

平面ひずみ非排水伸張試験を対象とした中間土の分岐解析

Bifurcation Analysis of Intermediate Soil under Plane Strain Undrained Extension Loading

志比利秀*・亀井健史**・西開地一志***・矢富盟祥****

Toshihide SHIBI, Takeshi KAMEI, Kazushi NISHIKAICHI and Chikayoshi YATOMI

*正会員 博(工) 島根大学助手 総合理工学部地球資源環境学科 (〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060)

**正会員 工博 島根大学助教授 総合理工学部地球資源環境学科 (〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060)

***ジェエスアイ(株) (〒310-0805 茨城県水戸市中央 2 丁目 8-37)

****正会員 Ph. D. 金沢大学大学院教授 自然科学研究科地球環境科学専攻 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2 丁目 40-20)

This paper presents a bifurcation analysis of intermediate soil under plane strain undrained extension loading. The influence of soil parameters on results of bifurcation analysis of cohesive soils was also examined. The soil parameters can easily be determined from plasticity index, and the method is adaptable to many types of soil. Constitutive equations of soil are applied for a coaxial and a non-coaxial Cam-clay model. A value of the non-coaxial parameter applicable for various plasticity indices was assumed based on theory of shear band formation. The results indicate that the bifurcation stress ratio of the intermediate soil was larger than those with higher plasticity indices. Post-bifurcation slip surfaces were predicted from distributions of maximum shear strain and stress states at the onset of bifurcation. The difference of plasticity index did not affect the shape of the predicted slip surfaces.

Key words: bifurcation, extension, intermediate soil, non-coaxial, plasticity index, slip surface

1. はじめに

軟弱粘性土層が厚く堆積している地盤の開削に着目すると、背面地盤は掘削に伴い水平応力が解放されることから主働域となる。その結果、背面地盤は掘削領域側へとはらみ出し、その周辺地盤は沈下する。一方、掘削底面では、鉛直応力の開放に伴い受働域となり、盤膨れが発生する。その両者の変形は、連動しており、地盤の破壊に大きな影響を及ぼしている。したがって、地盤の変形・破壊現象を考える場合には、主働域と受働域の両方の状態での強度・変形特性を考慮する必要がある。

一般に粘性土のせん断強さは、一軸圧縮試験などの要素試験から求められる。その場合、载荷の初期から最大荷重に至るまでの間、粘性土供試体は均一な変形が保たれているものと仮定している。実際、载荷荷重が小さな範囲では、供試体は、円柱形状を維持しながら変形する。しかしながら、载荷荷重が最大値近傍に達すると、供試体は円柱形状を維持することが困難となり、棒の座屈や樽型に膨らむような形状となる場合が多く認められる。このような場合には、供試体内のひずみは非均一な状態となり、いわゆるひずみの局所化が発生する。最終的に、载荷荷重のピーク値を経た後、供試体表面にすべり面が認められる。したがって、地盤材料の変形・破壊現象は、

均一変形挙動から非均一変形挙動を経て、最終的に破壊へと至ることがわかる。このことから、均一変形挙動から非均一変形挙動へと遷移する点に着目する場合には、破壊時に着目する場合と比較して、地盤変形挙動をより安全に評価できるものと考えられる。

载荷に伴って地盤材料が均一変形から非均一変形へと遷移するときの荷重を求める解析手法として、有限変形理論に基づいた分岐解析^{1)~5)}がある。また、この分岐解析から得られる非均一変形時の最大せん断ひずみや種々の応力状態量の分布を用いることにより、すべり面が発生しやすい位置やその形状を予測することが可能である。平面ひずみ非排水条件下では、圧縮载荷に着目すると、低塑性($I_p = 10$)から高塑性($I_p = 50$)にいたる種々の粘性土に対して分岐解析が行われており、土質定数の違いがその結果に及ぼす影響が明らかになっている³⁾。一方、伸張载荷の場合にも、 $20 \leq I_p \leq 60$ の範囲においては、分岐解析結果に及ぼす土質定数の影響は検討されているが⁵⁾、実務においてよく問題となる中間土^{6), 7)}と呼ばれるような低塑性土($I_p \leq 15$)を対象とした分岐解析は行われていない。ここで、中間土とは、砂含有量が 50~80%で塑性指数 I_p が NP~25 までの土を示している⁷⁾。一般的に中間土と粘土の両者をあわせて粘性土と呼んでいる。

本研究では、粘性土の中でもとくに、その工学的取扱

い方が困難な中間土 ($I_p = 10$) を対象として平面ひずみ非排水伸張条件下で分岐解析を行った。さらに、塑性指数の違いが分岐解析結果に及ぼす影響についても明らかにしている。なお、粘性土の構成式として、有限変形に拡張された Cam-clay モデルと非共軸 Cam-clay モデル⁸⁾を用いた。また、非共軸 Cam-clay モデルを用いる場合には、せん断帯形成理論⁸⁾に基づいて、非共軸パラメータの値の検討も行った。さらに、分岐後の供試体内の最大せん断ひずみおよび種々の応力状態量から予測されるすべり面の発生位置およびその形態に及ぼす塑性指数の影響についても考察した。

2. 有限変形 Cam-clay モデル

本研究では、粘性土の構成式として、有限変形に拡張された Cam-clay モデルとそのモデルに非共軸項を付加した非共軸 Cam-clay モデル⁸⁾を用いる。なお、前者は、後者と比較して、共軸 Cam-clay モデルと呼ばれる。

本解析では、粘性土の非排水せん断強さが排水せん断強さより小さいことや粘性土地盤の透水性が一般的に低いことなどを考慮し、非排水条件下 ($D_{ij} = 0$) での粘性土の強度・変形特性に着目する。その場合、有限変形に拡張された Cam-clay モデルの降伏関数 f は、次式で表される。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p'}{p'_0} + D\eta - v^p = 0 \quad (1)$$

ここで、 p' と p'_0 はそれぞれ平均有効主応力と先行圧密圧力であり、 η は p' と一般化された偏差応力 q の比を、 v^p は塑性体積ひずみを表している。また、 λ と κ はそれぞれ自然対数表示による圧縮指数と膨潤指数を表しており、 e_0 は初期間隙比を、 D はダイレイタンシー係数を表す。なお、有限変形理論を用いることから、 p' と q はそれぞれ次式で定義される。

$$p' = -\frac{1}{3} T'_{ii}, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} S'_{ij} S'_{ij}} \quad (2)$$

ここで、 T'_{ij} は有効 Cauchy 応力であり、 S'_{ij} は T'_{ij} の偏差成分を表している。

共軸モデルの場合には、変形速度 D_{ij} の塑性成分 D^{p}_{ij} は、この降伏関数 f に対して、関連流れ則を適用することにより得られる。なお、 D^{p*}_{ij} は D^{p}_{ij} の偏差成分を表している。

$$2D^{p*}_{ij} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} \left(\frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} T'_{kl} - \frac{1}{3} \bar{\beta} T'_{kk} \right) \quad (3)$$

$$D^{p*}_{kk} = -\frac{\bar{\beta}}{h} \left(\frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} T'_{kl} - \frac{1}{3} \bar{\beta} T'_{kk} \right) \quad (4)$$

ここで、 $\dot{T}'_{ij}$ は有効 Cauchy 応力の共回転速度を表しており、 $\bar{\tau} = \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 2}$ である。限界状態での応力比を M と表

