

工学材料の異方的挙動の簡易な表現方法：修正応力法の地盤材料への適用

A Simple Method for Description of Anisotropic Behavior of Engineering Materials:
Modified Stress Method with an Emphasis on Geomaterials

飛田善雄* 山口晶** 藤井伸晃***, 金原瑞男***

Yoshio TOBITA, Akira YAMAGUCHI, Nobuaki FUJII, and Mizuo KANAHARA

*正会員 東北学院大学工学部教授 環境土木工学科 (〒985-8537 多賀城市中央 1-13-1)

**正会員 東北学院大学工学部講師 環境土木工学科 (〒985-8537 多賀城市中央 1-13-1)

***学生会員 東北学院大学大学院工学研究科 土木工学専攻前期 2 年の課程 (同上)

The eminent effects of anisotropy on mechanical properties are frequently reported, and the corresponding constitutive models are proposed. In some cases the resultant constitutive models failed to satisfy the fundamental requirements and the effects of anisotropy are formulated in an arbitrary and inappropriate manner. In this paper the consistent formulation of the anisotropic behaviors is discussed based on the modified stress method, the features of the method are simple, consistent, and mathematically well defined. Some examples of the modified stress method are discussed with an emphasis on frictional geomaterials.

Key Words: modified stress, anisotropy, constitutive model, yield function, elasto-plasticity,

1. はじめに

工学材料は異方性の影響を強く受ける。材料挙動を弾塑性体として表現したときには、降伏曲面は初期異方性の影響を受け、また塑性変形に伴い降伏曲面は拡大・縮小（等方硬化モデルで表現される）や中心の移動（移動硬化モデルで表現される）ばかりでなく、降伏曲面の変形や回転も伴うことが知られている^{1),2)}。また、塑性変形に伴う内部構造の変化により、微小変形時の弾性的挙動も一般には異方的挙動を示すようになる³⁾。異方的な性質を適切に表現することは、材料の適切な構成モデルの構築に必要なばかりでなく、境界値問題の解の一意性の喪失（せん断帯の発生など）安定性の議論などにも重要になる。場合によっては、弾性係数の異方性を適切に取り入れることで、せん断帯の発生条件は大きく変わってしまう⁴⁾。

材料の内部構造に起因する異方性の影響を適切に表現することは、様々な場面で重要になる。金属材料の分野では、簡便にかつ数学的に厳密な形で異方性の影響を降伏関数や応力・ひずみ関係に取り入れる方法として、変換応力(Transformed stress)が用いられてきた（例えば、Boehler (1987)⁵⁾）。地盤力学の分野でも、砂のような粒状体を対象として、修正応力(Modified stress)が提案された^{6),7)}。これらの研究以前に、Ghaboussi and Momen(1982)⁸⁾は、初期異方性の

影響を表す応力を定義し、独特の異方性弾塑性モデルを提案している。数学的観点からは変換応力と修正応力の間を区別すべき理由はない。両者ともに、内部構造を表現する構造テンソルや構造を特徴づけるベクトルのデッド積を用いて、釣り合い式とは関係しないという意味での仮想的な応力を導入しているという点で共通している。ここでは、粒状体力学の分野での通称になっている修正応力という用語を用いるが、変換応力と読み替えても全く問題はない。物性的議論から導入された修正応力は、テンソル関数としての必要条件である等方関数の表示定理を用いて、その一般的形式が表現できる。

この修正応力を用いて、材料の異方的性質を構成モデルとして表現することになる。極めて簡単な数学的構成とするために、以下のような便宜的な方法を考えることにする（図-1 参照）。

- 1) 修正応力空間では、簡単な構成関係が成立する。例えば、等方弾性体の関係、等方的降伏関数などを考える。
- 2) 修正応力を応力に変換して、応力空間で考えたとき、応力ひずみ関係や等方的降伏関数は、修正応力を与える変換マトリックスの中に、内部構造の情報をもつ構造テンソルなどが含まれることにより、異方的性質を表現することになる。

異方性をこのような代数的演算で簡単に表現する方法を、ここでは「修正応力法」と呼ぶことにする。修正応力法は異方性を表現する数学的方法の部分集合に過ぎないから、絶対的な方法とはいえない。常に、実験事実との適合性の検討が必要になる。しかし、本文で議論するように、簡便な方法であるにも関わらず、修正応力法は過去に提案された金属材料に対する異方的な降伏条件と等価な表現を与える。また、土のような摩擦材料に対して提案された異方的降伏関数も、修正応力法として理解することができ、かなり一般性を有する方法であることがわかる。

初期異方性や応力誘導異方性など、その原因が異なり、発展則（モデル）が異なる場合でも、2回の変換を実施することで、より複雑な修正応力を定義し、直交異方性以上の複雑な異方性を表現することも可能となる。工学材料の異方性を適切に表現する上で極めて便利な方法といえる。

本論文では、直交座標系に対する指標表記と直接表記の両者を用いる。直接表記の定義については、一部の式を両者で併記することにより与える。特に断りなく、指標表記における総和規約を用いる。応力・ひずみの符号は、右手座標系の正の方向に正の値が一致するように、引っ張りを正とする。本研究では、数値計算には Mathematica 4.2 を利用している。

2. 修正応力と異方性

修正応力に関する一般的な議論を行い、修正応力法の基本的な意味を与える。最後に修正応力を定義する変換マトリックスに必要とされる数学的性質について説明する。

2.1 修正応力に関する基本的議論

修正応力は、物性的には内部構造の配置を反映した応力と考えることができる。例えば、Tobita and Yanagisawa(1992)⁷⁾は、粒状体力学の分野で、粒子同士の接触面積の分布が異方的であることに着目し、任意の面における平均的接触面積をコンタクトテンソルより求め、その平均的接触面積に対して修正応力を考えるという操作により、次式で定義される修正応力を定義した。

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} + \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}); T_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik}H_{kj} + H_{ik}\sigma_{kj}) \quad (1)$$

ここに、構造テンソルを $\mathbf{H}$ 、通常の応力を $\boldsymbol{\sigma}$ と表し、修正応力を $\mathbf{T}$ としている。構造テンソルの定義や物性的議論による修正応力については飛田（1993）⁹⁾ および小田（2002）¹⁰⁾により詳しい説明が与えられている。このような修正応力を数学的に一般化すれば、次式で定義できる。

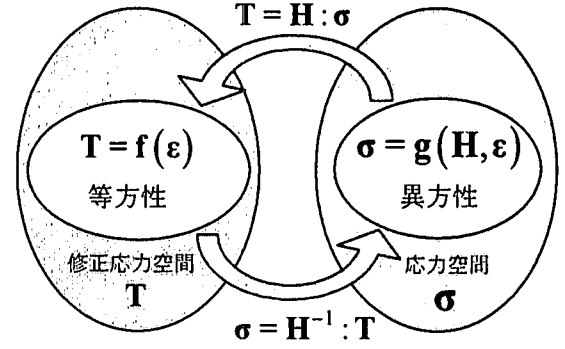


図-1 修正応力法による異方性の表現

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}); T_{ij} = f_{ij}(\sigma_{ij}, H_{ij}) \quad (2)$$

