

トンネル覆工の座屈解析

Buckling Analysis of Tunnel Lining

田村武*, 林芳樹**

Takeshi TAMURA, Yoshiki HAYASHI

*フェロー 工博 京都大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**学生会員 京都大学大学院 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

Buckling may occur in tunnel lining whose rigidity is low. However, few researchers have considered buckling of such tunnel lining. This paper shows the buckling load and buckling mode of a tunnel lining in two dimensions using a circular ring model. Buckling analysis is first carried out on the circular ring under the uniform external pressure; the analytical results are then compared with theoretical results in order to check the validity of the method of analysis. Further, an analysis model which considers ground reaction is constructed to study the influence of the ground around a tunnel lining on the buckling behavior of the tunnel lining.

Key words : buckling load, tunnel lining, ground reaction

1. はじめに

我が国の社会経済を支える重要な役割としての社会資本整備には、地下空間の利用が不可欠である。特に、大都市域では地上の超過密化によって、トンネルの役割が益々増大している。一方で、昨今の厳しい経済状態を反映して、公共事業のコスト削減が強く求められている。トンネル施工も決して例外ではなく、非開削で経済的な NATM や、高速施工による工期の短縮が可能で、それゆえに経済的であるカルバートが用いられる機会が増加している。

NATM は岩盤に覆われた山岳地帯で発達した工法であるが、近年、都市部の比較的軟らかい地盤においても適用されることが多くなっている。NATM ではトンネル掘削後に 1 次支保と 2 次覆工が施工される。1 次支保で用いられる吹付けコンクリートは、地盤に密着して施工されるため、トンネル空洞周辺の地山のアーチアクションを利用することが可能となり、覆工を薄くしても十分な強度を得ることができ、経済的な構造と言える¹⁾。

一方、カルバートは、高速道路などの盛土区間において、交通、水路確保用のアンダーパスとして用いられる埋め戻し式のトンネルである。最近では、カルバートの 1 つに分類されるコルゲート・カルバートが考案されている。コルゲート・カルバートとは図-1 に示すように、覆工が薄肉の金属プレートから成り、奥行き方向に波板状になったもので、従来のカルバートよりも更に低コスト化できると考えられる。

ところで、一般に剛性の高い覆工は、外力に対して変形を生じず、構造物の剛性のみで外力に抵抗することで安定な状態を保つ。しかし、不経済という欠点を持つ。一方、剛性の低い覆工は、構造自体の強度は高くないが、周辺地山の応力状態の変化に伴って変形し、地山の支持力を引き出すことによって安定な状態を保つ。それゆえに、覆工厚を薄くしても安定な状態を保つことができ、経済的な構造であると言える。しかしながら、覆工の変形が微小で曲げに対して安定な状態にあっても、軸力による座屈を検討しなければならない。また、これまでに起こった事例の中には座屈が要因と考えられるものもある。

以上を踏まえると、比較的剛性の低い、NATM で施工される 1 次支保やコルゲート・カルバートは、座屈を生じる可能性があり、これらの覆工構造の座屈に関する詳細な検討が必要である。しかし、トンネル覆工の座屈に関する研究例はほとんどない。

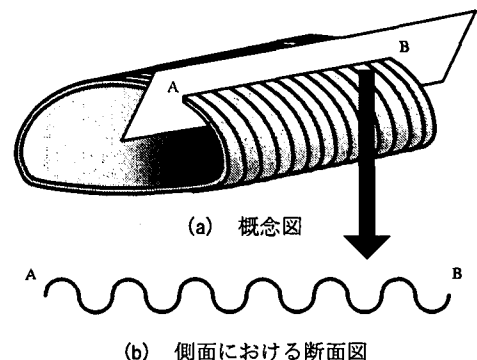


図-1 コルゲート・カルバートのイメージ図

そこで本研究では、薄肉覆工の座屈に関する検討の第一歩として、円形断面トンネルを 2 次元的に表現したモデル（以後、円形リングあるいはリングと記す）を用いて検討を行う。まず、円形リングが等方圧縮される場合について数値解析を行い、座屈荷重を求める。その際、池田・室田²⁾が用いた解析手法をもとに線形座屈解析と有限変形解析を行う。また、ここで求まる座屈荷重を Timoshenko-Gere³⁾が求めた理論解と比較することで、解析手法の妥当性を検証する。このとき、さらに、等方圧縮された円形リングの外側に地盤反力が作用する解析モデルを構築し、周辺地山が覆工の座屈に与える影響を検討する。

Timoshenko-Gere は、以下に示す円形リングのたわみの基礎方程式

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{MR^2}{EI} \tag{1}$$

を用い、楕円形状の座屈モードを仮定することで、地盤反力を考慮しない場合の円形リングの座屈荷重の理論値 q_{cr} を

$$q_{cr} = \frac{3EI}{R^3} \tag{2}$$

と求めた。ただし、 w は半径方向の変位、 M は曲げモーメント、 θ は中心角、 E は円形リングのヤング率、 I は断面 2 次モーメント、 R は半径である。また、座屈時の軸力 S_{cr} は

$$S_{cr} = \frac{3EI}{R^2} \tag{3}$$

と求められる。

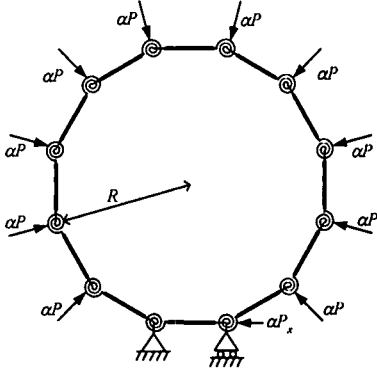
2. 地盤反力を考慮しない場合のトンネル覆工の座屈解析

2.1 概説

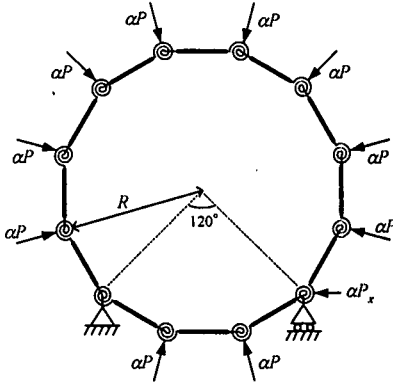
本研究では、円形リングが水中深く沈められたような状態を想定し、外部から理想的に等方圧縮される円形リングに対して座屈解析を実施する。本章では、構築した座屈解析手法について示し、本解析手法による解析結果と式(2)に示した理論値を比較することで、解析手法の妥当性を検証する。

図-2 に円形リングが等方圧縮される場合の、弾性棒と回転ばねから成る解析モデルを示す。ここでは、図-2 に示すように支点を設けているが、これは系全体を安定させるために設けたものであり、支点位置として図-2(a)に示すようにリング最下部に支点を設けたパターン A と、図-2(b)に示すよ