表-1 本解析に用いた土質定数決定法^{6), 9), 10)}

$\lambda = 0.02 + 0.0045 I_p$
$\kappa = 0.00084 (I_p - 4.6)$
$v_0 = 1.517 + 0.019 I_p \quad (= 1 + e \text{ at } p' = 98 \text{ kN/m}^2)$
$M_c = 1.65$
$M_c = 1.385 - 0.00505 I_p$
$D = 0.00082 I_p + 0.0159$

すと、 $\bar{\beta} = (M - \eta) / \sqrt{3}$ は限界状態への隣接度を表す関数であり、 $h = (\bar{\beta} / \sqrt{3} D) p'$ は硬化係数を表す。

とくに、粘性土の変形挙動を平面ひずみ状態 ($D_{33} = 0$) に限定する場合 (すなわち、 $D_{11} + D_{22} = 0$) には、有限変形共軸 Cam-clay モデルの構成式は、次式で表すことができる。

$$\dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} = 2\mu^* (D_{11} - D_{22}) \quad (5)$$

$$\dot{T}'_{12} = 2\mu D_{12}$$

$$\mu^* = \frac{\tilde{G}h}{\tilde{G} + h}, \quad \mu = \tilde{G} \quad (6)$$

ここで、 μ^* と μ は、それぞれ 45° せん断と単純せん断でのせん断係数である。

一方、非共軸モデルの場合には、変形速度の塑性成分は、応力速度の影響を考慮した項 (非共軸項) を付加することにより得られる。この場合、 D^{p*}_{kk} は共軸モデルと同様の式となるが、 D^{p*}_{ij} は次式によって表現される。

$$2D^{p*}_{ij} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} \left(\frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} T'_{kl} - \frac{1}{3} \bar{\beta} T'_{kk} \right) + \frac{1}{h_1} \left(\dot{S}_{ij} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{2\bar{\tau}^2} \dot{S}_{kl} \right) \quad (7)$$

ここで、 $h_1 = (\bar{\beta} / \sqrt{3} A) p'$ は第2硬化係数を表す。また、 A は非共軸パラメータと呼ばれ、非共軸性の程度を表している。 A の増加に伴い非共軸性の程度が大きくなる。一方、 A の減少に伴い非共軸性の程度も減少し、 $A = 0$ の場合には、非共軸モデルと共軸モデルは一致する。

とくに平面ひずみ非排水条件下では、有限変形非共軸 Cam-clay モデルの構成式は、式(6)を以下のように置き換えることで表現できる。

$$\mu^* = \frac{\tilde{G}h}{\tilde{G} + h}, \quad \mu = \frac{\tilde{G}h_1}{\tilde{G} + h_1} \quad (8)$$

平面ひずみ非排水伸張せん断時の平均有効主応力 p' 、偏差応力 q および応力比 η の時間増分は、共軸モデルと非共軸モデルの違いによらず、以下の式で与えられる⁴⁾。

$$\dot{p}' = -\frac{\tilde{G}\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G} + h} (D_{22} - D_{11}) \quad (9)$$

$$\dot{q} = \frac{\sqrt{3}\tilde{G}h}{\tilde{G} + h} (D_{22} - D_{11}) \quad (10)$$

$$\dot{\eta} = \frac{\sqrt{3}h + \eta\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G} + h} \tilde{G}_0 (D_{22} - D_{11}) \quad (11)$$

また、間隙水圧の時間増分は次式で与えられる⁴⁾。

表-2 本解析に用いた土質定数

PI	λ	κ	ν	M_e	v_0	D
10	0.065	0.005	0.333	1.335	1.707	0.0241
30	0.155	0.021	0.333	1.234	2.087	0.0405
50	0.245	0.038	0.333	1.133	2.467	0.0569

$$\dot{u} = \frac{\tilde{G}(\tilde{K}\tilde{\beta} - \tilde{h})}{\tilde{G} + \tilde{h}}(D_{22} - D_{11}) \quad (12)$$

本研究に用いる土質定数は、広範な土の種類への適応性と定数決定の簡便性という観点から、塑性指数 I_p を用いて決定した。その決定法^{6), 9), 10)}を表-1に示す。なお、 v_0 は正規圧密曲線上において $p' = 98\text{kN/m}^2$ のときの比体積 $(1+e)$ を表しており、この値を初期比体積 $(1+e_0)$ とする。また、 M_e と M_c は、それぞれ圧縮領域と伸張領域における限界状態での応力比を表しており、これらの値を M として用いることとする。この決定法から得られた土質定数を用いた解析結果は、要素試験^{10)~13)}（三軸試験）、モデル実験^{6), 12)}（遠心載荷実験）や実地盤の変形挙動^{14), 15)}を非常によく表現できることが実証されている。ポアソン比 ν の値は、正規圧密状態の自然地盤の静止土圧係数 K_0 が 0.5 程度であること¹⁶⁾と弾性解を考慮して $\nu = 0.333$ （一定）と仮定した。

なお、本解析では、 $I_p = 10$ の低塑性土（いわゆる、中間土）と $I_p = 30, 50$ の高塑性土を対象とする。それぞれの I_p に対する土質定数を表-2に示す。

3. 非共軸パラメータとせん断帯形成理論

非共軸パラメータ A の値を実験的に明らかにするためには、種々の応力条件下で供試体に単純せん断変形を与え、そのときの応力状態と塑性ひずみの増分を求める必要がある。現在までのところ、非共軸性を詳細かつ正確に検討した定量的な実験は、ほとんど認められない。そこで、有限変形理論によるせん断帯形成理論⁸⁾に基づいて、種々の粘性土に対する非共軸パラメータ A の値を検討する。

平面ひずみ非排水条件下での準静的なせん断帯の形成に関する議論は、材料の構成関係と増分釣合式に基づいて行われる。増分釣合式は、平面ひずみ非排水条件下であることを考慮すると、次式によって表現される。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11,1} + \dot{T}_{12,2} - \dot{u}_1 &= 0 \\ \dot{T}_{21,1} + \dot{T}_{22,2} - \dot{u}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

