力-ひずみ曲線

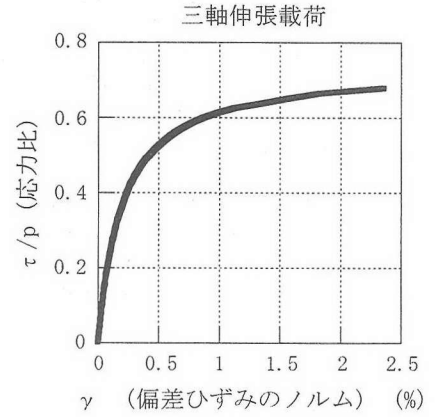


図-6 三軸伸張荷重の応力-ひずみ曲線

する。粒子間のすべりに抵抗しようとする摩擦抵抗力は Coulomb の摩擦則に従うものとする。本研究では粒子の法線方向のバネ定数は 20kN/m とし、接触点における接線方向のバネ定数は接平面内の方向によらず同一の値、14kN/m とする。また、粒子内部摩擦角度を 15° とする。なお、粒子の自重は外力に比べて小さいとし、本研究ではこれを無視する。

2.2 荷重経路と応力-ひずみ曲線

図-2 に側圧($\sigma_x = \sigma_y$)一定の三軸圧縮荷重経路、図-3 に側圧($\sigma_x = \sigma_y$)一定の三軸伸張荷重経路、図-4 に応力プローブ試験で応力増分を定めるためのプローブ面を示す。主応力空間の中のベクトル l , n , m は次のように定義される。

$$l = \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad (1)$$

$$n = \frac{(\sigma - \sigma_A) - \{(\sigma - \sigma_A) \cdot l\}l}{|(\sigma - \sigma_A) - \{(\sigma - \sigma_A) \cdot l\}l|} \quad (2)$$

$$m = n \times l \quad (3)$$

ここに、 σ は現在の応力であり、 σ_A は三軸圧縮、伸張荷重試験の出発点の A 点の応力である。

三軸圧縮、伸張試験は等方圧縮状態 A 点から出発し、側圧($\sigma_x = \sigma_y$)一定の下、供試体が耐力を失

うまで、 σ_z 方向の単調荷重を行う。

応力プローブ試験は荷重経路の任意応力 B 点における種々の方向に荷重・除荷を行い、ひずみ応答を調べる試験である。本研究で応力プローブ試験は応力増分の大きさを初期拘束値の 1/100、すなわち 1kPa とし、ベクトル n のまわりで回転させて定めたプローブ面毎に行う。ベクトル n と l を含む平面を基準プローブ面と称する。図-4 に示す角度 α はプローブ面と基準プローブ面のなす角度であり、反時計回りを正とする。各プローブ面内の応力プローブ方向を、 $-n$ の方向を 0° とし、反時計回りを正とする角度 θ で表す。

図-5、図-6 にそれぞれ三軸圧縮荷重、伸張荷重の応力-ひずみ曲線を示す。応力-ひずみ曲線の横軸は偏差ひずみのノルム γ 、縦軸は偏差応力のノルム τ と平均応力 p の比 τ/p (応力比) である。応力比 τ/p などのパラメータは次式で定義される。

$$\gamma = \sqrt{\left(\epsilon_x - \frac{\epsilon_v}{3}\right)^2 + \left(\epsilon_y - \frac{\epsilon_v}{3}\right)^2 + \left(\epsilon_z - \frac{\epsilon_v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2)} \quad (4)$$

$$\tau = \sqrt{(\sigma_x - p)^2 + (\sigma_y - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + 2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \quad (5)$$

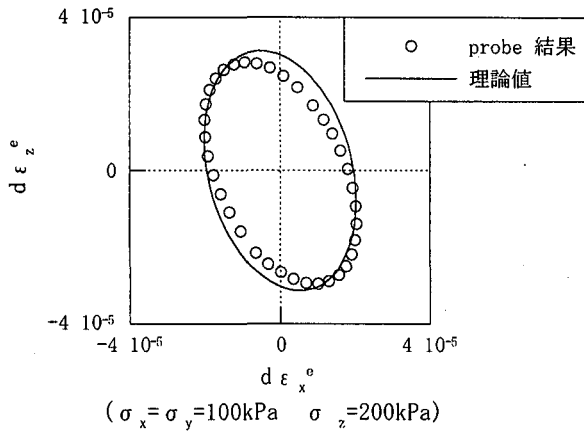


図-7 プローブ試験で得られた弾性ひずみ増分
(三軸圧縮状態 $\alpha=0^\circ$)

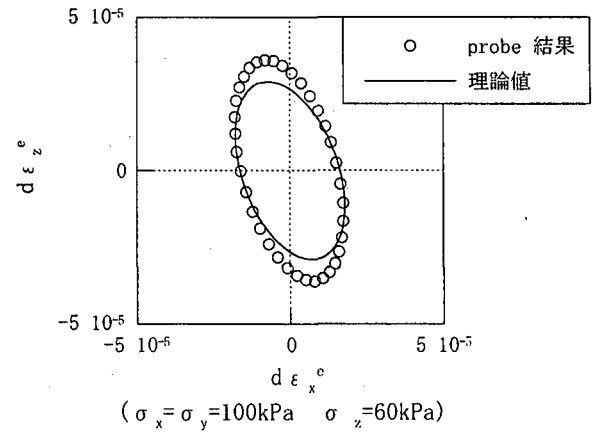


図-8 プローブ試験で得られた弾性ひずみ増分
(三軸伸張状態 $\alpha=0^\circ$)