うに両支点とリング中心のなす角が 120° となるように支点を設けたパターン B を考え、支点を設ける位置が円形リングの座屈挙動に及ぼす影響を把握する。また、この解析モデルは「剛棒—ばねモデル」⁴⁾と同様に覆工の曲げ剛性を回転ばねによって表しているが、棒要素が軸方向に弾性変形を生じるという点で異なることに注意が必要である。すなわち、軸力は各節点変位によって表される。そのため、未知数は節点変位のみとなる。また、ここでは線形座屈解析と有限変形解析の 2 つの手法によって解析を行う。なお、有限変形解析には Updated Lagrange 法⁵⁾を用いる。



(a) パターン A（支点がリング最下部にある場合）



(b) パターン B
(両支点とリング中心のなす角が 120° の場合)

図-2 解析モデルの模式図

2.2 解析手法

(1) 微小変形のつり合い式

各節点の変位前の形状における力のつり合いを考えると

$$B^T S = \alpha P \tag{4}$$

が得られる。ただし、 B は変形前の状態で定義した B 行列、 S は部材力ベクトル、 α は荷重係数、 $\alpha P = (\alpha P_{x1}, \alpha P_{y1}, \dots, \alpha P_{x(m-1)}, \alpha P_{y(m-1)}, \alpha P_{xm})^T$ 、 αP は円形リングの中心方向に作用する外力、 αP_{xi} は節点 i に作用する外力 αP の x 成分、 αP_{yi} は節点 i に作用する外力 αP の y 成分である。次に、各部材の変形条件を用いると

$$\delta = B\mathbf{u} \quad (5)$$

と表される。ただし、 δ は部材の圧縮量を表すベクトル、 $\mathbf{u}$ は未知節点変位ベクトルである。さらに、材料定数を用いると、部材力は

$$\mathbf{S} = D\delta = DB\mathbf{u} \quad (6)$$

と表される。ただし、 D は対角成分が軸方向の剛性と回転ばね定数から成る行列である。このとき、式(4)、式(5)における係数行列は、互いに転置の関係となっている⁶⁾。式(4)、(6)より微小変形解析におけるつり合い式は

$$B^T DB\mathbf{u} = \alpha \mathbf{P} \quad (7a)$$

$$\Leftrightarrow K_E^0 \mathbf{u} = \alpha \mathbf{P} \quad (7b)$$

ただし、 $K_E^0 = B^T DB$ ：剛性行列

と表される。式(7b)の連立方程式を解いて得られる解を式(6)に代入することで部材力が求まる。

(2) 有限変形のつり合い式

式(4)で表されるつり合い状態に、さらに荷重 $\Delta\alpha\mathbf{P}$ を加え、新たに変位が生じた場合を考える。係数行列 $B(\alpha)$ 、部材力ベクトル $\mathbf{S}(\alpha)$ ともに荷重パラメータ α の関数として表されるので、式(4)は

$$B^T(\alpha + \Delta\alpha) \cdot \mathbf{S}(\alpha + \Delta\alpha) = (\alpha + \Delta\alpha)\mathbf{P} \quad (8)$$

と表される。さらに式(8)左辺の各項は次式のように展開することができる。

$$B^T(\alpha + \Delta\alpha) = B^T(\alpha) + \Delta B^T(\alpha) \quad (9a)$$

$$\mathbf{S}^T(\alpha + \Delta\alpha) = \mathbf{S}^T(\alpha) + \Delta \mathbf{S}^T(\alpha) \quad (9b)$$

式(9)を用いて式(8)を展開し、2次の微小項を無視し、式(4)を用いて整理すると

$$B^T(\alpha)\Delta\mathbf{S}(\alpha) + \Delta B^T(\alpha)\mathbf{S}(\alpha) = \Delta\alpha\mathbf{P} \quad (10)$$

と表される。ここで、式(10)の左辺第1項は、微小変形のつり合い式の場合と同様に変形でき、

$$B^T(\alpha)\Delta\mathbf{S}(\alpha) = K_E(\alpha)\Delta\mathbf{u}(\alpha) \quad (11)$$

ただし、 $K_E(\alpha) = B^T(\alpha)DB(\alpha)$

と表される。このことから式(9)の左辺第2項は

$$\Delta B(\alpha)^T \mathbf{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^{2m-1} \left(\frac{\partial \mathbf{b}_i(\alpha)}{\partial \mathbf{u}(\alpha)} S_i(\alpha) \right) \Delta \mathbf{u}(\alpha) \quad (12a)$$

$$\Leftrightarrow \Delta B^T(\alpha) \mathbf{S}(\alpha) = K_G(\alpha) \Delta \mathbf{u}(\alpha) \quad (12b)$$

ただし、 m ：部材数

$$B^T(\alpha) = \{\mathbf{b}_1(\alpha), \mathbf{b}_2(\alpha), \dots, \mathbf{b}_{2m-1}(\alpha)\}$$

$$\mathbf{S}(\alpha) = (S_1(\alpha), S_2(\alpha), \dots, S_{2m-1}(\alpha))^T$$

$$\Delta \mathbf{u}(\alpha) = (\Delta u_1(\alpha), \Delta u_2(\alpha), \dots, \Delta u_{2m-1}(\alpha))^T$$

$$K_G(\alpha) = \sum_{i=1}^{2m-1} \left(\frac{\partial \mathbf{b}_i(\alpha)}{\partial \mathbf{u}(\alpha)} S_i(\alpha) \right) : \text{幾何剛性行列}$$

と表される。なお、 $K_G(\alpha)$ は $K_E(\alpha)$ とともに対称行列となる。式(10)、(11)、(12)より、有限変形のつり合い式は

$$(K_E(\alpha) + K_G(\alpha)) \Delta \mathbf{u} = \Delta \alpha \mathbf{P} \quad (13)$$

と表される。ただし、 $K_E(\alpha) + K_G(\alpha)$ は接線剛性行列である。

(3) 線形座屈解析

線形座屈解析を行う際には、式(13)の右辺をゼロベクトルと置いて固有値解析を行う。これは座屈が生じるまでは微小変形解析で表される微小変形のみが生じ、有限変形が生じないとしていることを意味する。このとき、式(12)、(13)より、

$$K_E^0 \Delta \mathbf{u}(\alpha) + \alpha K_G' \Delta \mathbf{u}(\alpha) = 0 \quad (14)$$

ただし、 $\alpha K_G' = K_G^0$

K_G^0 ：初期状態における値と微小変形解析によって求めた部材力を用いて求めた幾何剛性行列

という一般化固有値問題が得られる。ここに、微小変形解析で求まる部材力を用いるので、幾何剛性行列は $\alpha K_G'$ と変形できる。式(14)で表される一般化固有値問題を解き、最小の固有値 $\alpha_{\min}$ を求めることで座屈荷重は

$$P_{cr} = \alpha_{\min} P \quad (15)$$

と表される。ただし、 P_{cr} は各節点に作用する荷重の限界値（座屈荷重）である。また、この値を等分布荷重に変換すると

$$q_{cr} = P_{cr} \times \frac{m}{2\pi R} \quad (16)$$

と表される。ただし、 q_{cr} は等分布荷重としての座

屈荷重, R は円形リングの半径である. このようにして求まる等分布荷重としての最小の座屈荷重を, 式(2)で示した理論値と比較する. また, 固有値の最小値に対応する固有ベクトルによって, 座屈を生じたときの各節点変位の比である座屈モードも表される.