また、平面ひずみ非排水条件を仮定する場合には、速度場は流れ関数を用いて次式のように表現できる。

$$v_1 = \psi_2, \quad v_2 = -\psi_1 \quad (14)$$

このとき、流れ関数に関する支配方程式は、式(5)と式

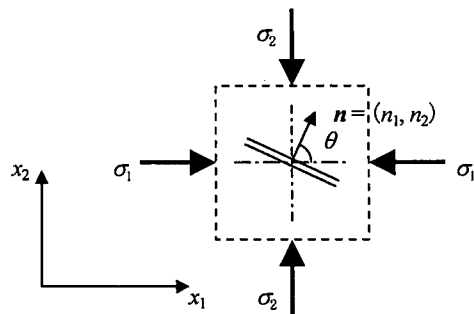


図-1 せん断帯の傾き

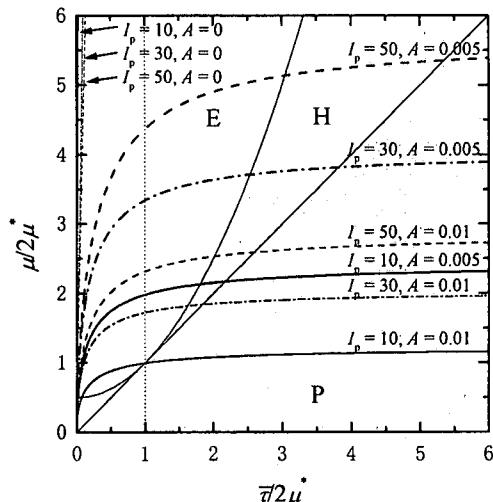


図-2 $(\bar{\tau}/2\mu^*, \mu/2\mu^*)$ の軌跡

(13)を用いることにより、次式のように得られる。

$$a\psi_{,1111} - 2b\psi_{,1122} + c\psi_{,2222} = 0 \quad (15)$$

ここで、 $a = 2\mu - \bar{q}$ 、 $b = -(4\mu^* - 2\mu)$ 、 $c = 2\mu + \bar{q}$ となる。また、 $\bar{q}$ は軸差応力を表し、伸張載荷 ($\sigma_1 > \sigma_2$) の場合には、 $\bar{q} = \sigma_1 - \sigma_2 (= 2\bar{\tau})$ と表される。なお、圧縮載荷 ($\sigma_2 > \sigma_1$) の場合には、 $a = 2\mu + \bar{q}$ 、 $b = -(4\mu^* - 2\mu)$ 、 $c = 2\mu - \bar{q}$ となり、 $\bar{q} = \sigma_2 - \sigma_1 (= 2\bar{\tau})$ と表される。

今、流れ関数が次式のように表現できるものと仮定する。

$$\psi = F(n_1x_1 + n_2x_2) \quad (16)$$

このとき、単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ は、せん断帯に垂直なベクトルを表すこととなる（図-1）。式(15)に式(16)を用いると、次の関係式が得られる。

$$an_1^4 - 2bn_1^2n_2^2 + cn_2^4 = 0 \quad (17)$$

式(16)を満足する n_2/n_1 の実数根の数が 0, 2 および 4 の場合に対応して、それぞれ楕円型(E)、放物型(P)、双曲型(H)に分類される（図-2）。なお、図には、各 I_p に対して $A = 0$ （共軸モデル）および $A = 0.01, 0.005$ （非共軸モデル）を用いた場合の $(\bar{\tau}/2\mu^*, \mu/2\mu^*)$ の軌跡も示している。載荷の進行（すなわち $\eta/M \rightarrow 1.0$ ）に伴い、 $\bar{\tau}/2\mu^* \rightarrow \infty$ 、 $\mu/2\mu^* \rightarrow D/2A$ となる。図より、 $A = 0.01$ を用いた結果に着目すると、 $I_p = 50, 30$ の場合には、軌跡は、E 領

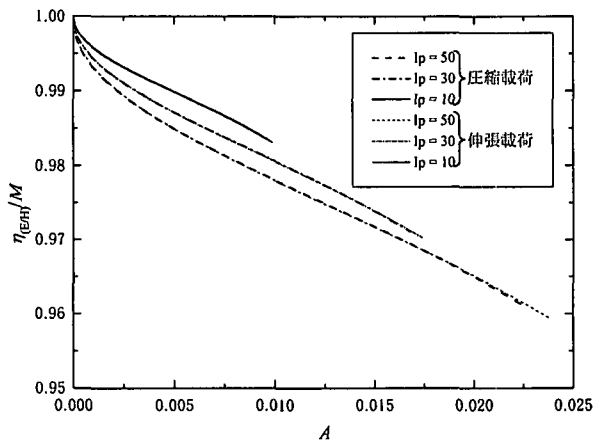


図-3 E/H境界を通過するときの応力比と非共軸パラメータの関係

域からH領域を経てP領域へと達しているが、 $I_p = 10$ の場合には、E領域から、H領域を通過せずに、直接P領域へと達していることがわかる。 $A = 0.005$ を用いた場合には、いずれの I_p の場合においても、(E)→(H)→(P)の軌跡を辿る。また、共軸モデルの場合には、 η/M が1.0近傍において、軌跡はE/H境界を通過する。

せん断帯形成理論では、 $(\bar{\epsilon}/2\mu^*, \mu/2\mu^*)$ の軌跡がE/H境界を通過するときせん断帯が発生するものと仮定している。また、そのときの x_2 軸に対するせん断帯の傾角 θ は、次式によって与えられる。

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{2b}{c} \quad (18)$$

なお、 $(\bar{\epsilon}/2\mu^*, \mu/2\mu^*)$ の軌跡がE領域から、H領域を通過せずに、直接P領域へと遷移する場合には、 $\theta = 90^\circ$ となり非実際的な結果となる。

E/H境界を通過するときの応力比 $\eta_{(E/H)}$ と非共軸パラメータ A の関係を図-3に示す。なお、 $\eta_{(E/H)}$ は M を用いて正規化している。図より、 I_p の違いによらず $\eta_{(E/H)}/M$ は、 A の増加に伴い減少する傾向が認められる。これは、非共軸性の程度が大きくなるのに伴いせん断帯が形成され易くなっていることを表している。しかしながら、さらに A が大きくなると、 $\eta_{(E/H)}/M$ は得られなくなる。例えば、 $I_p = 10$ に対して $A = 0.01$ を用いる場合には、 $(\bar{\epsilon}/2\mu^*, \mu/2\mu^*)$ の軌跡がE領域から直接P領域へと遷移しているため、 $\eta_{(E/H)}/M$ は得られない。このような場合には、非共軸性の程度が大きいものと考えられる。なお、伸張载荷の場合には、 $\eta_{(E/H)}/M$ が得られる A は、圧縮载荷の場合より大きくなった。これは、伸張载荷では、 M として M_c を用いたためである。

形成されるせん断帯の傾角 θ と非共軸パラメータ A の関係を示す(図-4)。伸張载荷の場合には、 θ は、 A の増加に伴い $\theta = 45^\circ$ から減少し、最終的に $\theta = 0^\circ$ となる。一方、圧縮载荷の場合には、 θ は、 A の増加に伴い $\theta = 45^\circ$ から増加し、最終的に $\theta = 90^\circ$ となることがわかる。この

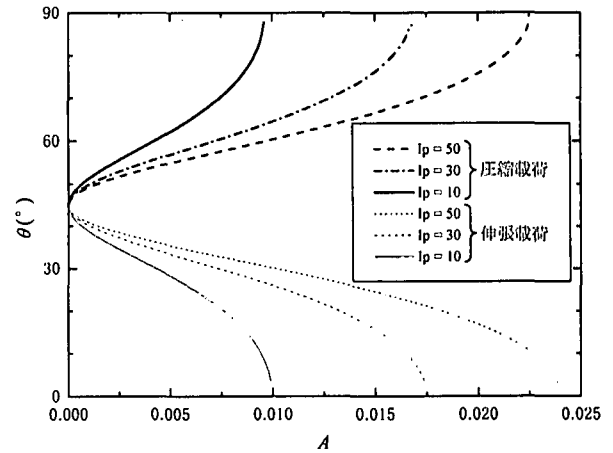


図-4 形成されるせん断帯の傾角と非共軸パラメータの関係

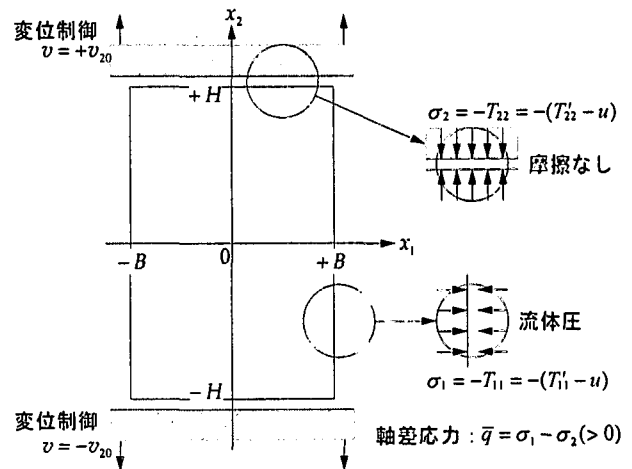


図-5 分岐時の供試体概形および境界条件

ような関係は、 I_p の違いによらず認められる。

本研究では、土質定数の違いが分岐解析結果に及ぼす影響を定量的に評価するため、 A の値を I_p とは無関係に一定と仮定する。また、上記の結果を考慮し、いずれの I_p においても、十分な非共軸性を表せられるように、 $A = 0.005$ を用いるものとする。