式(2)の関係式に対して、等方関数の表示定理を用いると、次式が得られる^{11),12)}。

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & a_1 \mathbf{I} + a_2 \mathbf{H} + a_3 \boldsymbol{\sigma} + a_4 \mathbf{H}^2 + a_5 \boldsymbol{\sigma}^2 \\ & + a_6 (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + a_7 (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{H}) \\ & + a_8 (\mathbf{H}^2 \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}^2) + a_9 (\mathbf{H}^2 \boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{H}^2) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)に対して、応力に対する線形性を要求すると、応力の2次の項は消えて、さらに応力が存在する項を明確に表現して、その最終的結果を表現すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \left[h_1 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + h_2 \text{tr}(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}) + h_3 \text{tr}(\mathbf{H}^2 \boldsymbol{\sigma}) \right] \mathbf{I} \\ & + \left[h_4 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + h_5 \text{tr}(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}) + h_6 \text{tr}(\mathbf{H}^2 \boldsymbol{\sigma}) \right] \mathbf{H} \\ & + \left[h_7 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + h_8 \text{tr}(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}) + h_9 \text{tr}(\mathbf{H}^2 \boldsymbol{\sigma}) \right] \mathbf{H}^2 \\ & + h_{10} \boldsymbol{\sigma} + h_{11} (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + h_{12} (\mathbf{H}^2 \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}^2) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、係数 $h_i (i=1,2,\dots,12)$ は、構造テンソル $\mathbf{H}$ の不変量 $\text{tr}(\mathbf{H}), \text{tr}(\mathbf{H}^2), \text{tr}(\mathbf{H}^3)$ のスカラー関数である。実際に使用される修正応力は、式(4)の幾つかの項を取り出したものとなる。

構造テンソルを1つだけ含む場合に表現できる異方的性質は次の通りである：1) その主値が3つとも異なる場合には、直交異方性、2) 3つのうち2つが同じ値の時には、横断等方性、3) 3つとも同じ値の時には、等方性を表現することになる¹³⁾。主軸方向の異なる2つ以上の構造テンソル（地盤材料の初期異方性と応力誘導異方性を同時に考えた場合には、主軸の異なる2つの構造テンソルを導入が必要になる）により、2回変換を行って修正応力を定義した場合には、直交異方性よりも複雑な異方性が表現できる。

指標表示や直接表記は、式の演算の上では便利であるが、直感的には理解しにくい表現である。このため、等長変換を用いて^{11),12)}、ベクトルマトリックス表現を行うと、構造テンソルを一つ含む修正応力

を与える式として、構造テンソルの主軸方向を座標系として選択したとき、次式の表現が得られる。

$$\{T_\alpha\} = [H_{\alpha\beta}] \{\sigma_\beta\}; (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6) \quad (5)$$

$$[H_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [H_{NN}] & [H_{NS}] \\ [H_{SN}] & [H_{SS}] \end{bmatrix}$$

$$[H_{NN}] = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} + B_{33} \end{bmatrix},$$

$$[H_{SS}] = \begin{bmatrix} B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & C_{31} & 0 \\ 0 & 0 & C_{12} \end{bmatrix}, [H_{NS}] = [H_{SN}] = [0]$$

$$A_{ik} = h_i + h_i h_k + h_2 h_k + h_7 h_i^2 + h_5 h_i h_k + h_3 h_k^2 + h_6 h_i h_k^2 + h_8 h_i^2 h_k + h_9 h_i^2 h_k^2$$

$$B_{ij} = h_{10} + h_{11} \left(\frac{h_i + h_j}{2} \right) + h_{12} \left(\frac{h_i^2 + h_j^2}{2} \right)$$

ここに、下指標の N は垂直応力成分に関係し、S はせん断応力成分に関係することを意味している。

$h_i (i=1, 2, 3)$ は構造テンソルの主値を表している。本文では、できる限り式 (5) のようなベクトル・マトリックス表現を利用し、直感的な理解を促す。

この論文では、材料の異方的構造や劣化を反映する仮想的応力を修正応力と考えることにする。Nakai は、中間主応力の影響を自動的に表現する応力を定義し、修正応力 t_{ij} と表記している¹⁴⁾。Nakai の t_{ij} は、その導入過程で最大活動面 (SMP) の単位法線ベクトルの値を主値とする変換テンソルを考えている。ベクトルの方向余弦を 2 階のテンソルの主値とするという処理は、数学的には必ずしも適切とはいえない。しかし、Nakai のモデルでは、座標軸は主応力軸方向に取ることを暗黙のうちに了解しているので、実際上の問題は生じない。この数学的取り扱いの欠点を消去する方法は、Oka によって議論され、SMP の単位法線ベクトルのデアド積を用いたモデルが議論されている¹⁵⁾。Nakai の t_{ij} は材料の異方性とは関連性はなく、材料としては等方性であることであることには注意が必要である。(モデルは、新たな内部変数を導入し、異方性を表現できるように拡張されている¹⁶⁾)。

2.2. 修正応力法による異方性の表現

修正応力を利用して、降伏曲面の異方的硬化や異方的な応力・ひずみ関係を表現することになる。最も簡単な 2 つの例題により説明すれば、修正応力法の意味は理解できる。ここでは、具体的な表現を与えることなく、形式的な議論を行う。

最初の例として、修正応力空間で等方弾性体を考

える。そのときの一般式は、等長変換を用いたベクトル・マトリックス表現により次式で与えられるものとする。(工学ひずみによりひずみベクトルを表現する Voigt 表現でも議論は変わらないが、本文では等長変換を用いた記述を行う。)

$$\{T\} = [E^e]_I \{\varepsilon\} \quad (6)$$

弾性マトリックスの指標 I は、等方弾性に対する剛性マトリックスであることを示している。修正応力は式(5)で与えられるものとする、形式的に次式が得られる。

$$[H]\{\sigma\} = [E^e]_I \{\varepsilon\} \quad (7)$$

式(7)の両辺に $[H]^{-1}$ を掛けて、整理すると、次式が得られる。

$$\{\sigma\} = [E^e]_A \{\varepsilon\} = [H]^{-1} [E^e]_I \{\varepsilon\}, \quad (8)$$

$$[E^e]_A = [H]^{-1} [E^e]_I$$

異方性を示す弾性マトリックスが、等方弾性と変換マトリックスの逆マトリックスとの積の形で表現できることがわかる。

降伏関数のようなスカラー関数に異方性を導入する方法について考えてみる。構造テンソルを基本とする詳しい議論は、小田(2002)¹⁰⁾とそこに収録されている文献が参考になる。修正応力空間で等方的な降伏条件を考える。その降伏関数は表示定理により、修正応力の不変量で表現される。例えば、次のような表現になる。

$$f(T) = C \Rightarrow f(I_1^*, J_2^*, J_3^*) = C \quad (9)$$

ここに、 I_1^* は修正応力の 1 次不変量、 J_2^*, J_3^* は修正応力における偏差応力 $S^* = T - (1/3)tr(T)I$ の 2 次および 3 次の不変量である。異方的降伏関数を得るには、修正応力の定義式を式(9)に代入するだけで得られることになる。

このように、修正応力法によれば、異方的挙動を表現するためには、単なる代入やマトリックス積の演算という線形代数の基本演算だけが必要となる。

2.3. 変換マトリックスの制約条件の検討

非線形構成モデルに対しては、次の 2 つの条件を満足しなければいけない。

- 1) 客観性の原理と基準枠無差別性の原理
- 2) 熱力学第 2 法則の帰結としての、散逸エネルギー正の法則

修正応力法は、客観性の原理を満たす力学量さえ選択すれば、等方関数の表示定理 (基準枠無差別性の原理を満足している) を利用した方法であるから、

1) は満足する。2) は経験的に繰り返し載荷時のヒステリシス挙動を適切に表現できれば満足できる。この2つ以外の条件は、境界値や初期値問題などの数値問題に応用したとき、安定した解を得るための便宜的条件（例えば、最大塑性仕事の原理、接線剛性マトリックスの正定値性、ポテンシャル関数の存在の仮定など）と考えることができる。