(4) 有限変形座屈解析

Updated Lagrange 法では, 式(13)に示す有限変形のつり合い式を用いて, 図-3 に示すフローチャート図に従って計算する. 剛性行列 $K_E(\alpha)$ は図-2 で示した解析モデルの各棒要素の部材長と部材角より成り, 幾何剛性行列 $K_G(\alpha)$ は各棒要素の部材長, 部材角, 軸力と回転ばねに生じる曲げモーメントより成る. Updated Lagrange 法では, 式(13)で用いられる接線剛性行列は変位の非線形関数となるため, 徐々に荷重を増加させ, 構造が不安定になる点を求めている. その際, 各荷重増分における計算を 1 ステップとする. このとき, 各ステップにおいて式(13)の連立方程式を解くことによって, 増分節点変位を求める. そこで求めた節点変位によって変化する棒要素の部材角や部材長の増分を算出し, 次のステップにおける剛性行列 $K_E(\alpha)$, 幾何剛性行列 $K_G(\alpha)$ を更新する. また, 前ステップで求めた部材力を用いて幾何剛性行列 $K_G(\alpha)$ を更新する. ただし, 第 1 ステップでは幾何剛性行列に用いる部材力はゼロとなる. 以上の流れで繰り返し計算を行い, 構造が不安定になる荷重を求める. すなわち, ここでは式(13)で表される連立方程式の接線剛性行列が特異となる点を

$$\det(K_E(\alpha) + K_G(\alpha)) = 0 \quad (17)$$

を満たす荷重として求める. この荷重が座屈荷重である. ただし数値解析上, 式(13)の左辺が完全にゼロになる点を見つけるのは困難である. そこで, 以下の手法を用いて座屈荷重を算出する. 安定な状態においては接線剛性行列 $K_E(\alpha) + K_G(\alpha)$ の固有値が全て正となることから, 接線剛性行列の固有値の最小値 $\lambda_{\min}$ を求め, その値が負に転じるステップ h を求める. 図-4 に固有値の最小値とステップ数との関係の概略図を示す. 図-4 に示すようにステップ h とステップ $h-1$ の間に式(17)を満たす点がある. そこで, このステップ h とステップ $h-1$ の間の区間を直線近似し, 内挿する事で座屈荷重は

$$P_{cr} = (h-1)\Delta\alpha P + \Delta\alpha P \times \frac{\lambda_{\min}(h-1)}{\lambda_{\min}(h-1) - \lambda_{\min}(h)} \quad (18)$$

と表される. ただし, $\lambda_{\min}(h)$ はステップ h における接線剛性行列の固有値の最小値である. また, こ

の値を, 式(16)を用いて等分布荷重に変換する. また, 座屈モードは, 式(17)の条件を満たす時に連立方程式(13)より得られる. すなわち, 式(17)の条件を満たす時, 不安定な状態にあるので, さらに荷重を増やすとつり合い状態を保つことができなくなる. そこで, 荷重増分を表す式(13)の右辺をゼロとおいて考える. また, この時の接線剛性行列は, 座屈荷重と同様にステップ h とステップ $h-1$ の接線剛性行列を内挿することで得られる. さらに, 式(13)の係数行列が特異になっている. すなわち, ランクが 1 つ下がっているとみなすことができる. そこで, 連立方程式の中から 1 つだけ式を取り除き, 同時に, 未知節点変位のうちどれか 1 つに任意の値を与える. ただし, この際, 残される連立方程式が特異とならないように, 取り除く方程式と未知数は注意して選ばなければならない. このようにして得られた連立方程式を解くことで, 座屈を生じた時の各節点変位の比である座屈モードが求まる.

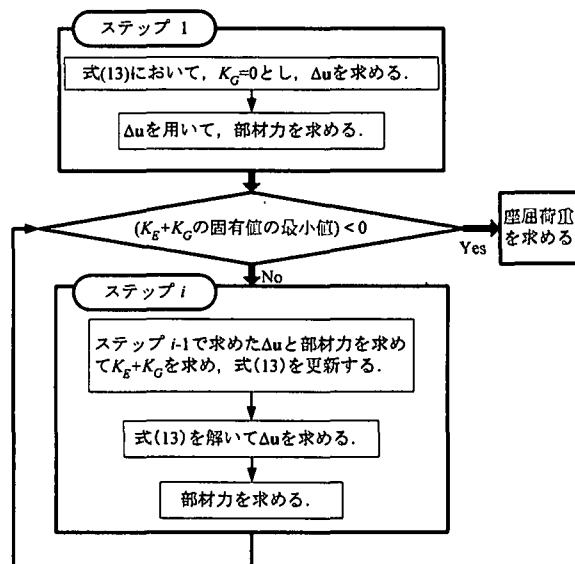


図-3 Updated Lagrange 法における数値解析のフローチャート図

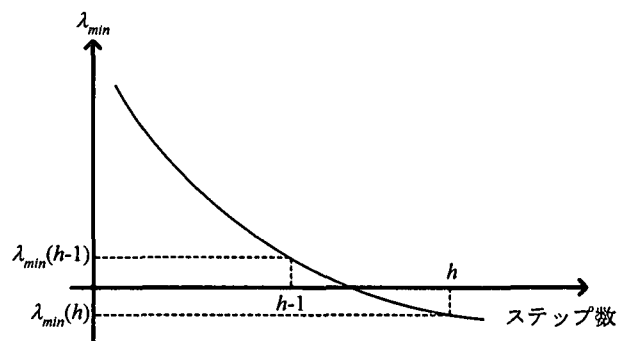


図-4 Updated Lagrange 法における接線剛性行列の最小の固有値とステップ数の関係

(5) 解析モデル

2.1 概説でも述べたように、本研究における解析モデルは弾性棒と回転ばねから成る。すなわち、弾性棒の剛性によって覆工の軸方向の剛性を表し、回転ばねのばね定数によって覆工の曲げ剛性を表す。ただし、覆工の曲げ剛性 EI を回転ばね定数 K_θ で表す際には、はり理論における基礎方程式と、解析モデルにおいて曲げを表す基礎方程式を比較している。図-5(a)に、はりの微小部分に曲げモーメント M が生じた時のたわみ角を示す。このとき、はり理論における基礎方程式は

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\Leftrightarrow M = -EI \times \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right) \quad (19)$$