4. 分岐条件式

粘性土供試体の変形挙動の分岐現象を明らかにするためには、前述した構成式と増分釣合式に加えて、境界条件が必要となる。なお、構成式と増分釣合式から得られる流れ関数の支配方程式、すなわち式(15)が線形偏微分方程式であることから、流れ関数を用いて表現される速度場は、重ね合わせが可能となる。

ここでは、平面ひずみ条件下での非排水伸張試験を対象とした分岐現象に着目する(図-5)。境界条件として、供試体の両側面に液圧により一定圧力を作用させ、上下方向に変位制御により伸張する場合を考察する。なお、実際の三軸試験等では、供試体の均一応力状態を保つために、端面にグリース等を塗布し、上下端面に働く摩擦

の軽減を行うことが多い。本研究でも、上下端面には、摩擦は働かないものと仮定した。このとき、供試体は、伸張载荷初期から分岐時まで均一な変形を続ける。

分岐時の境界条件は、以下のように表される。なお、分岐時の供試体の寸法を幅 $2B$ 、高さ $2H$ とする。

$$\begin{cases} (\dot{s}_i)_1 = \sigma_1 L_{11}, (\dot{s}_i)_2 = \sigma_1 L_{12} & \text{on } x_1 = \pm B \\ (\dot{s}_i)_1 = 0, v_2 = \pm v_{20} & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (19)$$

ここで、 L_{ij} は速度勾配、 $(\dot{s}_i)_j (= \dot{S}_i)_{ij} n_j$ は全公称表面力速度であり、 $(\dot{S}_i)_j$ は全公称応力速度を表す¹⁷⁾。また、ここで用いる n_j は、考えている面の単位法線ベクトルである。なお、間隙水に関する境界条件は、非排水条件を仮定する場合には、前述の $D_{ii} = 0$ を満足することにより

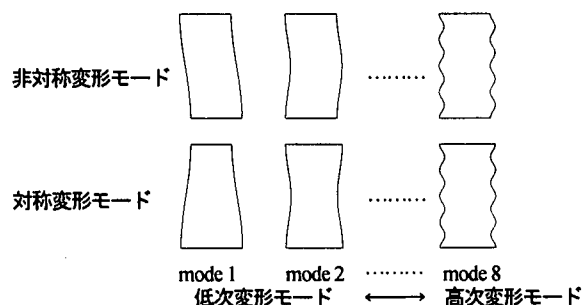


図-6 変形モード概形

表-3 平面ひずみ非排水伸張せん断試験における各領域の判別条件、 $V(x_1)$ の一般解、および分岐条件式²⁾
(A_1, A_2 : 未定定数, $a = 2\mu - \bar{q}$, $b = -(4\mu^* - 2\mu)$, $c = 2\mu + \bar{q}$)

	判別条件	ρ と P, Q および P, Q と a, b, c の関係		$V(x_1)$ の一般解	分岐条件式
EC 領域	$b^2 - ac < 0$	$\rho = P \pm iQ, -(P \pm iQ)$ $P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}$ $P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$	対称 モード	$* \Re[(A_1 + iA_2) \sin\{(P + iQ)k_m x_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_m B)}{P \sinh(2Qk_m B)} = \frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}}$
			非対称 モード	$* \Re[(A_1 + iA_2) \cos\{(P + iQ)k_m x_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_m B)}{P \sinh(2Qk_m B)} = -\frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}}$
EI 領域	$b^2 - ac > 0$, $\frac{b}{a} < 0$, $2\mu > \bar{q} $	$\rho = \pm iP, \pm iQ$ $P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ $P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sin(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tanh(Pk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cos(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
H 領域	$b^2 - ac > 0$, $\frac{b}{a} > 0$, $2\mu > \bar{q} $	$\rho = \pm P, \pm Q$ $P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ $P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sinh(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 - Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cosh(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tan(Qk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 - Q^2)^2}$
P 領域	$2\mu < \bar{q} $	$\rho = \pm P, \pm iQ$ $P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}$ $P^2 + Q^2 = -\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = -\frac{(1 - P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$

* $\Re[\dots]$ は、 $[\dots]$ の実数部分を表す。

自動的に成立する。圧縮载荷の場合には、上下端面の境界条件の $v_2 = \pm v_{20}$ を、 $v_2 = \mp v_{20}$ と置き換える必要がある。なお、以後は、伸張载荷の場合の結果のみを示す。

このとき、均一変形 ($D_{22} = -D_{11} = v_{20}/H$) は、境界条件を常に満足する。したがって、非均一変形を示す速度場が存在する場合には、変形挙動の分岐現象が発生する可能性がある。

非均一変形に対する境界条件は、式(19)から均一変形に寄与する部分を取り除くことにより、次式となる。

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11} = \dot{u}, \dot{T}'_{21} = \bar{q} L_{12} & \text{on } x_1 = \pm B \\ \dot{T}'_{12} = 0, v_2 = 0 & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (20)$$

各点非排水条件の下で圧縮性弾塑性体(粘土)を二軸伸張せん断する際に導かれる構成式および境界条件と増分釣合式に対して、各点非排水条件を満足する流れ関数を導入して得られた式は、非圧縮弾塑性体に対して側面荷重を 0 とした単純な一軸引張試験¹⁸⁾や一軸圧縮試験¹⁹⁾を行う際に得られる式と同様の型となることが報告されている²⁾。したがって、以下の分岐条件式の誘導は、文献¹⁸⁾・¹⁹⁾を参考にして行った。

まず、式(20)の中の上下端面の境界条件を考慮して、流れ関数 ψ を次式のように仮定する。

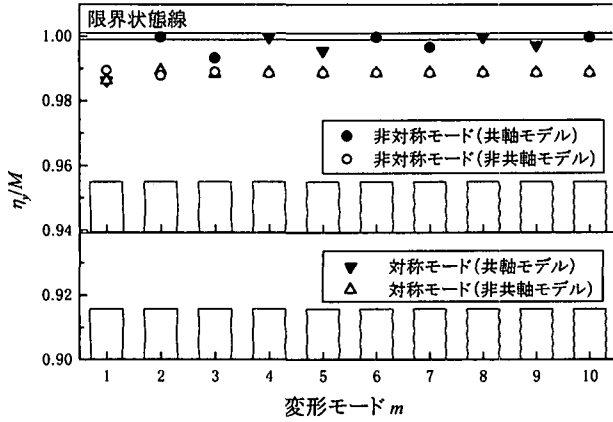


図-7 η/M 値と変形モードの関係 ($I_p = 10$)