修正応力法は、基本的には仮定した変換がどの程度目標とする挙動を表現するかという観点でその適切さを検討すべき方法である。しかし、挙動表現の巧拙に頼らなくても、適切な変換となるための目安となる便宜的な数学的条件が存在するはずである。その性質を議論する。

応力速度と（それに共役な）ひずみ速度の関係を与える瞬間（接線）剛性マトリックスは、通常安定な唯一解を求めようとする場合には、正定値性を満足すべきと考えられる。正定値性を満足しない場合には、分岐や不安定をもたらすことになる。修正応力法では、解の分岐や不安定性は、変換マトリックスが非弾性変形の進行に伴って数学的性質を変化させることによってもたらされる。内部構造の変化と変換マトリックスの変化は直結しているので、変換マトリックスと解の分岐や不安定性の問題は今後の興味ある課題となる。しかし、このことを議論できるほどには研究が進んでいないので、ここでは議論を安定な唯一解を求める問題に議論を限定する。

修正応力法を用いて、異方性を含んだ形で剛性マトリックスが得られたとき、その剛性マトリックスは安定な唯一解を得るためには正定値性を満足すべきことになる¹⁷⁾。正定値性は、最小固有値が正という条件で与えられる。この条件は線形代数学の標準的手法で確認することができる。より便宜的な方法としては、変形初期では全ての固有値が正で、剛性マトリックスの行列式が正となっている。最小固有値が正から0あるいは負となる条件は、行列式が0あるいは負となる条件と同じであるから、剛性マトリックスの行列式を確認してもよい。さらに、式(8)₂の関係式より、異方性を考慮した剛性マトリックスは、等方弾性と変換マトリックスの逆マトリックスとの積で与えられる。線形代数学の基本定理：「 $[A], [B]$ を n 次の正方マトリックスとすると、行列式 $|AB|$ はそれぞれの行列式の積 $|A||B|$ に等しい」¹⁸⁾を用いれば、変換マトリックスの行列式が正という条件を検討すればよいことになる。5節に示す例題では、この条件の検証を行っている。

3. 修正応力法から見た既存の異方硬化モデル

過去にも様々な考察により異方的降伏条件や異方的応力・ひずみ関係が提案されてきた。これらの

異方的関係式を修正応力法の観点から考察する。

金属材料の異方的硬化則と地盤材料の異方的硬化則：回転硬化について考察を行う。

3.1 金属材料の異方硬化則に対する検討

金属材料では、塑性降伏が拘束圧に依存しないことが知られている。そのような材料の塑性変形に伴う複雑な変化を示す降伏条件を表現するために用いる修正応力 T は、拘束圧依存性を示さないという条件を満たすことが必要になる。この条件は、修正応力 T と（通常）応力 σ との変換に制約条件を与える。

修正応力空間において、修正応力 T の偏差応力 S^* のみで降伏条件を定義すれば、修正応力空間においては、拘束圧依存性を示さないことになる。偏差応力 S^* を変換した結果として、通常応力空間において偏差応力 s のみに変換されるのであれば、応力空間においても拘束圧依存性を示さない降伏条件が得られることになる。一般的な議論としては、修正応力空間で拘束圧依存性を示しても、通常応力空間へ変換した際に、偏差応力のみになるような降伏条件であれば、拘束圧非依存性を満足することになるが、物理的意味が明確でないので、ここでは、偏差応力と静水圧がそれぞれ独立に変換される条件を考えることにする。

応力から修正応力への変換の一般的な線形関係式を次式で与える(式(4)と同等の表現である)。

$$T = L : \sigma; T_{ij} = L_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (10)$$

L_{ijkl} は、構造テンソルの関数として定義される。

それぞれの応力を偏差成分と等方成分に分割することは一意的に行える。

$$\begin{aligned} T &= S^* - P^* I; T_{ij} = S^*_{ij} - P^* \delta_{ij}, \\ \sigma &= s - p I; \sigma_{ij} = s_{ij} - p \delta_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $P^* = -\text{tr}(T)/3$, $p = -\text{tr}(\sigma)/3$ で定義される。式(11)に、 s と pI のみを作用させた特殊な場合を考える。

$$\begin{aligned} T &= L : s; T_{ij} = L_{ijkl} s_{kl}, \\ T &= L : pI; T_{ij} = L_{ijkl} p \delta_{kl} \end{aligned} \quad (12)$$

このとき、次の2つの条件が満足されるような変換を考えることにする。

条件1: 偏差応力のみを作用させた場合には、偏差応力のみが修正応力として現われる。すなわち、 $\text{tr}(L : s) = 0$, $L_{ppkl} s_{kl} = 0$ が成立する。

条件2: 等方応力のみを作用させた場合には、等方応力のみが修正応力として現われる。すなわち、 $P^* I = L : pI$; $P^* \delta_{ij} = L_{ijkl} p \delta_{kl}$ が成立する。

まず、**条件1**について考える。偏差成分を明確に

表示するために、式(4)の生成元の H を偏差成分 H^D と等方成分 $(1/3)\text{tr}(H)I$ の和として表現し、その結果を整理し、構造テンソルの不変量の関数で与えられる係数を付け直すと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} T = & \left[h_1^* \text{tr}(\sigma) + h_2^* \text{tr}(H\sigma) + h_3^* \text{tr}(H^2\sigma) \right] I \\ & + \left[h_4^* \text{tr}(\sigma) + h_5^* \text{tr}(H\sigma) + h_6^* \text{tr}(H^2\sigma) \right] H^D \\ & + \left[h_7^* \text{tr}(\sigma) + h_8^* \text{tr}(H\sigma) + h_9^* \text{tr}(H^2\sigma) \right] H^{D^2} \\ & + h_{10}^* \sigma + h_{11}^* (H^D \sigma + \sigma H^D) + h_{12}^* (H^{D^2} \sigma + \sigma H^{D^2}) \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)に対して、偏差応力 s を作用させたとき、偏差修正応力のみが現われる条件について考察する。次のいずれかの条件が満足されれば、条件(1)を満足する。

- ・偏差成分で表現されている項であること $\Rightarrow 4, 5, 6$ の指標をもつ項が存在できる
- ・偏差応力を代入することにより消えてしまう項であること $\Rightarrow 1, 4, 7$ の指標をもつ項が存在できる
- ・偏差応力で表現される項であること $\Rightarrow$ 指標 10 を持つ項が存在できる。

これらの条件を満足する項のみを表現すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} T = & \left[h_1^* \text{tr}(\sigma) \right] I + \left[h_7^* \text{tr}(\sigma) \right] H^{D^2} + h_{10}^* \sigma \\ & + \left[h_4^* \text{tr}(\sigma) + h_5^* \text{tr}(H\sigma) + h_6^* \text{tr}(H^2\sigma) \right] H^D \end{aligned} \quad (14)$$