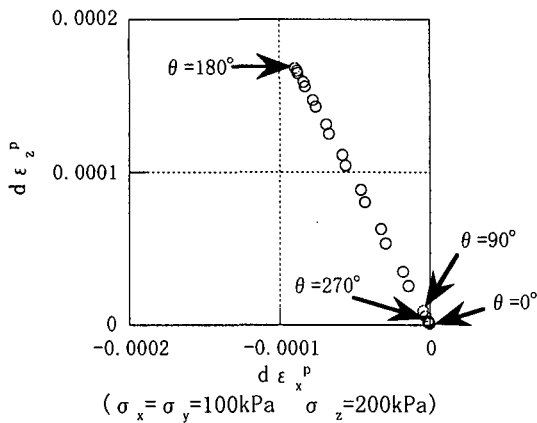


図-9 プローブ試験で得られた塑性ひずみ増分
(三軸圧縮状態 $\alpha=0^\circ$)

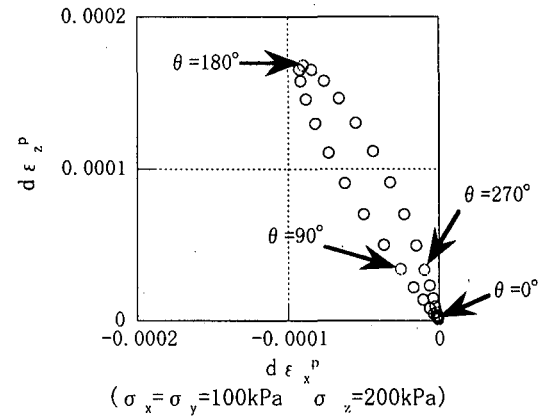


図-10 プローブ試験で得られた塑性ひずみ増分
(三軸圧縮状態 $\alpha=90^\circ$)

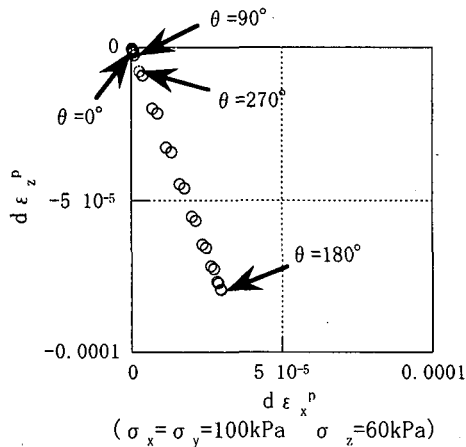


図-11 プローブ試験で得られた塑性ひずみ増分
(三軸伸張状態 $\alpha=0^\circ$)

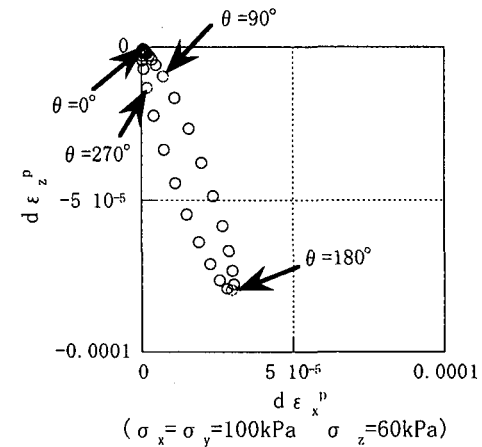


図-12 プローブ試験で得られた塑性ひずみ増分
(三軸伸張状態 $\alpha=90^\circ$)

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (6)$$

図-5 と図-6 から、同じ供試体に対して、三軸圧縮载荷と三軸伸張载荷により、類似した応力-ひずみ曲線が得られたが、同じ応力比に対し、三軸伸張の方がより大きな変形が生じている。

2.3 応力プローブ試験結果

応力プローブ試験は各応力プローブ方向に载荷・除荷を行い、回復部分として、弾性ひずみ増分、非回復部分として、塑性ひずみ増分が得られる。以下に、プローブ試験により得られた結果を弾性部分と塑性部分に分けて説明する。

(1) 図-7、図-8 に三軸圧縮、三軸伸張载荷状態から

出発するプローブ試験により得られた弾性ひずみ増分を示す。図の中の実線は等方線形弾性体としての理論値であり、プローブ結果とほぼ一致するため、用いた粒状材料モデルの弾性ひずみ増分は等方線形近似が可能である。

- (2) 図-9 は三軸圧縮状態において、側圧 2 成分に差を生じない基準プローブ面内での試験に対する塑性ひずみ増分を示す。塑性ひずみ増分はほぼ $\theta=90^\circ \sim 270^\circ$ の 180° の範囲で発生し、各プローブ载荷に対して、塑性ひずみ増分の結果がほぼ一直線上に分布し、ひずみ増分の方法はプローブ载荷の方向に依存せず、一定である。図-9 の結果は通常の弾塑性論における流動則に従うと考えられる。このメカニズムは側圧 2 成分に差を生じない三軸载荷により形成されたメカニズムと考えられ、基本メカニズムと呼ぶ。
- (3) 図-10 は三軸圧縮状態から出発し、基準プローブ面に垂直なプローブ面において行った試験に対する塑性ひずみ増分を示す。塑性ひずみ増分は $\theta=90^\circ \sim 270^\circ$ の 180° の範囲に限定されず、かなり広範囲に発生する。また、各プローブ载荷に対する塑性ひずみ増分の方法は一定でなく、プローブ载荷の方向に依存している。このように側圧 2 成分に差を生じるプローブ試験に対する塑性変形挙動は基本メカニズムのほかに付加的なメカニズムによる塑性変形を考慮する必要がある。
- (4) 図-11、図-12 に三軸伸張状態を出発点とするプローブ試験の結果を示す。それぞれ、図-9、図-10 と同様の考察を行うことが可能である。