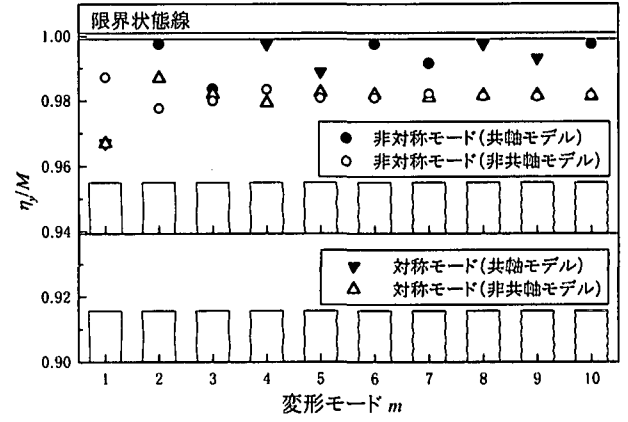


図-8 η/M 値と変形モードの関係 ($I_p = 50$)

$$\psi = V(x_1)\cos(k_mx_2) \quad (21)$$

ここで、 $k_m = m\pi/2H$ であり、 $m (=1, 2, \dots)$ は変形モードを表す (図-6)。なお、 m が偶数の場合には、 x_2 の原点を H/m だけ移動させる必要がある。流れ関数 ψ は、式(15)を満足する必要があるので、 $V(x_1)$ は、式(21)を式(15)に代入して得られる方程式を満足する必要がある。

$$(aD^4 + 2bk_m^2D^2 + ck_m^4)V(x_1) = 0 \quad (22)$$

ここで、 D は x_1 に関する微分演算子であり、その右肩の数字はその微分階数を表している。 $V(x_1)$ は、供試体の変形形状が対称モードの場合には $\sin(\rho k_mx_1)$ により、非対称モードの場合には $\cos(\rho k_mx_1)$ により表現できるものと仮定すると、式(22)は次のように書き換えられる。

$$ap^4 - 2bp^2 + c = 0 \quad (23)$$

式(22)は、式(17)と同様に実数解の個数により分類され、実数解の存在個数が 0、2、および 4 に対応して、それぞれ楕円領域 (E)、放物領域 (P)、および双曲領域 (H) と呼ぶ¹⁸⁾。また、楕円領域はさらに 2 つの領域に分類され、4 つの異なる複素数解を有する場合 (EC) と、4 つの異なる虚数解を有する場合 (EI) とする¹⁹⁾。このとき、領域の判別条件、 $V(x_1)$ の一般解および分岐条件式等を表 3 に整理して示す。なお、分岐条件式は、 $V(x_1)$ の一般解を代入した側面の境界条件において、 $V(x_1)$ の一般解に存在する未定定数 A_1 、 A_2 の非自明な解が存在する条件として得られる。

4. 解析結果および考察

4. 1 塑性指数の違いが分岐荷重に及ぼす影響

粘性土のような摩擦性材料の場合には、平均有効主応力の増大に伴い、せん断強さも増加する。したがって、本研究のような均一多軸応力条件下での分岐荷重としては、軸応力 σ や軸差応力 $\bar{q}$ よりも、応力比 $\eta (=q/p)$ が物理的に最も合理的な分岐荷重の定義であるものと考えられる。したがって、本研究では、分岐時の応力比 η_p を「分

岐荷重」と呼ぶ。

分岐解析を行うことにより、非均一変形挙動が発生していることを示すことができる。弾性体の場合には、非均一変形挙動が発生しうることには、均一変形挙動が不安定となり、供試体の変形は非均一変形挙動へと遷移する。しかしながら、弾塑性体の場合には、非均一変形挙動が発生しうるとしても、均一変形挙動が安定となる場合が存在する。したがって、供試体の変形が均一変形挙動から非均一変形挙動へと遷移すること、すなわち分岐現象が発生することを正確に示すためには、そのときの均一変形挙動が不安定であることを証明する必要がある。そのためには、弾塑性体の場合、負荷除荷領域を考慮した全ての仮想変形挙動を想定する必要がある。このような証明は、非常に困難であり、著者らの知る限り皆無である。また、たとえ理論的にある均一変形挙動が安定であることが証明できたとしても、実際の供試体には、なんらかの初期不整合が存在することから、均一変形挙動を維持し続けることが困難となり、分岐解へと移行することもある。以上のことから、分岐荷重は、対称、非対称の種々の変形モードに対して、限界状態での応力比以下の範囲の中で最小の値のみを示す。

本研究では、供試体の高さが幅の 2 倍となる供試体寸法比 $B/H = 0.5$ を用いることとする²⁰⁾。

図-7、図-8 は、分岐荷重 η_p と変形モード m の関係を示している。なお、伸張領域では塑性指数が増加するのに伴い限界状態での応力比 M が低下することから、分岐荷重 η_p を各塑性指数に対する限界状態での応力比 M を用いて正規化している。

図より、共軸モデルの場合には、塑性指数の違いによらず、 $m = 1, 4, 5, 8, 9$ の対称モードと $m = 2, 3, 6, 7, 10$ の非対称モードの分岐荷重が存在することがわかる。すなわち、 $m = 2, 3, 6, 7, 10$ の対称モードと $m = 1, 4, 5, 8, 9$ の非対称モードに対応する変形挙動を表現することができない。これは、共軸モデルを用いた場合には変形挙動が変形モードなどの幾何学的な条件の影響を受けやすいためと考えられる。また、分岐荷重は、偶数次変形モードの場合には限界状態線近傍に認められるのに対し、奇数次変形モー

ドの場合には m が大きくなるのに伴い増加する傾向が認められる。以上のことから、共軸モデルの場合には、対称1次変形モードに対応する変形挙動が発生しやすいことがわかる。この傾向は、塑性指数の違いによらず認められた。塑性指数の違いは、分岐荷重 η_y の大きさに表れている。最も発生しやすい変形挙動に対応する対称1次変形モードの分岐荷重に着目すると、 $I_p = 10$ の場合には $\eta_y/M = 0.986$ となり、 $I_p = 50$ の場合の $\eta_y/M = 0.967$ より大きな値となっている。したがって、供試体の変形挙動は、塑性指数が減少するに伴い、均一変形から非均一変形へと遷移するときの応力比が大きくなることがわかる。

一方、非共軸モデルの場合には、本研究で対象とした全ての変形モードに対応する分岐荷重が存在している。また、変形モードの次数が3を超えるような高次の変形モードの場合には、分岐荷重は一定値となっていることがわかる。したがって、非共軸モデルを用いた場合には幾何学的な条件が変形挙動に及ぼす影響は小さくなるものと考えられる。一方、対称1次変形モードの分岐荷重は、他の変形モードよりも小さな値となっている。これらのことは、塑性指数の違いによらず認められた。塑性

指数の違いが分岐荷重に及ぼす影響は、共軸モデルの場合と同様に、分岐荷重 η_y の大きさに認められた。最も発生しやすい変形挙動に対応する対称1次変形モードの分岐荷重に着目すると、 $I_p = 10$ の場合には $\eta_y/M = 0.986$ 、 $I_p = 50$ の場合の $\eta_y/M = 0.967$ となっており、共軸モデルの場合とほぼ同じ値であった。高次変形モードの場合には、 $I_p = 10$ の場合には $\eta_y/M = 0.989$ 、 $I_p = 50$ の場合の $\eta_y/M =$