次に、**条件 2**：等方応力を代入したときに等方応力のみを与える変換を考える。式(14)の応力 σ に等方応力 pI を与えたとき、修正応力の生成元が単位テンソル I であるための条件を考える。指標が 4, 6, 7 の項は I とはならないので、存在できない。指標 1 と 10 の項が残ることは容易に理解できる。さらに、指標 5 の項は、 $\text{tr}(H\sigma)$ が、 $\text{tr}(H^D \sigma)$ の形であれば、等方応力の代入により 0 となるので、この項は存在できることになる。等方応力が等方応力に変換される条件を、係数を変えて表現すると、次式の様になる。

$$T = \alpha \text{tr}(\sigma) I + \beta \sigma + \gamma \text{tr}(H^D \sigma) H^D \quad (15)$$

ここに、 α, β, γ は、構造テンソルの不変量の $\text{tr}(H), \text{tr}(H^2), \text{tr}(H^3)$ のスカラー関数として表現される。指標表示では、次式の表現となる。

$$T_{ij} = [\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + (\beta/2)(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma H_{ij}^D H_{kl}^D] \sigma_{kl} \quad (16)$$

過去に提案された異方的降伏関数は、石川により主要な関数がまとめられている¹⁾。それらの関数は修正応力空間で von-Mises(J_2)条件を仮定し、式(16)の修正応力を代入することにより、変数の置き換え(過

去の異方硬化則は、構造テンソルではなく、塑性ひずみテンソルを利用している)を行うことにより、再現できることが示される。式(16)を利用した拘束圧依存性のない異方的降伏条件の計算例は 5 節に示す。

移動硬化モデルを修正応力の観点から議論する。金属塑性理論では、背応力(内部構造を表現する)を利用して、修正応力が次式で定義される：

$$S^* = S - \beta; S_{ij}^* = S_{ij} - \beta_{ij} \quad (17)$$

$\text{tr}(\beta) = 0$ であるから、式(17)も偏差応力を偏差応力に変換している。しかし、この変換は式(16)の範疇には属していない。移動を表現する変換：式(17)をマトリックス形式で表現しようとすれば、マトリックスの次数を 1 つ上げて、次のような表現をすることになる¹⁹⁾

$$\begin{Bmatrix} S_1^* \\ S_2^* \\ \vdots \\ S_6^* \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & \beta_2 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 & \beta_6 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_6 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

全ての変換をマトリックスの次数を 1 つだけ上げて記述すれば、応力の移動も含めたマトリックス表現が可能となる。しかし煩わしい演算となる。本文では、応力の移動による修正応力は、最初の段階で処理し、その結果得られた修正応力に対して、式(15)に示す表現を用いて、降伏曲面の回転や変形をもたらすような修正応力を考えていくことにする。応力の移動による降伏曲面の中心の移動は、事前に処理するという考えで大きな混乱は生じない。

3.2 地盤材料に対する異方硬化則の検討

地盤材料に対して、その異方的硬化や挙動を表現するために利用されてきた方法を、修正応力の観点から議論する。

(1) Ghaboussi and Momen の異方硬化モデル⁸⁾

Ghaboussi and Momen は、修正応力の先駆けとなる弾塑性モデルを提案している。異方性を取り入れるために単位長さをもつ 2 階の対称テンソル α を導入し、次式の形で新たな応力分割を行い、異方性の影響を取り入れた。

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \text{tr}(\alpha \sigma) = \alpha_{ij} \sigma_{ij} \\ \bar{S} &= \sigma - \bar{I} \alpha; \bar{S}_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{I} \alpha_{ij} \end{aligned} \quad (19)$$

この定式化では修正応力は陽には表現されていない。静水圧に相当する大きさ $\bar{I}$ が異方性テンソルにより修正されるという定式化をおこなっている。等方応力軸を図-2 の様に回転させることにより、定式化を行っている。彼らの修正応力の特徴は、等方応力

軸の回転のみを与え、偏差応力をこの回転後の軸からの差として定義していることである。応力の分解は一意的ではないので、このような修正応力でもなんら問題は発生しない。しかし、一般性から言えば、修正応力空間で、その等方成分と偏差成分に分離する方法が優れているものと思われる。式(19)による定義は、修正応力として完全ではないが、異方性テンソルを導入して応力を変換して、これらの変換応力により異方的性質を示す弾塑性モデルを構築するという点では、修正応力の先駆けとして捉えることができる。

(2) 関口・太田および橋口による回転硬化モデルの数学的構造について

粘性土地盤の異方圧密の影響を表現するために、Sekiguchi and Ohta (1977)²⁰⁾は地盤が堆積した状態の初期応力状態を初期異方性を表現する変数として、次式を定めた（ここでは主として Hashiguchi(2001)²¹⁾による表記法を用いる事にする）。

$$\beta = (s/p)_0; \beta_{ij} = (s_{ij}/p)_0 \quad (20)$$

Hashiguchi らは、この考えを発展させ、式(20)で表現される変数に発展則を与え、繰返し塑性変形や主応力軸の回転時の挙動などを表現できるように拡張している²¹⁾。本文における議論では、構造テンソルの発展則についての議論は行わず、構造テンソルは、何らかの方法により与えられるものとして議論を進める。

1) 異方性を表現する降伏条件の定式化

異方性を表現する弾塑性モデルを定式化するに当たって、式(20)に示す内部変数を利用している。等方硬化モデルとしては、Cam-clay モデルや修正 Cam-clay モデルを考える。ここでは、2次元空間(p,q)で楕円となり、図形の回転や変形が理解しやすい修正 Cam-clay モデルを取り上げる。

等方硬化モデルに対する修正 Cam-clay モデルの降伏曲面は次式で定義される。

$$f(p, q) = p^2 + \frac{q^2}{M^2} = F(\epsilon_v^p) \quad (21)$$

ここに、 $p = -tr(\sigma)/3$, $q = \sqrt{(3/2)s:s}$, $\epsilon_v^p = -tr(\epsilon^p)$ であり、 F は塑性体積ひずみに基づく硬化関数である。Hashiguchi²¹⁾は、式(21)を新たな変数： η, χ を用いて、次式の様に表現した。

$$f(p, \chi) = p(1 + \chi^2) = F(\epsilon_v^p) \quad (22)$$

$$\chi = \|\eta\|/M; \eta = s/p$$

ここに $\|\eta\|$ はノルム（距離）を表現している。この等方モデルに異方性を導入するために、式(20)と同様の変数 β を用いて、次式の様に定義する。

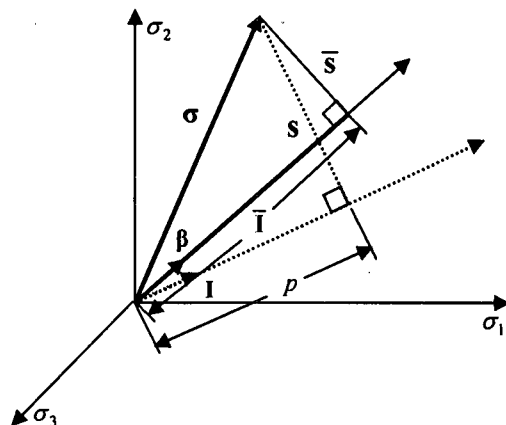


図-2 Ghaboussi and Momenの応力分割

$$\hat{\chi} = \|\hat{\eta}\|/M, \hat{\eta} = \eta - \beta \quad (23)$$

この式の特徴は、応力比 $\eta = s/p$ に対して、差という形で初期異方性の影響を取り入れていることである。

降伏曲面を回転させることにより初期異方性を表現するという回転硬化モデルが、修正応力の観点からどのような数学的構造をもっているのかを議論することは、回転硬化モデルの有用性から考えて重要なことである。図形表現が容易な2次元空間での議論を優先し、その結果を利用して6次元応力空間の議論を行うことにする。