3. マルチメカニズムを考慮した構成則の提案

3.1 構成則

Petryk¹⁰⁾によって提案されたマルチメカニズム構成則では塑性ひずみが複数のメカニズムに起因し、各メカニズムに対応する塑性ひずみの方向は応力速度の方向によらず一定であると仮定されている。本研究では主として三軸圧縮、伸張状態及びそれからの分岐した状態を対象としているので、構成則の定式化に当たっては、三軸応力状態に対応する基本メカニズムおよび応力プローブ载荷方向毎に定まる付加メカニズムの 2 種類のメカニズムを考慮することとする。付加メカニズムは応力プローブ载荷方向により異なるので、以下においては、ある応力プローブ载荷方向 K に対応する付加メカニズムに関連する量に添字 K を付して表すこととする。このとき、構成則は次式のようにおくことができる。

$$\dot{\epsilon} = C \cdot \sigma + \mu \dot{\gamma}_0 + t_K \dot{\gamma}_K \quad (7)$$

$$\dot{f}_0 = n \cdot \sigma - h_0 \dot{\gamma}_0 \quad (8)$$

$$\dot{f}_K = s \cdot \sigma - h_K \dot{\gamma}_K \quad (9)$$

ここに、

$\dot{\epsilon}$: ひずみ速度

C : コンプライアンス係数

σ : Cauchy 応力の Jaumann 微分

μ : 基本メカニズムの塑性ひずみ速度方向を表す単位テンソル(応力速度に依存しない)

t_K : 载荷方向 K に対応した付加メカニズムの塑性ひずみ速度方向を表す単位テンソル

s : 応力速度 σ の方向を表す単位テンソル

f_0 : 基本メカニズムの負荷関数

f_K : 载荷方向 K に対応した付加メカニズムの負荷関数

n : 負荷関数 $f_0=0$ の現在の応力点における外向き法線の方向を表す単位テンソル

h_0 : 基本メカニズムの硬化係数

h_K : 载荷方向 K に対応した付加メカニズムの硬化係数

$\dot{\gamma}_0$: 基本メカニズムの塑性ひずみ速度の大きさ

$\dot{\gamma}_K$: 载荷方向 K に対応した付加メカニズムの塑性ひずみ速度の大きさ

本研究では L 番目のメカニズムの進展関数 f_L は負荷関数 f_L の時間微分として定義される。 L 番目のメカニズムがアクティブになり、塑性ひずみが生じるとき、進展関数 f_L は

$$\dot{f}_L = 0 \quad (10)$$

を満たす。一方塑性ひずみは生じないとき、

$$\dot{\gamma}_L = 0, \quad \dot{f}_L < 0 \quad (11)$$

である。ゆえに、一般に次式が成立する。

$$\dot{\gamma}_L \dot{f}_L = 0 \quad (12)$$

式(8)、(9)はそれぞれ基本メカニズム、付加メカニズムの進展関数である。式(12)により、塑性ひずみ速度の大きさ $\dot{\gamma}_L$ が求まる。

3.2 基本メカニズム

塑性変形の主要部分は三軸圧縮または三軸伸張载荷に伴って形成される基本メカニズムにより生じると考えられる。基本メカニズムは古典的な非関連流動則に従うものであり、プローブ試験を行う全てのプローブ面で常にアクティブであると仮定する。また、基本メカニズムが付加メカニズムから受ける影

響は小さく、無視することができると考えられる。

基準プローブ面内では付加メカニズムは働かず基本メカニズムのみがアクティブなので、基準プローブ面内でのプローブ試験により、基本メカニズムの特性を表すパラメータが決定される。基本メカニズムにより生じる塑性ひずみ速度は次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_0^p = \mu \dot{\gamma}_0 \quad (13)$$

基本メカニズムの塑性ひずみ速度方向を表す単位テンソル μ は応力速度に依存せず、応力状態によって決定されるものである。

3.3 付加メカニズム

基本メカニズムにより説明できない材料の弾塑性変形は付加メカニズムにより生じたものとする。付加メカニズムは三軸圧縮または三軸伸張载荷の方向にずれる方向の载荷により形成されと考えられる。ここではある载荷方向に対しては、その方向特有の1つの付加メカニズムに支配されると仮定する。また、この付加メカニズムは各々の降伏面に基づく流動則に従うものとする。したがって、付加メカニズムは载荷方向に依存することになり、プローブ方向全体として増分非線形的な挙動を示すことになる。

载荷方向 K に対応した付加メカニズムにより生じる塑性ひずみ速度は次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_K^p = t_K \dot{\gamma}_K \quad (14)$$

一般的に付加メカニズムにより生じる塑性ひずみ速度の大きさは基本メカニズムにより生じるものより小さいと考えられる。また、载荷方向に新たに発生する付加メカニズムは既に発生した基本メカニズムに大きな影響を受けると考えられる。プローブ試験の結果によると、载荷方向 K に対応した付加メカニズムにより生じる塑性ひずみ速度の方向を示す単位テンソル t_K は応力速度の方向 s と基本メカニズムの塑性ひずみ速度の方向テンソル μ により次のように仮定することができる。