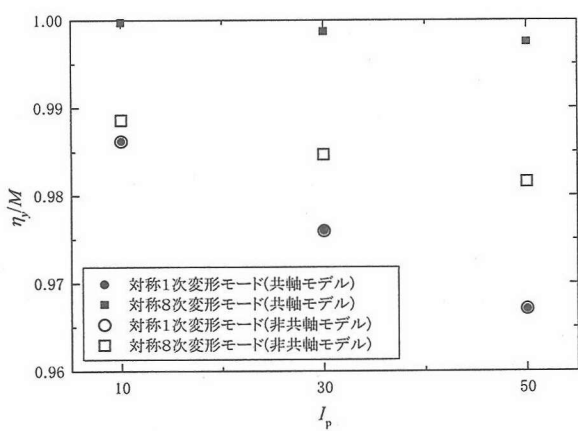


図-9 η_y/M 値と塑性指数の関係

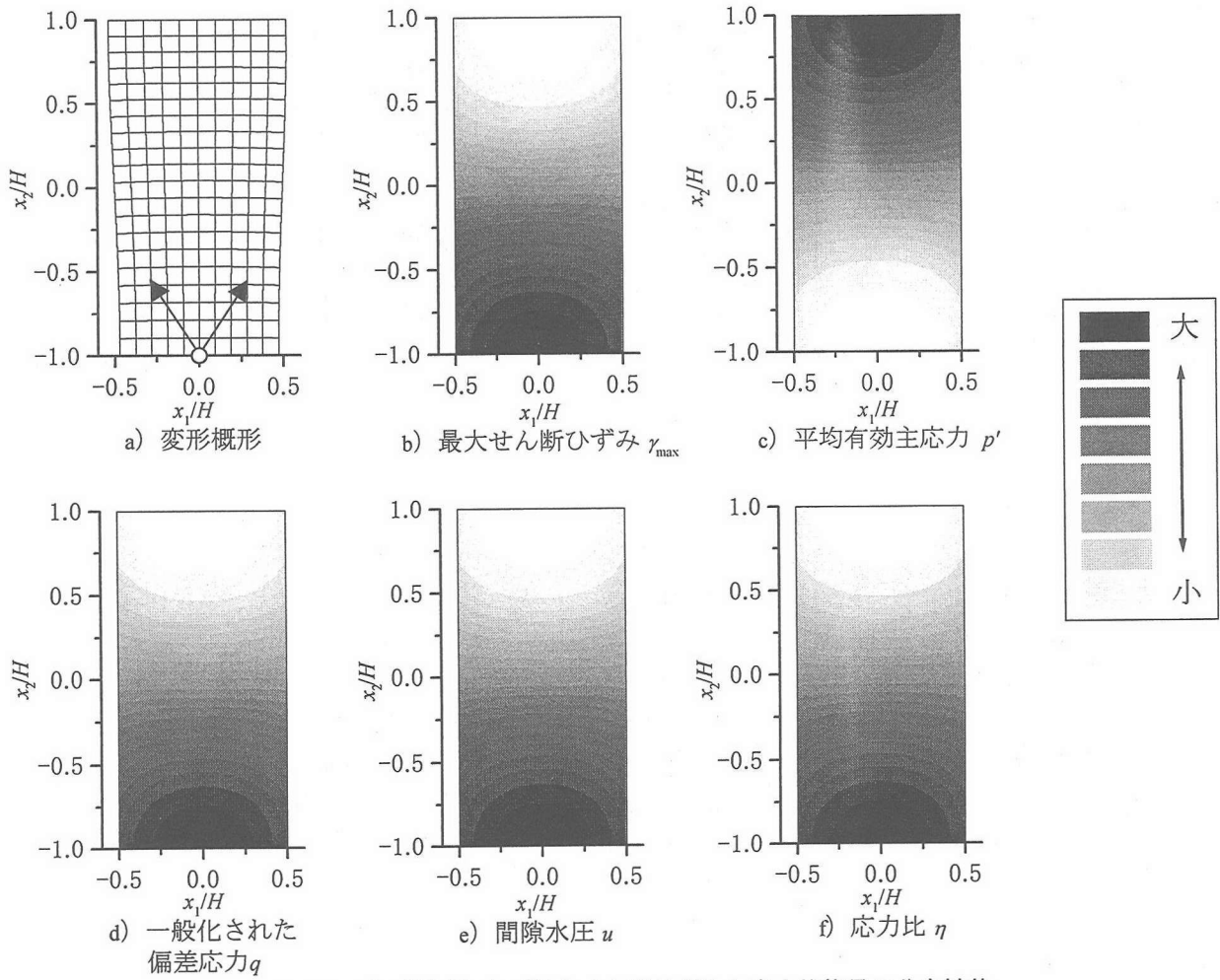


図-10 変形概形および最大せん断ひずみと応力状態量の分布性状
($I_p = 10$ (表-2 参照)・ $B/H = 0.5$ ・対称1次変形モード・非共軸モデル($A = 0.005$))

0.981を示しており、共軸モデルの場合より低い値となった。以上のことから、非共軸モデルの場合でも、均一変形から非均一変形へと遷移する応力比は、塑性指数が減少するのに伴い大きくなるものと推定される。

実際の平面ひずみ伸張試験の場合には、一般的に、供試体の底部から中央部にかけて絞り込まれるような対称的な破壊形態が観察され、非対称変形が認められることは少ない。したがって、対称1次変形モードの分岐荷重が最小となる本解析結果は、実際の伸張試験における供試体の変形挙動と一致するものと考えられる。

分岐荷重と塑性指数の関係を図-9に示す。代表的な変形モードとして、各塑性指数に対して最小の分岐荷重となる対称1次変形モードの場合と、対称8次変形モードの結果を示す。図より、共軸モデルと非共軸モデルの違いおよび変形モードの違いによらず、塑性指数が増加するのに伴い、各変形モードの分岐荷重は直線的に減少している。とくに、対称1次変形モードのように他の変形モードより分岐荷重が小さな値を示す場合には、その減少傾向が著しいことがわかる。以上のことから、中間土のような塑性指数が比較的小さな土は、塑性指数が比較

的大きな高塑性土と比較して大きな分岐荷重を示すことがわかる。

4.2 中間土の最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布

土供試体の破壊時に認められるすべり面は、変位の不連続状態を表す。変位の不連続は、ひずみの局所化からひずみの不連続を経て発生するものと考えられる。したがって、最大せん断ひずみが局所的に大きくなる位置を明らかにすることにより、すべり面の発生位置およびその形態を予測することが可能になる。

さらに、土の破壊は、応力状態とも密接な関係にある。偏差応力 q が増加すると土に大きなせん断応力が作用することとなり、土は破壊状態に近づく。また、平均有効主応力が p' の場合、限界状態時の土のせん断強さ q_c は、限界状態での応力比 M を用いて、 Mp' と表現できることから、 p' の減少に伴い q_c も減少する。したがって、 p' が小さな位置では破壊が発生しやすくなる。間隙水圧 u の増加は、全応力が一定の場合には、有効応力の原理から p' を減少させることになるので、すべり面の発生位置と