と表される。ただし、 v ははりの微小部分におけるたわみである。図-5(b)に回転ばねに曲げモーメント M が生じた時の回転角を示す。このとき、解析モデルにおいて曲げを表す基礎方程式は、長さ l あたりの回転角を θ とすると

$$M = K_\theta (-\theta)$$

$$\Leftrightarrow M = -K_\theta l \times \frac{\theta}{l} \quad (20)$$

と表される。式(19)、(20)はともに

(曲げモーメント) =
(定数) $\times$ (単位長さあたりの傾きの変化)

となっている。このことから、式(19)と式(20)を比較すると曲げ剛性 EI と回転ばね定数 K_θ の関係は

$$K_\theta = \frac{EI}{l} \quad (21)$$

と表される。



(a) はりのたわみ角と曲げモーメント



(b) 回転ばねに生じる回転角と曲げモーメント

図-5 はりのたわみ角と解析モデルの回転角に対応する曲げモーメント

2.3 解析結果

(1) 概説

本節では、図-2 に示す等方圧縮される円形リングの解析モデルに対する解析結果を示す。ただし、ここでは式(2)に示す理論値によって規準化した座屈荷重を用いるため、円形リングに関して決定すべきパラメータは、覆工の厚さと半径の比のみとなる。ここでは、覆工厚と半径の比が $1/100$ として解析を行った。ここで、パターン A に対しては線形座屈解析と有限変形解析を行い、パターン B に対しては線形座屈解析のみを行った。また、線形座屈解析では、式(14)で表される固有値問題を解く際に式(14)を

$$K'_G \Delta u(\alpha) + \frac{1}{\alpha} K_E^0 \Delta u = 0 \quad (22)$$

と変形し、最大の固有値と 2 番目に大きな固有値を求めることで、最小の座屈荷重 q_{cr1} と 2 番目に小さな座屈荷重 q_{cr2} を求めた。実際の構造物ならば‘最小の座屈荷重’にて座屈が発生するが、計算上求まる次に小さな座屈荷重も座屈解析手法の妥当性を検討する上で重要だと考えられる。以上のような観点から、最小の座屈荷重 q_{cr1} と 2 番目に小さな座屈荷重 q_{cr2} を求めた。以下、最小の座屈荷重を座屈荷重 I、2 番目に小さな座屈荷重を座屈荷重 II と記す。また、座屈荷重 I に対応する座屈モードを 1 次モード、座屈荷重 II に対応する座屈モードを 2 次モードとして求めた。なお、座屈モードは各節点変位の比として求まるもので、絶対量を表すものではない。

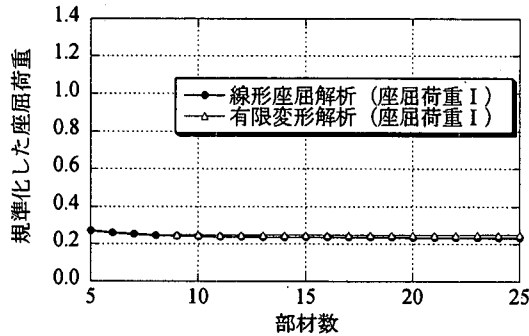
(2) 解析結果

図-6(a)、図-7(a)、図-8(a)に、円形リングの部材数と座屈荷重の関係を示し、図-6(b)、図-7(b)、図-8(b)に、座屈モードを示す。図-6～図-8の(a)のグラフの縦軸には、解析より求めた座屈荷重を式(2)に示す理論値により規準化した値を示し、横軸には部材数を示す。また、表示した座屈モードは部材数が 33 の場合の結果である。図-6(a)には、パターン A において、線形座屈解析と有限変形解析を行った場合の円形リングの部材数と座屈荷重 I の関係を示し、図-6(b)には、1 次モードを示す。図-6(a)に示すように、線形座屈解析を行った場合には座屈荷重 I は理論値の約 24%となり、有限変形解析を行った場合にも座屈荷重 I は理論値の約 24%となっている。また、図-6(b)に示すように、線形座屈解析における 1 次モードと、有限変形解析における 1 次モードは一致しており、ともに左右非対称なモードとなっている。

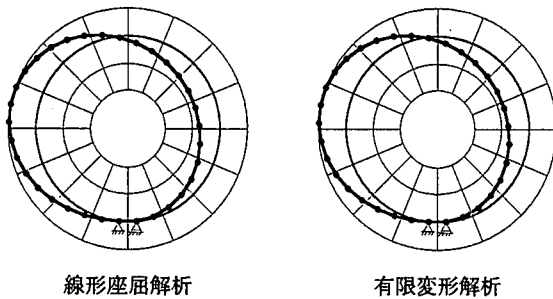
図-7(a)には、パターン B において、線形座屈解析を行った場合の円形リングの部材数と座屈荷重 I の関係を示し、図-7(b)には、1 次モードを示す。

図-7(a)に示すように、座屈荷重 I は理論値の約 87%となっている。また、図-7(b)に示すように、1 次モードは左右非対称なモードとなっている。

図-8(a)には、パターン A とパターン B において、線形座屈解析を行った場合の円形リングの部材数と座屈荷重 II の関係を示し、図-8(b)には、2 次モードを示す。図-8(a)に示すように、パターン A とパターン B の座屈荷重 II は一致し、理論値の約 130%となっている。また、図-8(b)に示すように、パターン A、パターン B ともに、2 次モードは対称な楕円形状となっている。

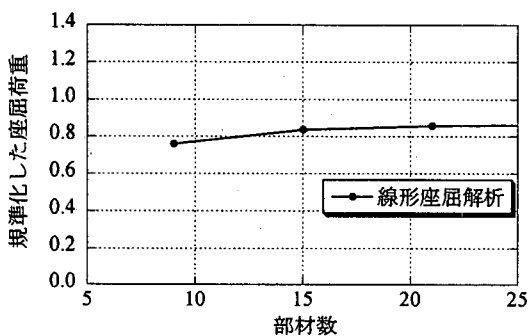


(a) 円形リングの部材数と座屈荷重の関係

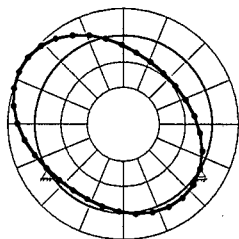


(b) 座屈モード

図-6 パターン A における座屈荷重 I と 1 次モード

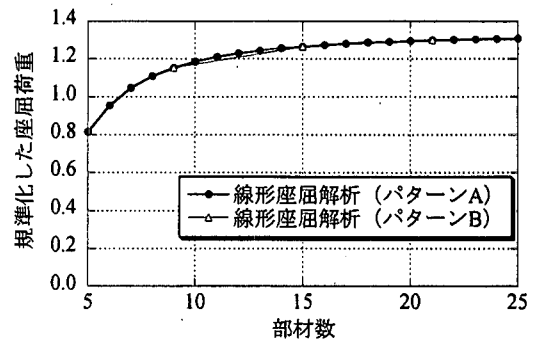


(a) 円形リングの部材数と座屈荷重の関係

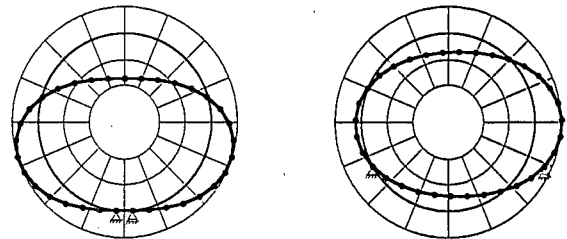


(b) 座屈モード

図-7 パターン B における座屈荷重 I と 1 次モード



(a) 円形リングの部材数と座屈荷重の関係



(b) 座屈モード

図-8 パターン A とパターン B における座屈荷重 II と 2 次モード

(3) 考察

図-6 に示した結果から、等方圧縮される円形リングにおいて、線形座屈解析により得られる結果と、有限変形解析により得られる結果がほぼ一致することが確認された。この結果より、パターン B については、有限変形解析に比べて簡便な線形座屈解析のみを行った。