$$t_K = \frac{s + \lambda \mu}{|s + \lambda \mu|} \quad (15)$$

ここに、 λ は基本メカニズムが付加メカニズムへの影響係数であり、载荷方向により定まるスカラー量である。

4. 三軸圧縮状態下の構成則

前節で提案した構成則は側圧一定の三軸载荷を受けた粒状体の分岐载荷に対する変形挙動を予測するためのものである。ここでは三軸圧縮状態に対する

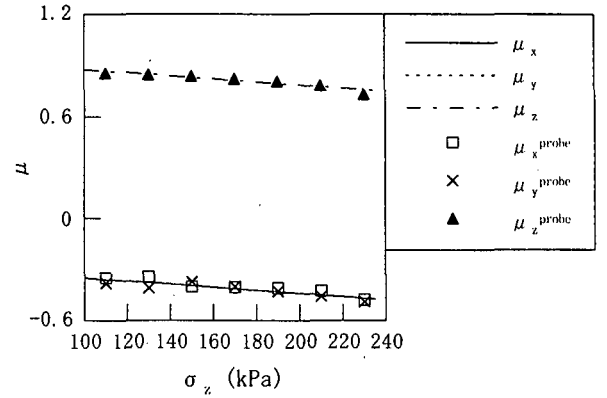


図-13 三軸圧縮状態下の μ

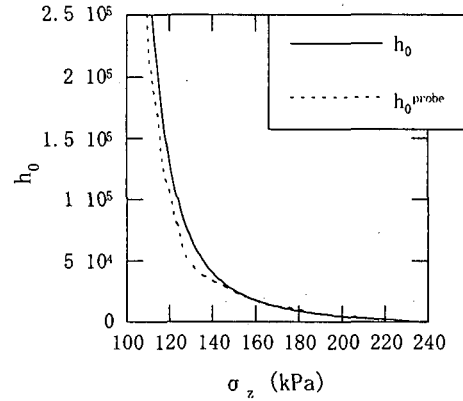


図-14 三軸圧縮状態下の h_0

一連のプローブ試験を通じて、構成則の各パラメータを定める。

4.1 三軸圧縮状態下の基本メカニズム

基準プローブ面内でのプローブ試験により、各応力点における基本メカニズムにより生じた塑性ひずみ速度の単位方向テンソル μ と大きさ $\dot{\gamma}_0$ が求まる。図-13 に μ の成分の算定結果を示す。これより、 μ と軸応力 σ_z との間に次の関係が得られる。

$$\begin{cases} \mu_x = -0.35 - 9 \times 10^{-4} (\sigma_z - 100) \\ \mu_y = \mu_x \\ \mu_z = 0.875 - 9 \times 10^{-4} (\sigma_z - 100) \end{cases} \quad (16)$$

また、式(8)の硬化係数 h_0 は図-14 に示したように変化する。これより、 h_0 は次式の近似関数で表すことができる。

$$h_0 = \frac{5000}{\left(\frac{\sigma_z - 100}{120} \right)^2 + 0.01} - 25 \times (\sigma_z - 100) \quad (17)$$

4.2 三軸圧縮状態下の付加メカニズム

基準プローブ面内においては基本メカニズムのみがアクティブであるが、その他の面においては付加メカニズムが考慮されることになる。

基本メカニズムは降伏条件が満たされない場合に

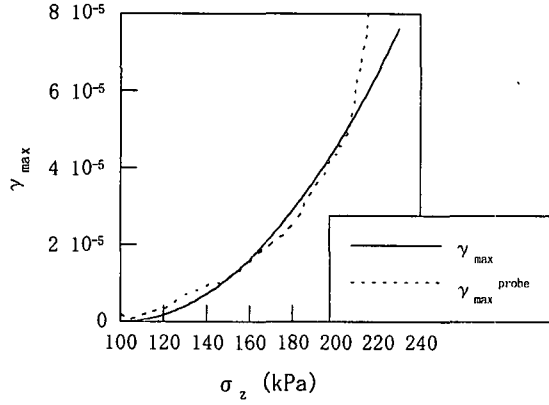


図-15 三軸圧縮状態下の $\gamma_{\max}$

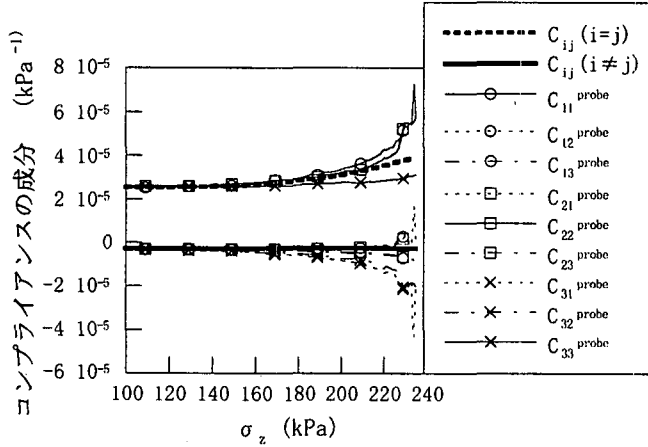


図-16 三軸圧縮状態下のコンプライアンス

においても、付加メカニズムに影響を与える。式(15)における基本メカニズムの付加メカニズムへの影響係数 λ を次式のように仮定する。

$$\lambda = \begin{cases} a & \theta \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ a - b \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \theta \in (90^\circ, 270^\circ) \end{cases} \quad (18)$$

ここに、 θ は図-4 に示すにプローブ面内の载荷方向を表す角度である。 a 、 b は材料定数であり、用いたモデルに対して、 $a = 2.3$ 、 $b = a + 0.9$ となる。

また、付加メカニズムの硬化係数 h_K は载荷方向に依存し、式(9)から h_K は次式で与えられる。

$$h_K = \frac{\nabla \cdot \sigma}{\dot{\gamma}_K^a \sin^2 \alpha + d} \quad (19)$$

ここに、 $\dot{\gamma}_K^a$ を次のように仮定する。

$$\dot{\gamma}_K^a = \begin{cases} \frac{16}{81} \left(\frac{\theta}{60}\right)^3 \times \gamma_{\max} & \theta \in [0^\circ, 90^\circ] \\ \frac{\gamma_{\max}}{3} (1 - \cos 2\theta) & \theta \in (90^\circ, 270^\circ) \\ \frac{16}{81} \left(\frac{360 - \theta}{60}\right)^3 \times \gamma_{\max} & \theta \in [270^\circ, 360^\circ] \end{cases} \quad (20)$$

ただし、 $\gamma_{\max}$ は応力状態により定まる材料定数であり、本研究ではプローブ試験から求めた付加メカニズムにより生じる塑性ひずみ速度の大きさの最大値とする。三軸圧縮状態において、各応力点での $\gamma_{\max}$ は図-15 に示されている。この結果に基づき、 $\gamma_{\max}$ は応力状態を表す軸応力 σ_z により、次のような近似関数で表すことができる。

$$\gamma_{\max} = 4.5 \times 10^{-5} \left(\frac{\sigma_z - 100}{100} \right)^2 \quad (21)$$