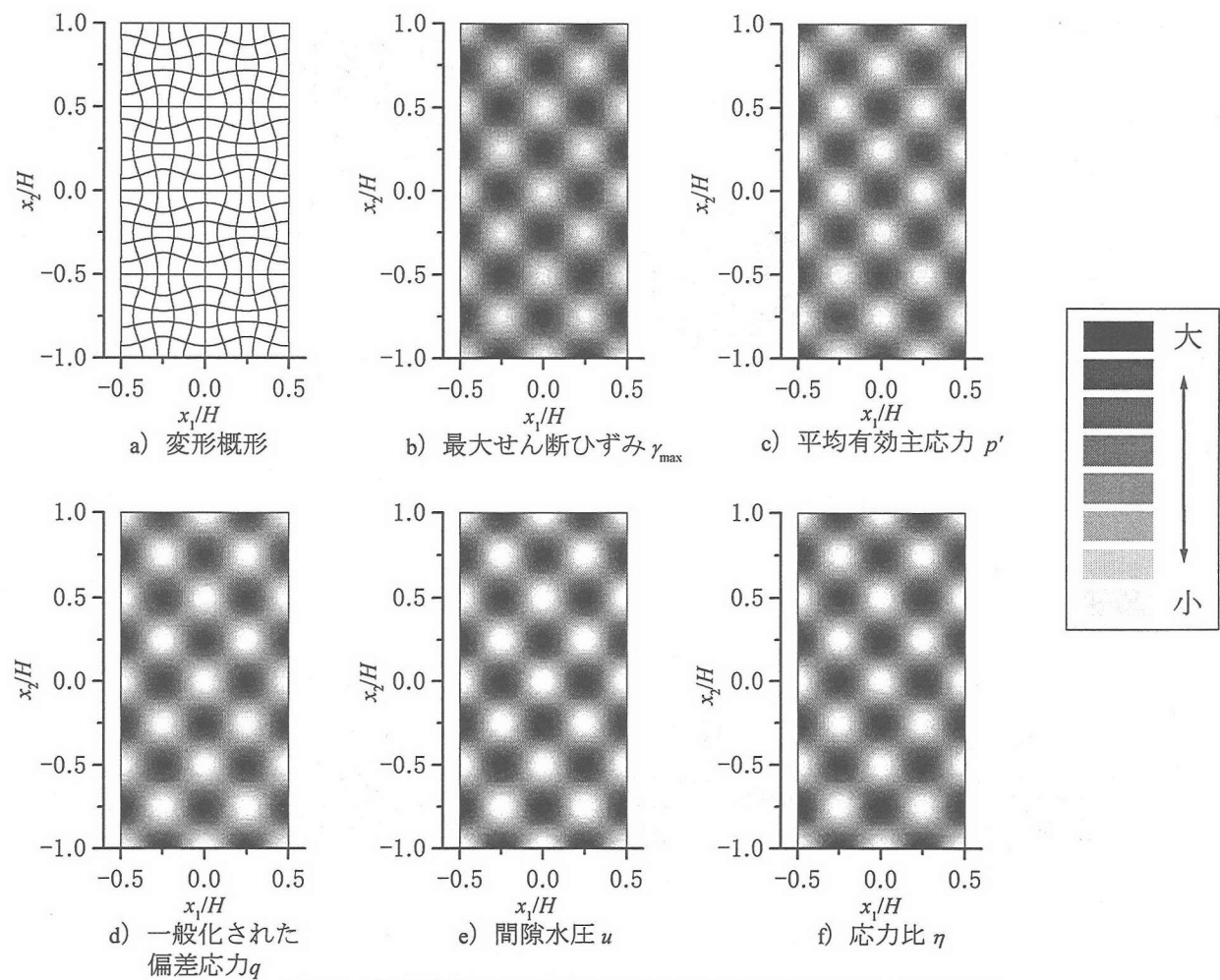


図-11 変形概形および最大せん断ひずみと応力状態量の分布性状
($I_p = 10$ (表-2 参照)・ $B/H = 0.5$ ・対称8次変形モード・共軸モデル($A = 0$))

考えられる。応力比は、 $\eta = M$ のとき限界状態を表すことから、 η が増加することにより破壊に近づくことになる。以上のことから、応力状態量の分布性状からも、すべり面の発生位置およびその形態を予測可能となる

最小分岐荷重を示す対称1次変形モードに着目する。この場合には、最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布性状は、共軸モデルと非共軸モデルの違いおよび塑性指数の違いによらず同様のものとなった。そこで代表例として、非共軸モデルで $I_p = 10$ の場合を図-10に示す。図-10(a)に示すように供試体下端部が絞り込まれるような変形概形となる場合には、下端部中央付近に最大せん断ひずみの局所化が認められる(図-10(b))。応力状態量に着目すると、平均有効主応力は、下端部中央付近で小さな値となっていることがわかる(図-10(c))。一方、この位置では、偏差応力、間隙水圧および応力比が大きくなっている(図-10(d)~(f))。以上のことから、供試体下端部中央付近は、最大せん断ひずみと応力状態量のいずれの観点から考察しても、すべり面が形成されやすい位置となる。したがって、すべり面は、図-10(a)に示した白丸付近から形成され始め、矢印の方向に進展する

ものと予測される。

実際の伸張試験では、底面から供試体高さの3分の1程度の位置において絞り込み破壊の形状となることが極めて多い。したがって、図-10から予測されるすべり面の位置は、実際現象を良く説明していることがわかる。

一方、高次変形モードの代表例として対称8次変形モードを取り上げる。変形モード m が大きな値の場合でも、最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布性状は、塑性指数の違いによらず同様のものとなったので、 $I_p = 10$ の場合を用いて考察を行う。しかし、共軸モデルと非共軸モデルの違いは、その分布性状に影響を及ぼした。

図-11は、共軸モデルの場合の結果を示している。この場合、供試体の表面には、変形はほとんど認められない。しかしながら、供試体内部では、周期的な変形状が認められる。その結果、供試体内部に周期的な最大せん断ひずみの局所化が発生している。また、ひずみの局所化が顕著な位置では、平均有効主応力が低下し、偏差応力、間隙水圧および応力比が増加している。以上のことから、すべり面は、供試体内部のひずみの局所化が顕著な位置から発生し始め、それらを繋ぐように発達する