2) (p,q)2次元空間での議論

地盤力学の分野では、拘束圧として p 、せん断力として q を利用する表現が多用される。式(21)で定義される様に、応力の1次および2次不変量に相当する量として定義されている。不変量はスカラー量であり、異方性を議論するにはこれらの量は不適切である（スカラー変数の内部変数を取り入れても、材料は等方性にすぎない）。2次元の図形として、降伏曲面を描くために、ここでは、3軸試験のみを対象とする応力状態（常に $\sigma_2 = \sigma_3$ となる）を考え、次式で、 p, q を定義する。ここでの議論では、応力の主軸と構造の主軸は常に一致することになる。一致しない場合は、平面図形としての表現はできない。

$$p = -(\sigma_1 + 2\sigma_3)/3, q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (24)$$

式(23)に相当する量は次式で定義される。

$$\hat{\chi} = \hat{\eta}/M, \hat{\eta} = \eta - \beta, \eta = q/p \quad (25)$$

回転硬化モデルの変換の特徴は、拘束圧 p に対しては変換を行っていないということである。せん断力 q のみが応力比 β の修正を介して変換されている。 p, q の変換をまとめマトリックス表現すると、次のようになる。変換後の p と q は、*をつけて表現する。

$$\begin{Bmatrix} p^* \\ q^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} \quad (26)$$

このマトリックスの形式は、 q 軸に沿ったせん断 (shear) を表現している¹⁹⁾。この変換により、 (p, q) 空間での正方形は、図-3 に示すように、 q 軸にせん断されたような平行四辺形に変換される。 q 軸は変更なく、 p^* 軸が $q = \beta p$ を満足するように変換され、直交性は満足しない変換であることもわかる。この変換マトリックスを極分解すると、変形部分と回転部分に分離することができ²²⁾、それぞれのマトリックスは、式(27)の様に表現される。

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} & \frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2+\beta^2}{\sqrt{4+\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}} & \frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}} \end{pmatrix} \quad (27)$$

1 番目のマトリックスが回転を表現し、2 番目のマトリックスが変形を表現している。変換マトリックスが変形と回転に分解できることにより、式(26)による変換は、一般的に図形の変形と回転の両者をもたらすことが理解できる。

図-4 に、等方を仮定した修正 Cam-clay モデルの降伏曲面の図形と β を $(1/3)$ (初期応力比を 0.4 に置いた場合) とした図形を重ねて描く。右の図は式(22)、(23)を満足する軌跡を求めている。左の図は修正応力法を利用して図を描いている。左の図の破線は、変形成分のみで変換を行った結果を示している。この図より容易に理解できるように、回転硬化モデルの変換則を表現する変換マトリックスは、降伏曲面の回転とともに変形も生じさせることがわかる。

式(26)の様に、修正応力への変換マトリックスを考えることにより、回転硬化モデルにおける変換の数学的構造を明確にすることができる。

2 次元空間での議論を参考にして、6 次元空間での議論を行う。まず、等方応力と偏差応力 6 個を独立に考える。等方応力と偏差応力の変換は次式で与えられ、応力比に対して修正を行っていることより、偏差応力と静水圧 p は連成している。

$$p^* = p, \quad s^* = s - \beta p \quad (28)$$

式(28)より、修正応力 T と応力 σ の関係を求めると、次式の様になる。

$$T = \sigma + (1/3)tr(\sigma)\beta; \quad T_{ij} = \sigma_{ij} + (1/3)\sigma_{kk}\beta_{ij} \quad (29)$$

式(4)の一般式と比較すると、式(29)は、 $h_{10} = 1$, $h_4 = (1/3)$, H を β に置き換えた場合に相当することがわかる。変換マトリックスとしては、極めて簡単な数学的構造を有していることがわかる。

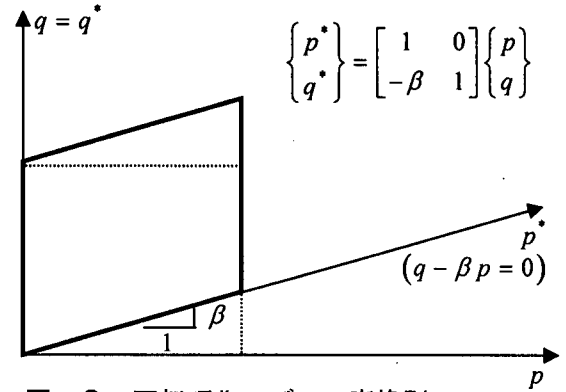


図-3 回転硬化モデルの変換則：shear

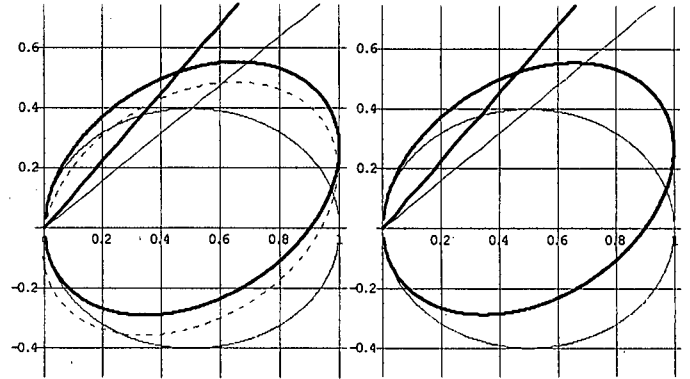


図-4 修正応力による回転硬化モデルの表現

「静水圧 p に対しては変換しない、摩擦性材料であることに着目して、偏差応力を修正するのではなく、応力比に対して修正を与えた方が適切である」という考察により、回転硬化モデルは提案されたが、修正応力の観点からは極めて簡単な変換則を利用した数学的処理となっている。その簡便性にも関わらず、地盤材料の多様な挙動を表現していることになる。

4. 摩擦材料と金属材料の修正応力の違い

これまでの議論でわかるように、金属材料に対する修正応力と摩擦材料である地盤材料の修正応力は、静水圧と偏差応力が連成する変換かどうかという点で、その性質を全く異にしている。これは材料の微視的な塑性変形メカニズムを反映した結果と考えることができる。

金属材料の場合には、準巨視的にはすべり面の運動が塑性変形を与えている。金属の単結晶レベルでの塑性変形の微視的メカニズムとひずみ硬化に関する基礎的事項をまとめれば、以下の様になる (例えば、石川(2000)¹⁾, Asaro(1983)²³⁾)。

- ・ 金属の結晶を塑性変形させたとき、外形の変化として規定されるマクロなひずみは、転位がその結晶の中ですべり運動した結果である。
- ・ 転位は、せん断力によってすべり面上を移動する。転位によるすべりは、結晶学的に定まったすべり面のすべり方向のせん断力 τ が、ある限界値に達

したときに生じる。

- ・ 転位運動に必要なせん断力 τ を増加させるメカニズムとして、転位の集積が知られており、転位の集積が実験で観察されるひずみ硬化や Bauschinger 効果の原因となる。