4.3 三軸圧縮状態下のコンプライアンス

粒状材料の弾性係数は3つの独立したプローブ面内のプローブ試験により定めることができる。図-16 は三軸圧縮状態下のコンプライアンスの結果を示す。この結果により载荷につれて粒状体の誘導異方性が現れるが、応力のピークに近いところを除けば、誘導異方性の影響は顕著ではないので、ここでは三軸圧縮状態下の弾性変形部分を等方線形弾性体として扱うこととする。プローブ試験結果から三軸圧縮载荷下の粒状体のコンプライアンスを次式で近似する。

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 \times 10^{-5} \times \left(\frac{\sigma_z - 100}{120} \right)^3 + 2.53 \times 10^{-5} & (i = j) \\ 3 \times 10^{-9} \times (\sigma_z - 100) - 3 \times 10^{-6} & (i \neq j) \end{cases} \quad (22)$$

4.4 三軸圧縮状態下の構成則の検証

図-17、図-18、図-19 はそれぞれ三軸圧縮状態に対して提案した構成則により算出した弾性ひずみ増分、塑性ひずみ増分及び全ひずみ増分 (cal と表示) とプローブ結果 (probe と表示) の比較図である。これらの比較図から、提案した構成則は粒状体の三軸圧縮状態の変形挙動をよく表していると言える。

5. 三軸伸張状態下の構成則

三軸圧縮状態の構成則の定式化と同じ手法で三軸伸張状態に対する構成則の各パラメータを定めることができる。

5.1 三軸伸張状態下の基本メカニズム

図-20 は三軸伸張状態下の基準プローブ面内でのプローブ試験により、各応力点での基本メカニズムにより生じた塑性ひずみ速度の単位方向テンソル μ の結果を示している。この結果から、 μ は応力状態を表す軸応力 σ_z との間に次の関係が得られる。

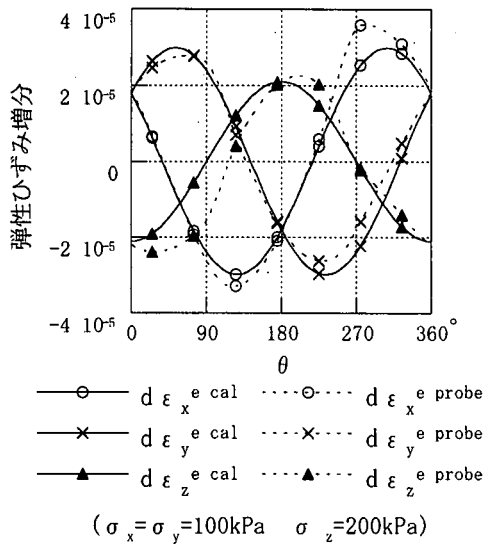


図-17 三軸圧縮状態下の弾性ひずみ増分の理論値と試験値の比較図($\alpha=90^\circ$)

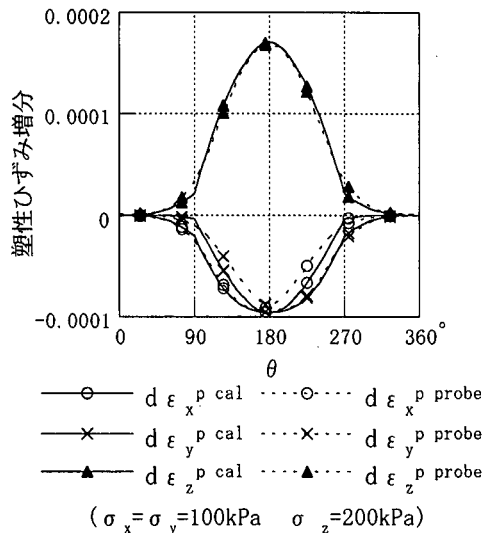


図-18 三軸圧縮状態下の塑性ひずみ増分の理論値と試験値の比較図($\alpha=90^\circ$)

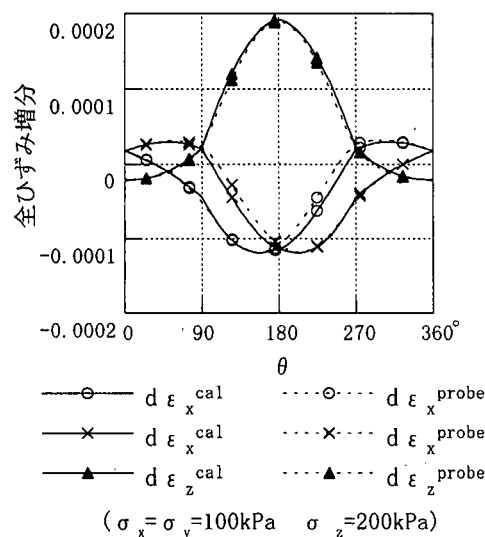


図-19 三軸圧縮状態下の全ひずみ増分の理論値と試験値の比較図($\alpha=90^\circ$)

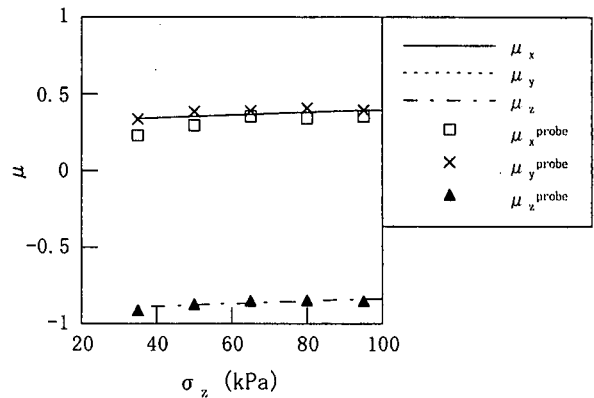


図-20 三軸伸張状態下の μ

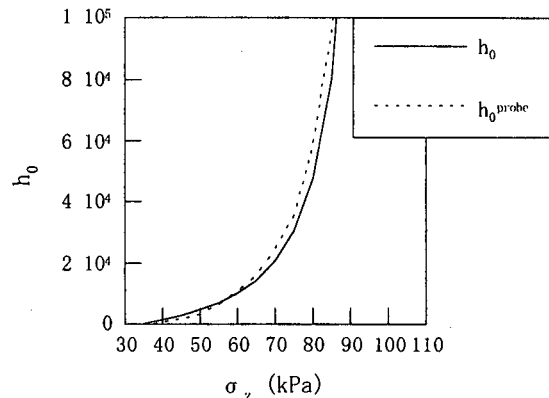


図-21 三軸伸張状態下の h_0

$$\begin{cases} \mu_x = 0.40 - 9 \times 10^{-4} (100 - \sigma_z) \\ \mu_y = \mu_x \\ \mu_z = -0.83 - 9 \times 10^{-4} (100 - \sigma_z) \end{cases} \quad (23)$$