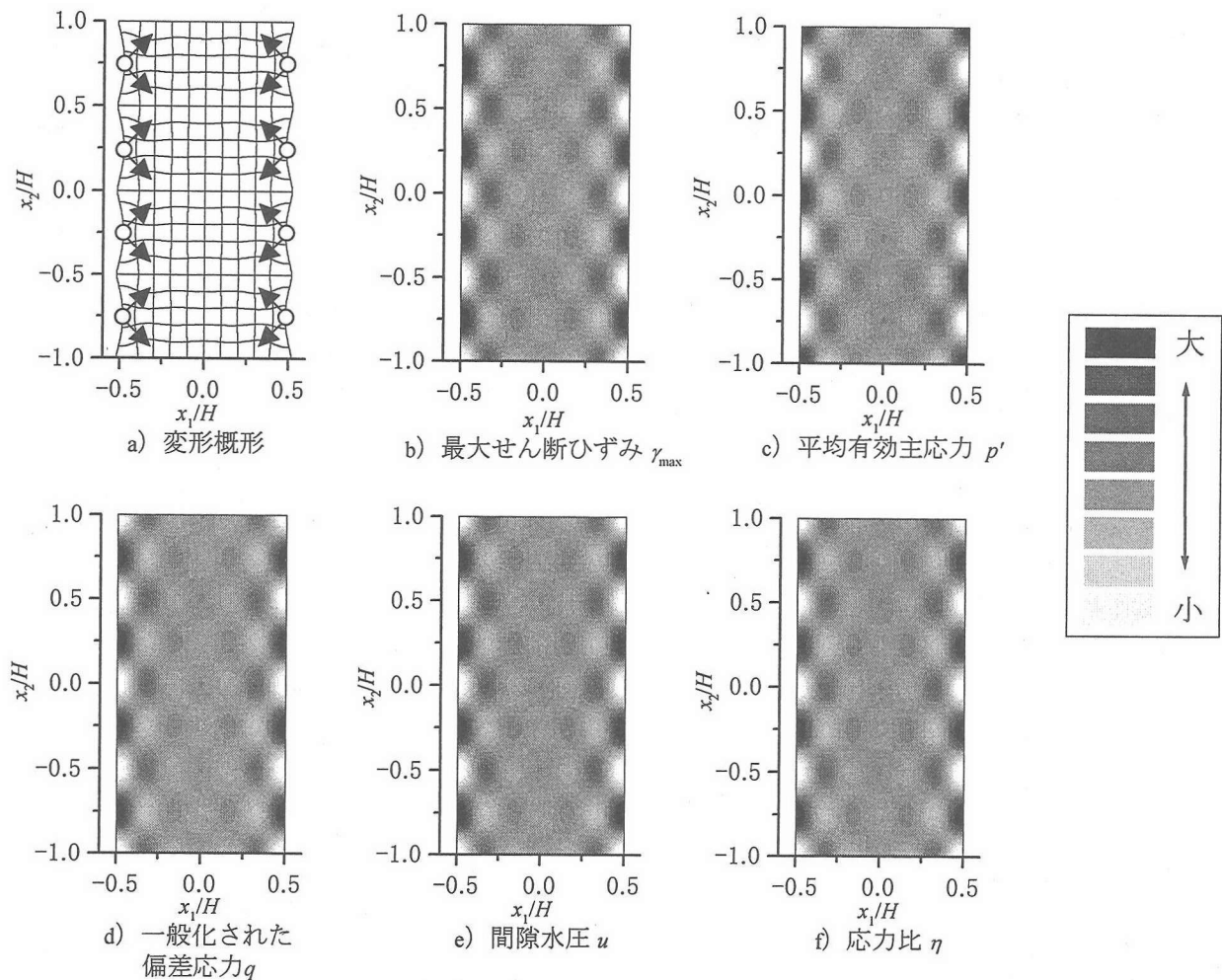


図-12 変形概形および最大せん断ひずみと応力状態量の分布性状
($I_p = 10$ (表-2 参照)・ $B/H = 0.5$ ・対称8次変形モード・非共軸モデル($A = 0.005$))

ものと推察される。

一方、非共軸モデルの場合には、図-12 に示すような最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布が得られる。非共軸モデルの場合には、共軸モデルの場合と異なり、供試体表面付近での変形が顕著となる。供試体内の最大せん断ひずみは、供試体表面付近で局所化が著しくなっている。また、ひずみの局所化が顕著な位置では、平均有効主応力が低下し、偏差応力、間隙水圧および応力比が増加している。以上のことから、すべり面は、図-12(a) に示した白丸付近から形成され始め、矢印の方向に進展するものと予測される。

高次変形モードでは、非共軸モデルの場合、供試体表面付近にのみ大きな局所ひずみが認められる。一方、共軸モデルの場合には、局所ひずみが大きな位置は供試体内全域に広がっている。これは、非共軸モデルの特性が高次変形モードの場合には低次変形モードの場合より顕著に表れているためと考えられる。このようなひずみの局所化の違いは、非共軸モデルの分岐荷重が共軸モデルの場合より小さいことと関連があるものと推察される。

5. 結論

本研究から得られた主要な結論を以下に列記する。

- 1) 塑性指数が 10 から 50 の範囲で適用可能な非共軸パラメータの値を、せん断帯形成理論に基づいて提案した。
- 2) 平面ひずみ非排水伸張試験を対象とした中間土の分岐荷重は、塑性指数が比較的大きな高塑性土の分岐荷重より大きくなった。また、分岐荷重は、塑性指数の増加に伴って直線的に減少した。
- 3) 塑性指数の違いは、分岐時の最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布に大きな影響を及ぼさなかった。
- 4) 高次変形モードの場合には、共軸モデルと非共軸モデルの違いは、最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布に影響を及ぼした。共軸モデルの場合には、すべり面が発生しやすい位置は、供試体内全体に周期的に認められるのに対し、非共軸モデルの場合には、供試体表面近傍のみに周期的に発生することが解析的に示唆された。

参考文献

- 1) 志比利秀, 矢富盟祥, 亀井健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘性土の分岐荷重に及ぼす影響, 土木学会論文集, No.666/III-53, pp.181-192, 2000.
- 2) 志比利秀, 亀井健史, 矢富盟祥: 粘性土の平面ひずみ非排水伸張試験における分岐解析とその圧縮試験との比較, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5, pp.357-366, 2002.
- 3) 志比利秀, 亀井健史: 塑性指数の違いが正規圧密粘性土の分岐解析結果に及ぼす影響, 土木学会論文集, No.715/III-60, pp.297-309, 2002.
- 4) 志比利秀, 亀井健史, 西開地一志: 平面ひずみ非排水伸張試験における分岐時の供試体内応力状態の評価, 第 47 回地盤工学シンポジウム論文集, pp.91-98, 2002.
- 5) 志比利秀, 亀井健史, 西開地一志: 非共軸性を考慮した粘性土の平面ひずみ伸張载荷における分岐解析結果と塑性指数の関係, 地盤と建設, Vol.20, No.1, pp.43-52, 2002.
- 6) Kamei, T.: A study on the mechanical behavior of normally consolidated cohesive soils, *thesis presented to the Tokyo Institute of Technology*, at Tokyo, Japan, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor Engineering, 1985.
- 7) 小林正樹, 亀井健史, 土田 孝: 中間土一砂か粘土か, 地盤工学会, 87p, 1992.
- 8) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 9) Kamei, T.: Dilatancy characteristics of normally consolidated cohesive soils, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.1, pp.165-172, 1989.
- 10) Nakase, A., Kamei, T. and Kusakabe, O.: Constitutive parameters estimated by plasticity index, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.114, No.7, pp.844-858, 1988.
- 11) Kamei, T. and Sakajo, S.: Evaluation of undrained shear behavior of K_0 -consolidated cohesive soils using elasto-viscoplastic model, *Computers and Geotechnics*, Vol.17, No.3, pp. 397-417, 1995.
- 12) Kamei, T.: An integrated evaluation of the mechanical behavior of normally consolidated cohesive soils, *Geological Reports of Shimane University*, No.14, pp.1-14, 1995.
- 13) Kamei, T.: Experimental and numerical investigation of the undrained shear characteristics of undisturbed clay, *Earth Science*, Vol.50, No.3, pp.213-222, 1996.
- 14) Sakajo, S. and Kamei, T.: Simplified deformation analysis for embankment foundation using elasto-plastic model, *Soils and Foundations*, Vol.36, No.2, pp.1-11, 1996.
- 15) Kamei, T. and Sakajo, S.: A deformation analysis of deep foundation under embankment using an elasto-viscoplastic model, *Journal of the Japan Society of Engineering Geology*, Vol.39, No.2, pp.183-192, 1998.
- 16) 中瀬明男: 新体系土工学 84 海洋土質, 土木学会編, 技報堂, p.144, 1984.
- 17) 例えば, 土木学会編: 土工学ハンドブック, 第 6 編 固体力学, pp.215-254, 技報堂出版, 1989.

- 18) Hill, R. and Hutchinson, W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.
- 19) Young, N. J. B.: Bifurcation phenomena in the plane compression test, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.24, pp.77-91, 1976.
- 20) 例えば, 土質工学会編: 土の試験実習書 (第二回改訂版), pp.133-158, 1991.

(2003 年 4 月 18 日 受付)