単結晶の挙動から多結晶の全ての挙動を議論することはできない。しかし、基本的事項は単結晶の挙動より推論できる。結晶構造より定まるすべり面のせん断応力 τ が第一義的に塑性変形とそれに伴うひずみ硬化を決定づけている。ある任意面のせん断応力 τ の大きさは、応力で次式のように記述できる。

$$\tau = s \cdot \sigma n, \tau = \sigma_{ji} n_j s_i \quad (30)$$

ここで、 n はすべり面の法線ベクトルであり、 s はすべり方向の単位ベクトルである。この式の応力を偏差応力 s と等方圧力 pI に分解して、式(30)に代入すると、 n と s が直交していることより、 τ は偏差応力 s のみで決定されることがわかる。すべり面での転位の集積が異方的な硬化特性を支配しているので、これらの硬化を表現するためには、偏差応力の修正のみが必要とされる。このため、修正応力として適切な変換は、拘束圧と偏差応力が連成しないようなものとなる。結晶塑性理論においては、背応力と関係するメカニズム（転位の集積）と等方的硬化をもたらすメカニズム（転位密度）の関係が議論されており、現象論的複合硬化モデルに基づく定式化の妥当性が、ある程度までは結晶塑性の立場から議論することができる。

一方、地盤材料の場合には、任意の面に作用する応力比が塑性変形を第一義的に支配していると考えることができる。せん断応力の変化だけでなく、垂直圧の変化も塑性変形に寄与することになる。垂直圧には、平均応力が関係してくるので、内部構造を反映した修正応力に基づいて、任意の面の適切な応力比を与える場合には、必然的に平均応力と偏差応力は相互に影響しあうような修正応力が必要になる。地盤材料に対して、これまで提案されてきた修正応力が平均応力と偏差応力が連成するものであったという事実は、微視的メカニズムとしての摩擦特性に基づく塑性変形を考慮したものであったと言えよう。

上記の議論より、複合硬化モデルの地盤材料の弾塑性モデルとしての適切性を考えてみる。複合硬化においては、偏差応力に対して背応力を与え、移動という形で修正応力が定義される。平均応力 p に対してはなんらの修正を与えない。修正応力の観点からは連成しない変換となっている。複合硬化モデルの摩擦性材料に対する負荷曲面の基本式は、例えば次式で与えられる。

$$f(s - \beta) - \mu(\xi)g(\theta)p = 0 \quad (31)$$

ここに、 β は背応力であり、 $tr(\beta) = 0$ を満足する。また、 $\mu(\xi)$ は硬化変数であり、 $g(\theta)$ は中間主応力の影響を表す関数である。

複合硬化モデルによる地盤材料の定式化の基本的な欠陥は、以下の簡単な考察により理解できる。異方性を有する粒状材料に対して、等方圧力を与えてみる。このとき、粒子間に作用する接触応力は決して等方ではなくせん断応力も発生させ、粒子間のすべりを発生させ、巨視的にはせん断変形を発生させる。すなわち、異方的な構造を有する粒状体は、等方圧力を与えられた場合、等方圧と偏差応力の両者を持つように変換されるような修正応力が実際の挙動をよりよく表現すると考えることができる。異方的な構造と外力としての応力の関係は Maeda ら²⁴⁾によって、詳しく検討されている。

修正応力の観点からは、等方圧力と偏差応力を独立に変換する複合硬化理論は、金属塑性においては、結晶面でのすべり運動という基本メカニズムより、その妥当性が主張できるものの、摩擦性材料である地盤材料に対しては、数学的取り扱いが容易であることより定式化に多く用いられているものの、基本的欠陥を有す可能性があることが指摘できる。複合硬化モデルの地盤材料への適用性についての疑問は、Hashiguchi²¹⁾も提起している。

5. 修正応力法を用いた異方的挙動の計算例

修正応力法を用いた場合に、どのようなことが表現できるかを簡単な例題を通して理解する。修正応力法により異方性や材料の劣化硬化を表現する手法は、対象とする構成モデルには依存しない方法であるから、歪塑性モデル（例えば Kolymbas²⁵⁾）などにも適用可能である。しかし、ここでの目的は、修正応力の有用性を具体的な例題を通して示すことにあるので、基本的な問題に限定する。

5.1 拘束圧依存性を持たない降伏条件への修正応力の適用と計算例

修正応力空間において、von-Mises の等方的降伏条件を採用し、修正応力を式(16)により与えた場合の応力空間における降伏曲面の形状が偏差応力面でどうなるかという問題を例題として取り上げる。この問題では、応力の主軸は構造テンソルの主軸と一致するものとし、主軸方向を座標系として採用する。主軸が一致しない場合は π 平面上に表現することはできない。図—5 に計算結果を示す。

細い実線は、等方材料に対する von-Mises の降伏条件で円として表現されている。偏差応力のみを考えているので、式(16)の α は 0 となる。小さな円プロットは、式(16)における β および γ を 1/2 とし、構造

テンソルの偏差量の主値を $h_1^D=0, h_2^D=0.3, h_3^D=-0.3$ と置いた場合の図形を示している。太い実線は β, γ を $1/2$ で $h_1^D=-0.6, h_2^D=0.3, h_3^D=0.3$ と置いた場合の図形である。太い円プロットは、 β と γ を 1 と置いて、 $h_1^D=-0.6, h_2^D=0.3, h_3^D=0.3$ と置いた場合の図形である。異方性の程度は変わっていないので、 β と γ の値を変えることにより、降伏曲面の大きさのみが変化している。

過去に提案された金属材料の回転および変形を考慮した降伏条件の数式としての表現が、式(16)の範疇で記述されている事実からも容易に想像できるように、異方性の程度や β と γ の値を変化させることにより、修正応力法を利用して、多様な降伏挙動を表現できることがわかる。降伏曲面の回転や変形を議論する前に、移動による修正応力を与えておけば、原点から外れた塑性変形に伴う降伏曲面の変化も記述できることは理解できる。

5.2 モール・クーロンの破壊条件への修正応力法の適用

マトリックス表現を容易にするために、2次元応力状態を対象とした議論を行う。用いる応力パラメータは次の量である：

$$p = q_0 = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), q_2 = \sigma_{12} \quad (32)$$

まとめて表現するときには、 $q_\alpha (\alpha=0,1,2)$ と表現する。これらの応力パラメータは、次のマトリックス演算により求められる量であり、3次元空間として表現したとき直交性を満足する。この変換は等長変換でないが、地盤力学の慣例により使用する。

$$p = \text{tr}\{[I_0][\sigma]\}, q_1 = \text{tr}\{[I_1][\sigma]\}, q_2 = \text{tr}\{[I_2][\sigma]\} \quad (33)$$

ここに、各マトリックスは次式で定義される。

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, [I_0] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$[I_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, [I_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

修正応力空間では、等方材料に対する2次元応力状態に対する粘着力のない Mohr-Coulomb の降伏条件を考え、次式で与えている。

$$\sqrt{q_1^2 + q_2^2} - \mu p = 0 \quad (35)$$

図-6 においては、 μ の値は 0.5 で、内部摩擦角としては $(\pi/6)$ を与えている。構造テンソルの主値は $h_1=0.8, h_2=1.2$ としている。図-6(a)の内側に入っている降伏曲面（薄い色でハッチした）は、修正応力として、式(1)を採用したものであり、変換マトリックスは、対角項のみとなるものである。外側に位