また、式(8)より硬化係数 h_0 は図-21に示した結果を得た。この結果により、硬化係数 h_0 は次式で表すことができる。

$$h_0 = \frac{1700}{\left(\frac{100 - \sigma_z}{112}\right)^2 + 0.003} - 80 \times (100 - \sigma_z) + 400 \quad (24)$$

5.2 三軸伸張状態下の付加メカニズム

三軸伸張状態下の付加メカニズムの影響係数 λ は三軸圧縮状態下の影響係数 λ と同じように式(18)に示す。三軸伸張状態下の付加メカニズムの硬化係数 h_K も式(19)及び式(20)に示す。

しかし、三軸圧縮状態の $\gamma_{\max}$ に異なり、三軸伸張状態において、各応力点での $\gamma_{\max}$ は図-22に示しているため、式(20)の定数 $\gamma_{\max}$ は次式で与えられる。

$$\gamma_{\max} = 5 \times 10^{-5} \left(\frac{100 - \sigma_z}{50} \right)^3 + 1.65 \times 10^{-6} \quad (25)$$

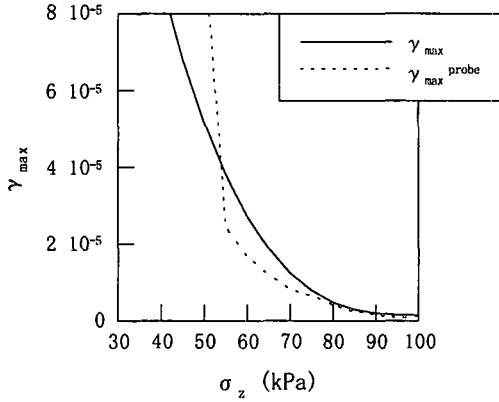


図-22 三軸伸張状態下の $\gamma_{\max}$

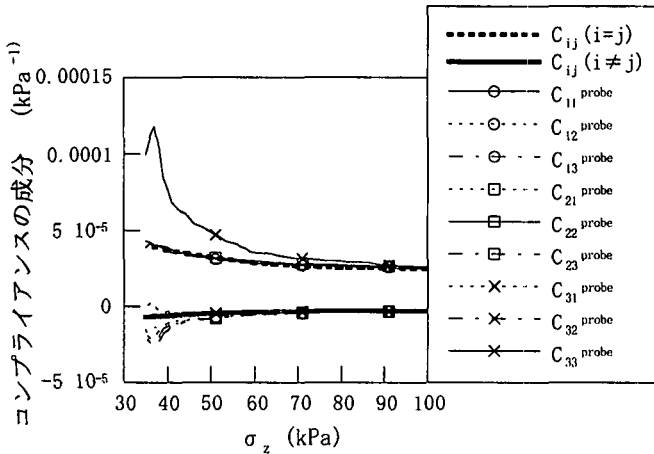


図-23 三軸伸張状態下のコンプライアンス

5.3 三軸伸張状態下のコンプライアンス

三軸伸張状態下の粒状材料の弾性係数も3つの独立したプローブ面内のプローブ試験により定まる。図-23 は三軸伸張状態下のコンプライアンスの結果を示す。この結果により、三軸圧縮状態と同じように、载荷につれて粒状体の誘導異方性が現れる。三軸圧縮状態に比べると、コンプライアンス係数のばらつきはやや大きいため、三軸伸張状態において、誘導異方性がやや顕著に現れると考えられる。しかし、応力のピークに近いところを除けば、誘導異方性の影響は顕著ではないので、三軸伸張状態下の弾性変形部分も等方線形弾性体として扱うこととする。プローブ試験結果から三軸伸張状態下の粒状体のコンプライアンスは次式で与えられる。

$$C_{ij} = \begin{cases} 9.6 \times 10^{-5} \times \left(\frac{100 - \sigma_z}{120} \right)^3 + 2.53 \times 10^{-5} & (i = j) \\ -2.56 \times 10^{-5} \times \left(\frac{100 - \sigma_z}{120} \right)^3 - 3 \times 10^{-6} & (i \neq j) \end{cases} \quad (26)$$

5.4 三軸伸張状態下の構成則の検証

図-24、図-25、図-26 はそれぞれ三軸伸張状態に

対して提案した構成則により算出した弾性ひずみ増分、塑性ひずみ増分及び全ひずみ増分とプローブ結果の比較図である。これらの比較図から、提案した構成則は、粒状体の三軸伸張状態に関してもその変形挙動もよく表していると言える。

6. 変位速度場での不連続面についての安定解析

Vardoulakis¹¹⁾は増分非線形性を伴わない構成則に基づいて、円柱砂供試体の軸対称不安定現象の解析を行った。ここでは採用し得るせん断剛性を本研究で提案した構成則のもとに検討し、考察を行う。