ここで、図-9 に 2 部材のトラスにおける座屈形状の例を示す。図-9(a)に示すように、背の高いトラスでは横方向に倒れる座屈を生じ、図-9(b)のように、扁平なトラスでは対称性を保った座屈を生じる。この背の高いトラスと扁平なトラスの関係と同様の関係が、ここで行った解析の境界条件にもあると考えられる。すなわち、支点を設けることによって、図-9(a)に示した背の高いトラスと同様の境界条件となっていると考えられる。また、このような境界条件となることで、転倒するような座屈を生じる場合には、対称性を保って座屈する場合に比べて、小さな荷重で系が不安定となり、そのため座屈荷重 I が理論値に比べて小さな値となっていると考えられる。また、パターン A とパターン B で座屈荷重が異なるのは、支点位置がより下方に位置することで、パターン A の方がより小さな荷重で系が不安定となるためと考えられる。

これに対し、図-8 で示された結果から、座屈荷重 II に関しては、パターン A とパターン B で完全に一致し、また、パターン A、パターン B ともに 2 次モードは、楕円状に押しつぶされたような対称な形状となっており、理論解の座屈モードである

楕円形状を的確に表現していると考えられる。このことから、図-8 で示された結果では、図-6、図-7 で示された結果と異なり、境界条件による水平方向の非対称性の影響を受けていないと考えられる。そこで、図-8 で示された座屈荷重Ⅱと2次モードを、それぞれ理論における座屈荷重と座屈モードと比較することによって、このモデルの妥当性を検証する。2次モードは理論における座屈モードを的確に表していると考えられるが、座屈荷重Ⅱは理論値よりも大きな値となり、さらにはパターンBにおける座屈荷重Ⅰよりも理論値との差が大きくなっている。このように座屈荷重Ⅱが理論値よりも大きくなる要因については、現在検討している。

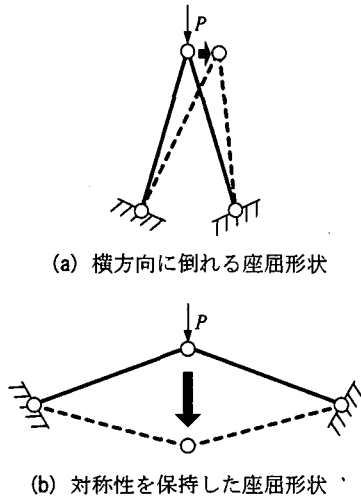


図-9 2部材のトラスにおける座屈

3. 地盤反力を考慮したトンネル覆工の座屈解析

3.1 概説

地盤反力は、「剛棒—ばねモデル」⁴⁾と同様に地盤ばねで表現している。ただし、実地盤では地盤反力は引張力として作用しないが、本研究では、地盤反力が引張力としても作用するものとしている。図-10に、地盤反力を考慮した場合の解析モデルを示す。図-10に示すように、全ての節点に地盤ばねを設け、固定支点は設けていない。また、外力として、円形リングに等方圧縮荷重を与えた場合と、外力の鉛直成分よりも水平成分を小さくした場合の2つのパターンを考える。そして、これらの条件下で行った解析結果を踏まえて、覆工周辺に地盤反力を考慮することによる、トンネル覆工の座屈挙動に与える影響を定性的に把握する。

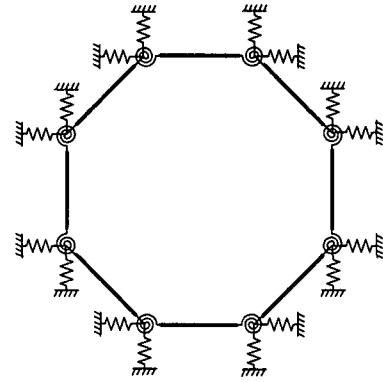


図-10 地盤反力を考慮した解析モデルの模式図

3.2 解析手法

ここでは、周辺地盤が均質であると仮定する。図-11に円形リングが等方圧縮される場合の節点*i*に生じる変位と地盤反力の関係を表す図を示す。リングが等方圧縮される場合、各節点に生じる半径方向の変位は等しい。このとき、地盤反力が各節点で等しくなるように地盤ばね定数を設定する。すなわち、各節点における半径方向の地盤ばね定数を全て*k*とする。図-11に示すように、地盤反力は変位と逆向きに生じるので、リングが等方圧縮される場合の、水平方向と鉛直方向の地盤反力はそれぞれ

$$F_{xi} = k_{hi} u_i = k_{hi} u_i \cos \theta_i' \quad (23a)$$

$$F_{yi} = k_{vi} v_i = k_{vi} v_i \sin \theta_i' \quad (23b)$$

と表される。ただし、 F_{xi} は水平方向地盤反力、 F_{yi} は鉛直方向地盤反力、 k_{hi} は節点*i*における水平方向地盤ばね定数、 k_{vi} は節点*i*における鉛直方向地盤ばね定数、 u_i は節点*i*における水平方向変位、 v_i は節点*i*における鉛直方向変位、 θ_i' は節点*i*において半径方向と水平方向のなす角である。また、半径方向に作用する力は

$$F_i = k w_i \quad (24)$$

と表される。ただし、 F_i は半径方向の地盤反力、 w_i は半径方向への変位である。式(23a)、(23b)、(24)より

$$F_i = k w_i = \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2} = \left(\sqrt{k_{hi}^2 \cos^2 \theta_i' + k_{vi}^2 \sin^2 \theta_i'} \right) \cdot w \quad (25)$$

$$\text{ただし、 } w_i^2 = u_i^2 + v_i^2$$

という関係式が得られ、さらに式(25)より、

$$k = \sqrt{k_{hi}^2 \cos^2 \theta_i' + k_{vi}^2 \sin^2 \theta_i'} \quad (26)$$

という条件式が得られる。式(26)を満たす解の1つとして、本解析では水平方向地盤ばね定数、鉛直方向地盤ばね定数を

$$k_{hi} = k_{vi} = k \quad (27)$$

とする。ただし、式(27)に示すように地盤ばね定数を定めることによって、各節点では全ての方向の変位に対して、等価な地盤反力を生じる。

このような均質地盤を考える場合、覆工に変形が生じて地盤ばね定数は変化しないので、地盤反力に幾何学的非線形性は生じない。つまり、地盤反力は幾何剛性行列には影響を与えず、剛性行列にのみ影響を与える。ここで、式(25)を各節点において考えたものをまとめると

$$\mathbf{F} = K_S \Delta \mathbf{u} \quad (28)$$

$\mathbf{F}$: 地盤反力ベクトル

$$K_S = \begin{bmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{bmatrix}$$