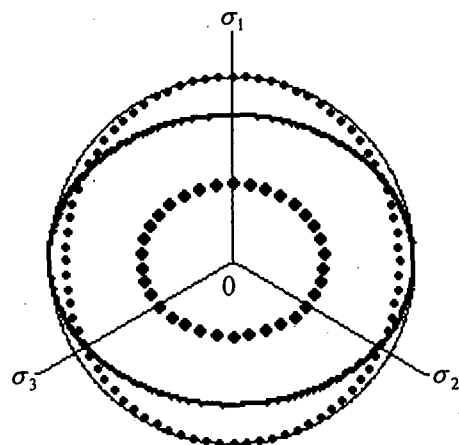
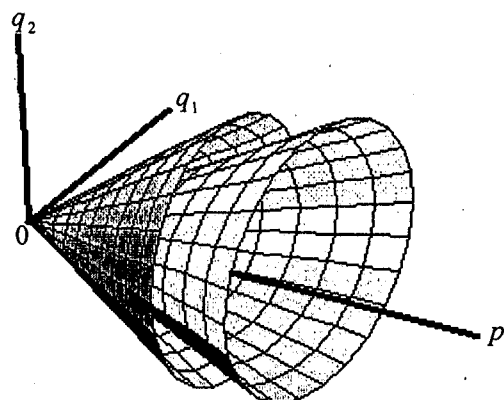
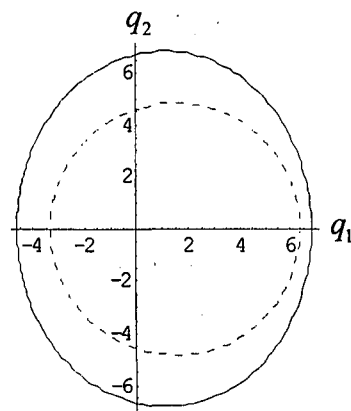


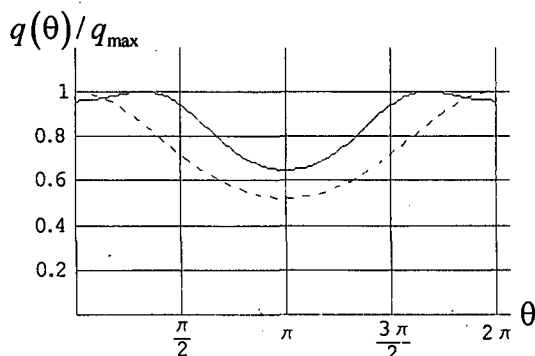
図-5 変換則(式(16))による異方硬化の表現



(a) q_i 空間における表現



(b) (q_1, q_2) 平面における表現



(c) 強度異方性の表現

図-6 異方性を考慮したモール・クーロンの破壊条件

置し、 p 軸が原点方向に位置するもの（濃い色でハッチした）は、修正応力として、次式で表現されるものであり、

$$T = \alpha \operatorname{tr}(H\sigma)I + \beta \operatorname{tr}(\sigma)H + (\gamma/2)(H\sigma + \sigma H) \quad (36)$$

ここの計算例では $\alpha = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 1.0$ を与えている。この図を p を一定にして ($p = 10$)、 $q_1 - q_2$ 平面に写像した結果が図-6(b)であり、偏差応力空間では、異方的な状態になっていることが明瞭に示されている。 q_1 軸から反時計まわりに角度 θ を取り、外縁までの距離を最大強度により正規化して示したのが、図-6(c)である ($\theta/2$ が物理角となる)。破壊条件として捉えと、強度の異方性が表現できていることがわかる。図-6(b), (c)において、点線で描かれるグラフは式(1)を採用したものであり、実線で描かれるグラフは式(36)を採用したものである。

5.3 初期異方性と応力誘導異方性を考慮した弾性マトリックスの基本的性質に関する議論

マトリックスおよび図の表現を容易にするために、ここでも 2 次元問題を考える。ここでの議論に用いる応力とひずみは 5.2 の議論と同様に直交する性質をもつ変数とする。

図-7 に示すような状況を考える。すなわち、座標系として初期異方性を表す構造テンソル A の主軸方向を採用する。応力の変化に伴う異方性の発達：誘導異方性は、構造テンソル H で表現して、その主軸方向は座標系に対して ψ だけ反時計回りにずれているものとする。

まず、初期異方性だけを考慮した修正応力を定義する。簡単のために式(1)に示す修正応力を利用する。この修正応力を p^*, q_1^*, q_2^* で表現すると、マトリックス表示で次式となる。

$$\begin{Bmatrix} p^* \\ q_1^* \\ q_2^* \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

ここに、 $A_p = (A_1 + A_2)/2, A_q = (A_1 - A_2)/2$ であり、 A_1, A_2 は初期異方性を表現する構造テンソル A の主値を表している。

修正応力とひずみの関係を等方弾性体として与え、 q_a, γ_a で表現すると、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} p^* \\ q_1^* \\ q_2^* \end{Bmatrix} = [E^e] \begin{Bmatrix} \nu \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

$\nu = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \gamma_1 = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}, \gamma_2 = 2\varepsilon_{12}$ と定義している。逆変換により、応力とひずみの関係を求めると次式

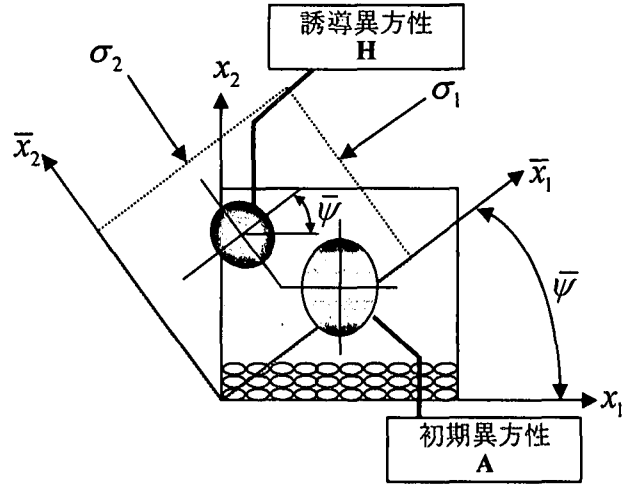
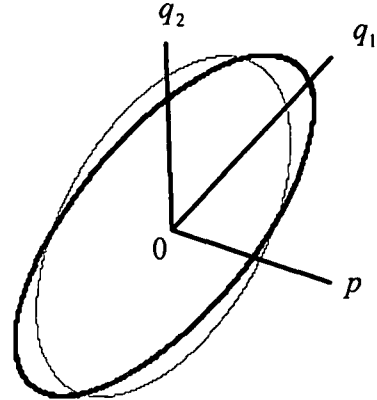
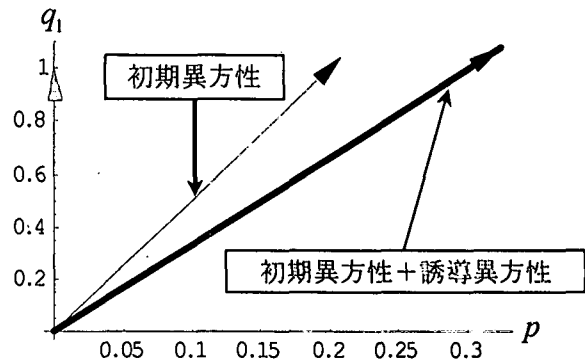