不安定現象を解析する際に、基本解以外の分岐解は円柱座標系で次のつり合い式を満たす。

$$\dot{\pi}_{ij|j} = 0 \quad (27)$$

ここに、 $\dot{\pi}_{ij}$ は第1 PK 応力速度であり、 $(\bullet)_{|j}$ は共変微分を意味する。

速度場 $v_i(x)$ に対して、軸対称の不連続面が生じた場合、これらの面を横切るとき発生する速度のジャンプ量は次式のように表すことができる。

$$\langle v_{(i|j)} \rangle = g_i v_j \quad (28)$$

ここに、 $\langle \bullet \rangle$ は不連続面を挟んだジャンプ量を表す。

v_j は不連続面上の単位ベクトルである。

軸対称の幾何学条件により、

$$g_\theta = v_\theta = 0 \quad (29)$$

が得られる。

分岐解を求める際に構成則は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \sigma_{rr} &= (1 \mp \sin \phi_\sigma) p + \mu_m (\dot{\epsilon}_{rr} - \dot{\epsilon}_{\theta\theta}) - \mu_l \dot{\epsilon}_{zz} \\ \nabla \sigma_{zz} &= (1 \pm 2 \sin \phi_\sigma) p + 2\mu_l \dot{\epsilon}_{zz} \\ \nabla \sigma_{rr} - \nabla \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu_m (\dot{\epsilon}_{rr} - \dot{\epsilon}_{\theta\theta}) \\ \nabla \sigma_{rz} &= 2\mu_m \dot{\epsilon}_{rz} \end{aligned} \quad (30)$$

上下の記号がある場合、上の符号は三軸圧縮载荷、下の符号は三軸伸張载荷に適用する。

式(30)の中のせん断係数 μ_m はプローブ方向毎に式(7)により次のように求まる。

$$\mu_m = \frac{\sqrt{\nabla s_{kl} \nabla s_{kl}}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}}} \quad (31)$$

ここに、 s_{kl} は応力速度の偏差成分であり、 $\dot{\epsilon}_{kl}$ は

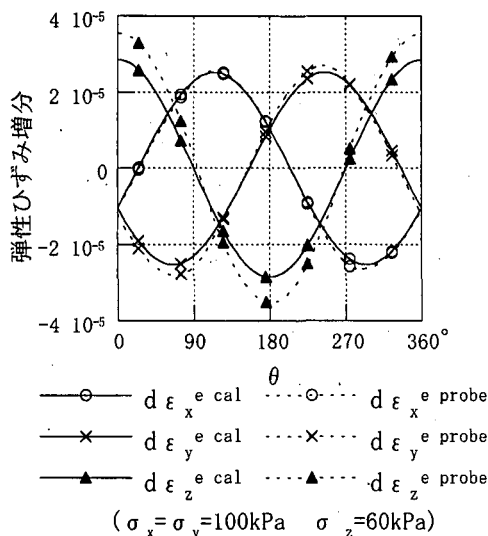


図-24 三軸伸張状態下の弾性ひずみ増分の理論値と試験値の比較図($\alpha=90^\circ$)

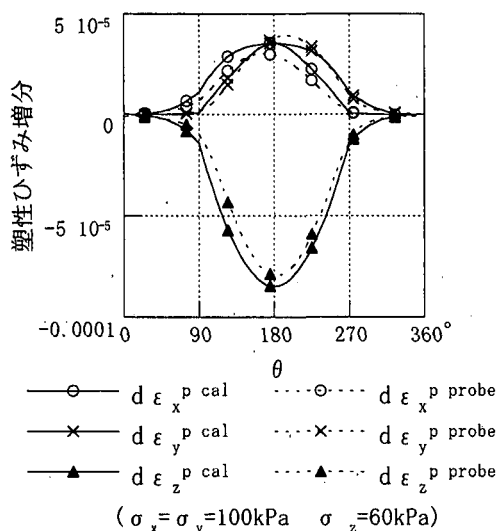


図-25 三軸伸張状態下の塑性ひずみ増分の理論値と試験値の比較図($\alpha=90^\circ$)

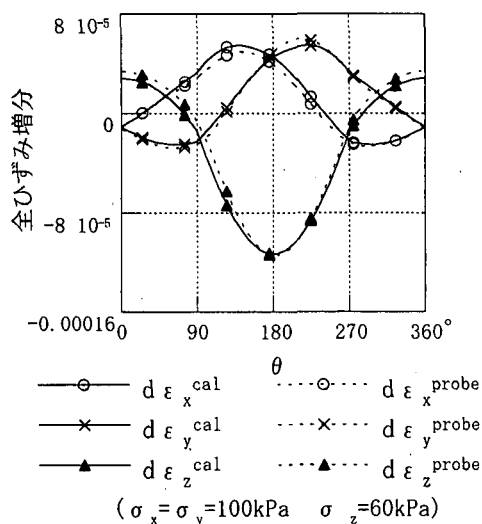


図-26 三軸伸張状態下の全ひずみ増分の理論値と試験値の比較図($\alpha=90^\circ$)

ひずみ速度の偏差成分である。

また、粒状体のような材料はダイレイタンスの影響を考慮する必要があるため、その影響を次式のように表す。

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\frac{1}{\delta^2}(\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}) \quad (32)$$

ここに、 δ はダイレイタンスの影響係数である。

式(28)、式(29)を式(32)に代入して、整理すると

$$g_r v_r = -\delta^2 g_z v_z \quad (33)$$

が得られる。

不連続面の境界で次の力学連続条件が満たされる。

$$\langle \pi_{ij} \rangle \cdot v_j = 0 \quad (34)$$

式(33)及び構成式(30)を境界連続条件の式(34)に代入して、仮定した速度分岐解について、次の特性方程式が得られる。

$$\chi^4 + A\chi^2 + B = 0 \quad (35)$$

ここに、

$$\chi = \frac{v_r}{v_z} \quad (36)$$

$$A = \frac{a_0 \frac{t}{\mu_m} + a_1}{1 + \frac{t}{\mu_m}}, \quad B = \frac{\zeta^2 \delta^2 \left(1 - \frac{t}{\mu_m}\right)}{1 + \frac{t}{\mu_m}} \quad (37)$$