と表される。式(28)により表される地盤反力を考慮すると、式(13)で表される有限変形のつり合い式は

$$(K_E(\alpha) + K_S(\alpha)) \Delta \mathbf{u} + K_G(\alpha) \Delta \mathbf{u} = \Delta \alpha \mathbf{P} \quad (29)$$

と表される。本節では、式(29)で表される有限変形のつり合い式を用いて、線形座屈解析と有限変形解析を行う。

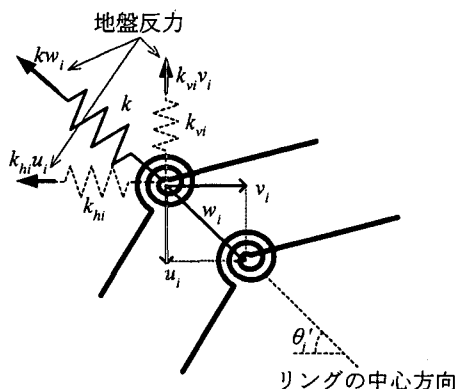


図-11 円形リングが等方圧縮される場合の節点iに生じる変位と地盤反力の関係

3.3 解析条件

図-12に示すような分布荷重を本解析モデル(円形リング)に作用させる。つまり、節点iにおいて図-13に示すように外力を作用させる。鉛直方向には、円形リングを等方圧縮する場合の鉛直成分を、水平方向には円形リングを等方圧縮する場合の水平成分を \$K_0\$ 倍 (\$K_0 = 0.5, 1.0\$) した荷重を作用させる。

本節においても式(2)に示す理論値によって規準化した座屈荷重を求め、円形リングに関するパラメータとして、覆工厚と半径の比を \$1/50\$ とした。また、地盤ばね定数は、図-14に示すモデルを用いて規準化して表した。図-14(a)に示すように、長さ \$R\$、曲げ剛性 \$EI\$ の片持ちばりの自由端に、変位 \$\delta\$ が生じるような荷重 \$P\$ は、

$$P = \frac{3EI}{R^3} \delta \quad (30)$$

と表される。図-14(b), (c)に示すように、水平方向地盤ばねと鉛直方向地盤ばねを円形リングと同じ曲げ剛性 \$EI\$ の片持ちばりで表す。このとき、A点における水平変位 \$u\$ と鉛直変位 \$v\$ を用いると、水平方向地盤反力と鉛直方向地盤反力は、それぞれ

$$F_x = \frac{3EI}{R^3} u = k_0 u \quad (31a)$$

$$F_y = \frac{3EI}{R^3} v = k_0 v \quad (31b)$$

$$\text{ただし、} k_0 = \frac{3EI}{R^3} \quad (31c)$$

と表される。ここで、式(31c)で示される \$k_0\$ を用いて地盤ばね定数を規準化する。また、ここでは \$k/k_0 = 0.01 \sim 2.0\$ における座屈荷重と座屈モードを求める。

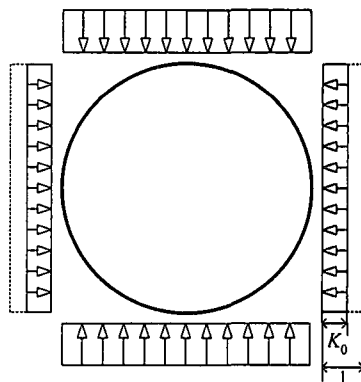


図-12 円形リング全体で考えた外力の考え方

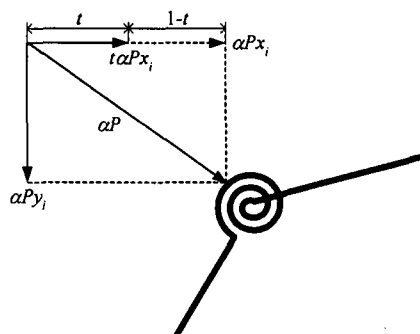
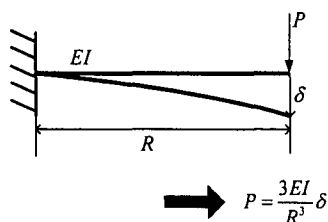
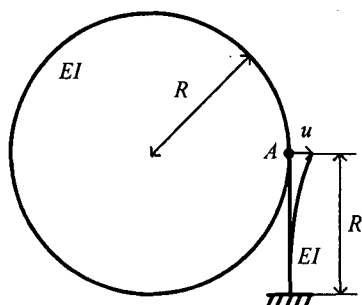


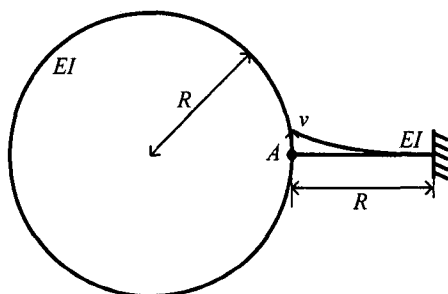
図-13 節点*i*における外力の与え方



(a) 規準となる片持ちばり



(b) A 点の水平変位に対する地盤ばねの規準を表すモデル



(c) A 点の鉛直変位に対する地盤ばねの規準を表すモデル

図-14 地盤反力を規準化するモデルの模式図

3.4 解析結果と考察

ここでは、側圧係数が 1.0 と 0.5 の場合について、線形座屈解析と有限変形解析を行った。図-15 に座屈荷重と地盤ばね定数の関係を示す。図-15 の縦軸には規準化した座屈荷重を取り、横軸には式(31c)を用いて規準化した地盤ばね定数を取っている。また、図-16 に側圧係数が 1.0 の場合の地盤ばね定数と座屈直前の軸力の関係を示す。図-16 の縦軸には式(3)で示した理論解における座屈時の軸力によ

って規準化した軸力を取り、横軸には規準化した地盤ばね定数を取っている。また、表-1 に座屈モードを示す。表-1(a), (c) には側圧係数が 1.0, 0.5 の場合の線形座屈解析の結果を示し、表-1(b), (d) には側圧係数が 1.0, 0.5 の場合の有限変形解析の結果を示す。ここで、初期状態において円形リングの最下部にある 2 つの節点を大きな黒丸で表し、座屈形状における各節点の位置を把握する。

図-15 より、地盤ばね定数が非常に小さい場合 ($k/k_0=0.01$) には、いずれの場合も座屈荷重は非常に小さな値となっている。このとき、円形リングと周辺地盤との間の摩擦が非常に小さくなっていると言える。つまり、円形リングと周辺地盤との間の摩擦が非常に小さな値となる時には、円形リングの構造自体が外力によって不安定になるよりも先に、円形リングと周辺地盤との境界が不安定となり、剛体的な回転による座屈を生じていると考えられる。また、ここで生じている剛体的な回転は、地盤ばね定数が大きな場合にも生じていると考えられる。

図-15 より、側圧係数が 1.0 の場合には、線形座屈解析と有限変形解析における座屈荷重は、各地盤ばね定数においてほぼ一致している。側圧係数が 0.5 の場合には、線形座屈解析と有限変形解析における座屈荷重に差異が見られる。しかし、側圧係数が 1.0 の場合も 0.5 の場合も地盤ばね定数が大きいほど、座屈荷重は大きくなっている。また、図-16 より地盤ばね定数が大きいほど、座屈直前の軸力が大きくなっていることが分かる。よって、周辺地盤が硬くなるほど覆工は座屈に対して安定化し、さらに、地盤反力は外力を受け持つだけでなく、構造自体を座屈に対してより強固なものにしていると考えられる。また、表 3-1(a), (b) より、側圧係数が 1.0 の場合には、線形座屈解析と有限変形解析における座屈モードは、各地盤ばね定数においてほぼ一致しており、側圧係数が 0.5 の場合には大きく異なっている。このように、側圧係数が 0.5 の場合に線形座屈解析と有限変形解析の解析結果があまり一致しない理由としては、以下のようなことが考えられる。線形座屈解析では座屈が生じるまでは有限変形を生じないものと仮定しており、側圧係数が 0.5 の場合には、座屈を生じるまでに有限な変形を生じているためと考えられる。側圧係数が 0.5 の場合に有限変形解析により求めた座屈モードについては、座屈以前の変形を取り除くと、線形座屈解析によって求めた座屈モードと同様の傾向を示しているとみなせる。すなわち、線形座屈解析と有限変形解析の座屈モードはそれぞれ以下に示すような形状となっている。線形座屈解析では、 $k/k_0=0.01$ の時に剛体的な回転をした座屈モードとなり、 $k/k_0=0.2-0.8$ の時に楕円形状の座屈モードとなり、 $k/k_0=1.0-2.0$ では Y 型となっている。有限変形解析では初期変形として横長の楕

円形状に変形していると考えられる。 $k/k_0=0.01$ の時に剛体的な回転をした座屈モードとなり、 $k/k_0=0.2\sim 1.0$ の時に楕円形状からさらに、真円から楕円形状に押しつぶすような方向に変形した座屈モードとなり、 $k/k_0=1.2\sim 2.0$ の時に楕円形状から Y 型に広がろうとした座屈モードとなっている。

地盤ばね定数が大きくなるに従って、座屈モードは複雑な形状を示している。ここで現れる座屈モードは、剛体的な回転、楕円形状、Y 型の 3 通りがある。これらの形状は、地盤反力を考慮しない場合の座屈モードに密接に関係していると考えられる。すなわち、地盤反力を考慮しない場合には剛体的な回転を生じる座屈モードは生じないが、楕円形状の座屈モードは 3.3 で求めた 2 次モードに一致しており、Y 型の座屈モードは 3 次モードとして予想されるモードである。

以上のことから、2つの解析手法によって、地盤反力を考慮した円形リングの座屈荷重と座屈モードに対して同様の傾向を示す結果が得られたと考えられる。また、地盤ばね定数が大きくなるほど、すなわち、周辺地盤が硬くなるほど座屈荷重は大きくなると言え、地盤反力は外力を受け持つだけでなく、構造自体を座屈に対してより強固なものにしていると考えられる。

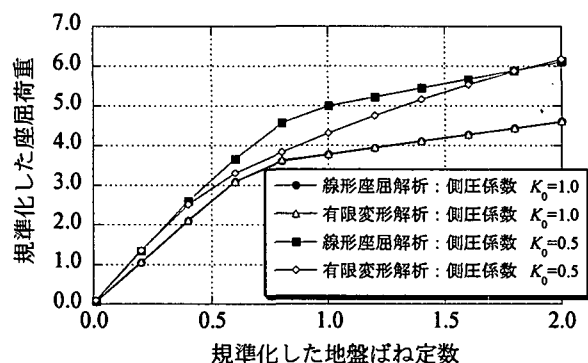


図-15 地盤ばね定数と座屈荷重の関係

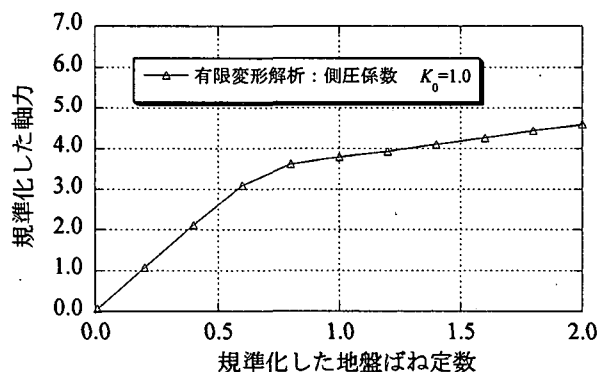
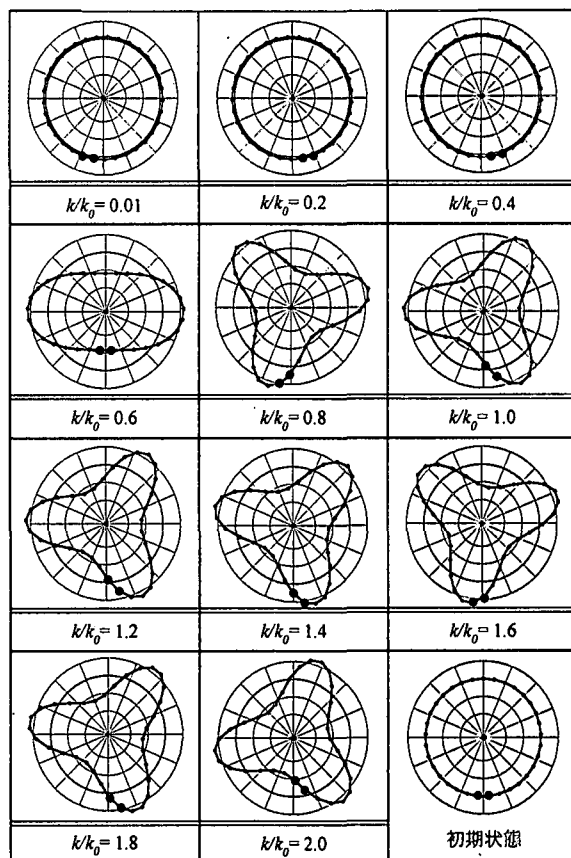