ただし、

$$t = \pm(\sigma_z - 100)/2$$

$$a_0 = -\zeta^2 + \delta^2 \pm ah_t, \quad a = \frac{(2 + \delta^2)(2 + \zeta^2)}{3 \sin \phi_\sigma}$$

$$a_1 = -\zeta^2 - \delta^2 + \zeta^2 \delta^2, \quad \zeta^2 = \frac{\sigma_z}{\sigma_r}$$

$$h_t = \frac{d \sin \phi_\sigma}{dg}, \quad \sin \phi_\sigma = \left| \frac{\sigma_z - \sigma_r}{\sigma_z + 2\sigma_r} \right|, \quad g = |e_z - e_r| \quad (38)$$

特性方程式の解 χ について4つの領域に分ける。

(1) EC(複素数の楕円型): $D_0 < 0$

特性方程式(35)は4つの複素数の解をもつ。

(2) EI(虚数の楕円型): $A > 0, B > 0, D_0 > 0$

特性方程式(35)は4つの虚数の解をもつ。

(3) P(放物型): $B < 0, D_0 > 0$

特性方程式(35)は2つの虚数の解があり、残り2つの実数解である。

(4) H(双曲型): $A < 0, B > 0, D_0 > 0$

特性方程式(35)は4つの実数の解をもつ。

ここに、係数 D_0 を次式に定義する。

$$D_0 = A^2 - 4B \quad (39)$$

χ は P と H の領域にあれば、実数の解があり、不連続面が生じ得る。図-27 と図-28 はそれぞれ三軸圧縮状態と三軸伸張状態で、本研究の供試体についての解析結果である。図の中の EC/EI, EC/H, EI/P, H/P はそれぞれ、特性方程式の解の領域 EC と EI, EC と H, EI と P, H と P の境界線を意味する。Vardoulakis の解析は増分非線形性を考慮しないが、増分非線形性を考慮した場合、とくに降伏曲面に接する方向における付加メカニズムによる剛性の低下を期待することができる。そこで、本文で求めた剛性を式(30)の構成則中の定数に代入する簡易的な安定解析を行った。その結果、せん断係数 μ_m を基本メカニズムが支配的ではない方向の値とした場合においても、供試体が耐力を失うまで、十分大きい値を保つ結果となり、三軸圧縮状態と三軸伸張状態とともに不連続面が生じない結果となった。また、図中の細い実線はせん断係数 μ_m をそれぞれ 1/200 と 1/180 とした結果であり、せん断係数 μ_m により、はるかに小さい値を用いなければ、分岐が起こらないことが示されている。

7. 結 論

本論文では基本メカニズムと付加メカニズムの2種類のメカニズムにより、粒状材料の変形挙動をよく説明できることを示した。安定性の検討においては、提案した増分非線形的な構成則を用いることによりせん断剛性を低下させたとしても変位速度場の軸対称の不連続面を仮定する限りにおいては文献¹¹⁾にあるような不安定現象は生じないことを示した。今後提案した増分非線形的な弾塑性構成則を利用して、より一般的な場を想定して検討を行うとともに、増分非線形構成則に対する一般的不安定解析法の研究を進める予定である。

参考文献

- 1) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，No.406/III-11, pp.97-106, 1989.
- 2) Kishino, Y., Akaizawa, H. and Kaneko K.: On the plastic flow of granular materials, *Powers and Grains 2001*(ed. Y.Kishino), pp.199-202, 2001.
- 3) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.

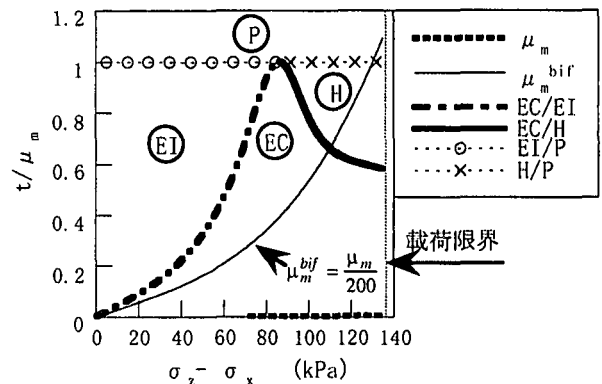


図-27 三軸圧縮载荷下の安定解析

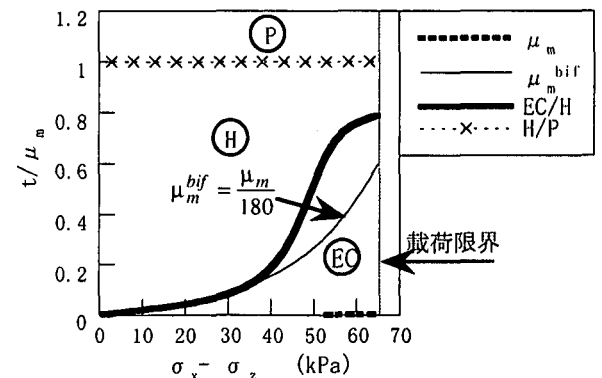


図-28 三軸伸張载荷下の安定解析

- 4) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S.: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, Vol.17, pp.117-145, 2001.
- 5) Kolymbas, D. ed.: *Constitutive Modelling of Granular Materials*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- 6) Darve, F., Flavigny, E. and Meghachou, M.: Yield surfaces and principle of superposition: revisit through incrementally non-linear constitutive relations, *Int. J. Plasticity*, Vol.11, pp.927-948, 1995.
- 7) 石井建樹，金子賢治，岸野佑次：粒状体の塑性変形メカニズムに関する微視力学的考察，土木学会論文集，No.722/III-61, pp.289-302, 2002.
- 8) Vermeer, P. A.: A double hardening model for sand, *Geotechnique*, Vol.28, No.4, pp.413-433, 1978.
- 9) Mandel, J.: generalisation de la theorie de plasticite de W. T. Koiter., *Int. J. Solids Structures*, Vol.1, 273-295, 1965.
- 10) Petryk, H.: General conditions for uniqueness in materials with multiple mechanics of inelastic deformation, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.48, pp.367-396, 2000.
- 11) Vardoulakis, I.: Rigid granular plasticity model and bifurcation in the triaxial test, *Acta Mechanica*, Vol.49, pp.57-79, 1983.

(2003年4月18日受付)