図-16 地盤ばね定数と座屈直前の軸力の関係

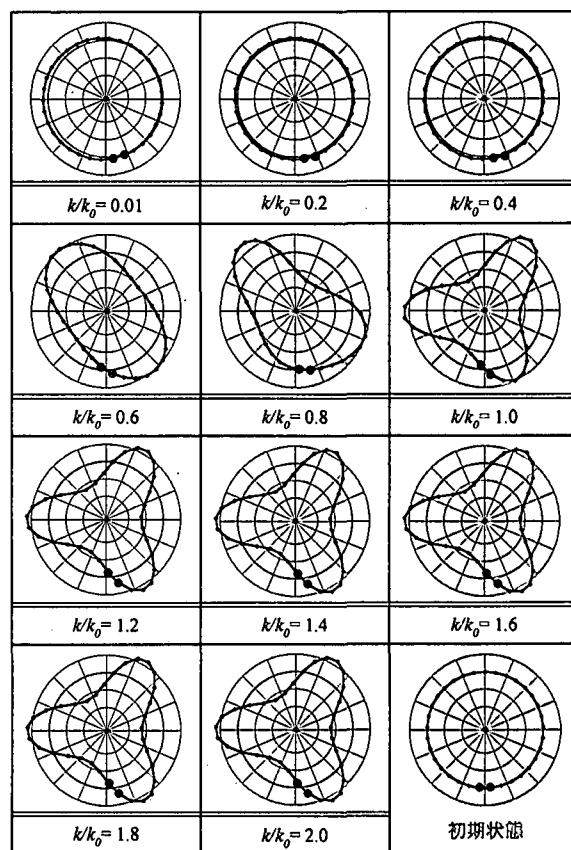
表-1 地盤反力を考慮した場合の座屈モード (1)

(a) 側圧係数: $K_0 = 1.0$ 線形座屈解



●: 初期状態における下部節点

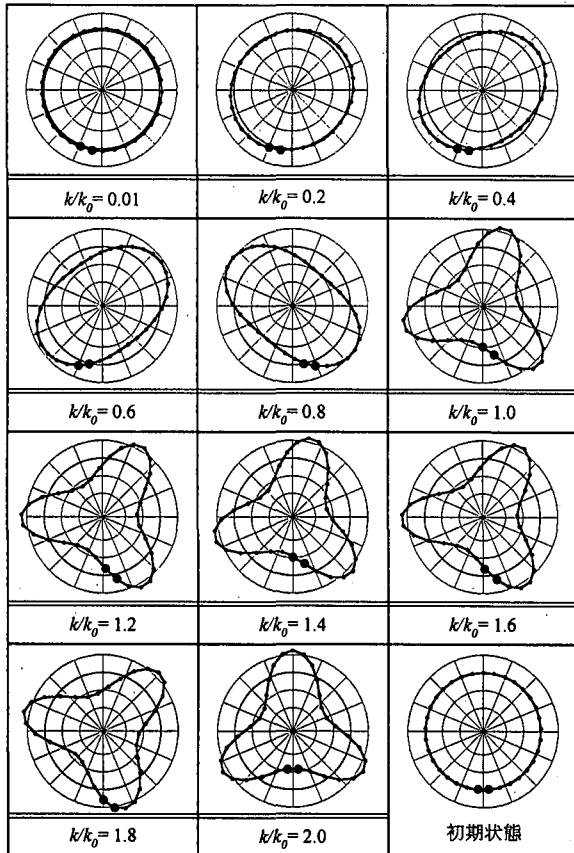
(b) 側圧係数: $K_0 = 1.0$ 有限変形解析



●: 初期状態における下部節点

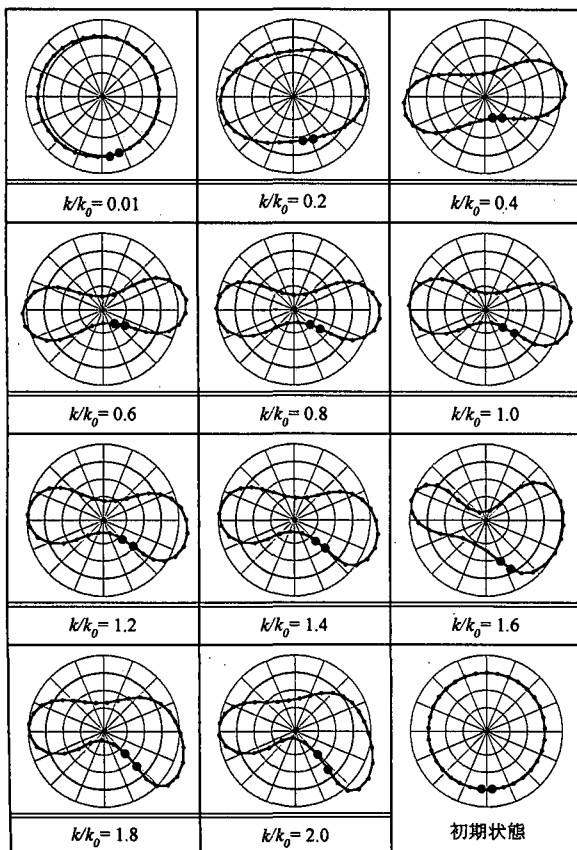
表-1 地盤反力を考慮した場合の座屈モード (2)

(c) 側圧係数: $K_0 = 0.5$ 線形座屈解



●: 初期状態における下部節点

(d) 側圧係数: $K_0 = 0.5$ 有限変形解析



●: 初期状態における下部節点

4. まとめ

- 1 等方圧縮される円形リングの座屈に関する数値解析結果と理論解を比較した結果、座屈荷重 I は理論値よりも小さくなり、座屈荷重 II は理論値よりも大きくなった。しかし、2 次モードは理論解を的確に表現していた。よって、本解析モデルは理論解を定性的に表現し得ると言える。
- 2 覆工周辺の地盤が硬いほど、覆工は座屈に対してより安定化する。
- 3 地盤反力は外力を受け持つだけではなく、覆工構造自体の座屈に対する安定性を増していると考えられる。

参考文献

- 1) 谷本親伯: NATM-1, 森北出版, pp.1-6, 1986.
- 2) 池田清宏, 室田一雄: 構造系の座屈と分岐, コロナ社, pp.5-17, pp.74-98, 2001.
- 3) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: *Theory of Elastic Stability (2nd Edition)*, McGraw-Hill, pp.278-302, 1963.
- 4) 田村武, 足立紀尚, 梅田昌彦, 岡部哲也: 吹き付けコンクリートの支保機構に関する数値解析的評価, 土木学会論文集, No.603/III-44, pp.11-20, 1998.
- 5) 田村武: 連続体力学入門, 朝倉書店, pp.137-140, 2000.
- 6) 田村武: 構造力学—仮想仕事の原理を通して—, 朝倉書店, pp.10-11, 2003.

(2003 年 4 月 18 日 受付)