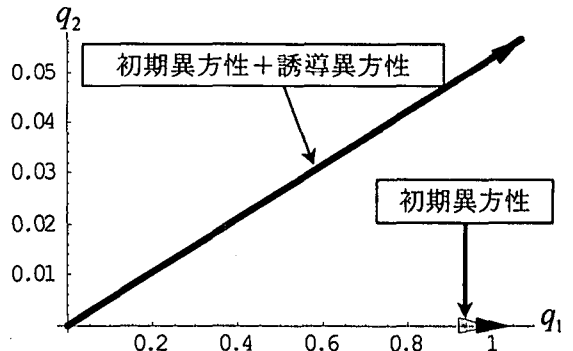
図-7 弾性的応力・ひずみ関係の参考



(a) $\gamma_1 = 1$ に対する応力の応答包絡線



(b) $\gamma_1 = 1$ に対する q と p の応答



(c) $\gamma_1 = 1$ に対する q_1 と q_2 の応答

図-8 修正応力による異方的弾性応答

が得られる。

$$\{q\} = [E^e]_A \{\gamma\} = [A]^{-1} [E^e]_I \{\gamma\} \quad (39)$$

応力の主軸方向（ここでは、誘導異方性の主軸方向は応力の主軸方向と一致すると仮定する）の座標系における量を上付きバーで表現する。x座標系における修正応力の変換マトリックス $[\bar{H}]$ は式(37)と同様の式で与えられる。x座標系における変換マトリックスの表現を求めると、次式のように与えられる。

$$[H] = [R]^T [\bar{H}] [R] \quad (40)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ 0 & -\sin 2\psi & \cos 2\psi \end{bmatrix} \quad (41)$$

式(40)による $[H]$ を利用して、誘導異方性を加味した修正応力を次式により定める。

$$\{\hat{q}\} = [H] \{q^*\} \quad (42)$$

x座標系において2回の変換を行った修正応力とひずみの関係を等方式(38)として、その式を展開すると、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \{q\} &= [E^e]_A \{\gamma\} \\ [\bar{E}^e]_A &= [A]^{-1} [R]^T [\bar{H}]^{-1} [E^e]_I [R] \end{aligned} \quad (43)$$

修正応力法を用いた計算結果を図-8に示す。用いた変数は $K=3, G=1, A_1=H_1=1, A_2=H_2=0.8$ である。誘導異方性を考慮した計算では、図-7における ψ の値を $\pi/6$ として計算した。なお、この弾性計算においては、応力の絶対値は問題とせずその傾向のみを考察するために、実際の材料とは関係ない値を採用している。

図-8(a)は、偏差ひずみを q_1 からの角度 θ を変数として、大きさ1として与えたときの応力の応答包絡線を示している。細い実線で描かれる応答が初期異方性のみを導入した応答で、太い実線で描かれる応答が初期異方性と誘導異方性を考慮した応答である。図-8(b)は、主ひずみ差 $\gamma_1=1$ を与えた場合の平均応力 p と q_1 の変化を表現している。偏差ひずみを与えることによって、平均応力が変化する様子が描かれている。図-8(c)は主ひずみ差 $\gamma_1=1$ を与えた場合の q_1 と q_2 の変化を表現している。初期異方性だけを考慮した場合は、 q_2 の変化は生じていないが、主軸の異なる誘導異方性まで考慮した場合は q_2 まで変化していることがわかり、複雑な異方性の挙動を表現していることがわかる。

5.4 弾・塑性モデルへの適用性

簡単な例題のみを本論文では検討した。修正応力法を砂のような粒状体に対する弾塑性モデルに適用した場合に注意すべき事項について簡単に説明する。

初期異方性と応力誘導異方性を表現する構造テンソルの発展モデルが異なるものとすれば、主応力軸が回転するような場合には、一般に2つの構造テンソルの主軸方向は一致しないので、かなり複雑な異方的挙動が表現されることになる。弾塑性体について、修正応力速度とひずみ速度の等方体に関する式が得られれば、それを弾性と同様に、式(43)のような形で応力速度とひずみ速度の関係式に帰着させることは可能である。

繰り返し載荷時に示される複雑な挙動は、物性的には、塑性変形に伴う内部構造変化がもたらす挙動と考えることができる。このため、構造テンソルに対して適切な発展モデルを与え、適切な修正応力を与えることができれば、特別にヒステリシス特性を定式化しなくても、修正応力法により繰り返し挙動も表現できる可能性がある。

6. まとめ

修正応力に基づいて異方的挙動を簡便に表現する修正応力法の基本的事項について検討した。その結果を要約すれば次のようになる：

- 1) 金属材料に対する、降伏曲面の変形や回転を表現する多くの異方的硬化則が修正応力の範疇にあること
- 2) 地盤材料の回転硬化則もまた修正応力法として議論できることを明らかにした。
- 3) 降伏曲面に関する計算例、弾性的応力ひずみ関係などの計算例を示し、修正応力法の可能性を示した。

しかし、本論文における議論は、ある瞬間に構造テンソルが明確に定義された時の議論である。実際に様々な応力（ひずみ）履歴を受けた場合の構成モデルを定式化する場合には、構造テンソルの発展モデルを定式化することが必要になる。この作業は極めて難しいものとなる。

構造テンソルの変化は必然的に「構造変化に起因するひずみ速度」をもたらすはずである。構造変化は塑性ひずみ成分よりも弾性ひずみ成分により密接に関係すると考えられるので、構造変化を取り入れた構成モデルは弾塑性体というよりも、弾性が変化しそれによって生じる構造ひずみも取り入れるようなモデルの構築をもたらす。構造変化に伴うひずみの変化を厳密に定式化することも今後の課題である。

異方性挙動を表現するために、数学的に簡潔で多くの挙動を包括する修正応力法について、その物性的背景と有用性を議論したが、現時点では、一つの

便利な数学的方法を提示したに過ぎない。どのような方法により非線形構成モデルを定式化しても、最も難しい課題は次の2つである：

- 1) 構造テンソルのような内部変数の定義とその発展則の構築
- 2) 内部変数の変化によるひずみの変化の表現
修正応力法が異方的挙動や材料の劣化挙動の表現に真に有効であるためには、この2つの課題を克服する努力が必要である。

謝辞：本研究の一部は、文部省科学研究費：課題番号13650547により実施した。謝意を表する。

参考文献

- 1) 石川博将：固体の非線形力学，養賢堂，2000
- 2) Phillips, A.: Experimental foundations of thermo-plasticity and viscoplasticity, in *Mechanics of Engineering Materials*, (eds. Desai, C.S. and Gallagher, R. H.), John Wiley & Sons Ltd. Pp.465-484, 1984
- 3) Hong Nam, N. and Koseki, J.: Modeling quasi-elastic deformation properties of sand, in *Deformation characteristics of Geomaterials*, IS-Lyon, Balkema, (to be published)
- 4) Loret, B. and Rizzi, E.: Anisotropic stiffness degradation triggers onset of strain localization, *Int. J. Plasticity*, 13, 5, pp.447-459, 1997
- 5) Boehler, J.P.(ed.): *Application of tensor functions in solid mechanics*, Springer Verlag, 1987
- 6) Satake, M.: Fundamental quantities in the graph approach to granular materials, in *Mechanics of Granular Materials: New models and Constitutive Relations*, (eds. Jenkins, J.T. and Satake, M.), Elsevier Science Pub. ,pp.9-19, 1983
- 7) Tobita, Y. and Yanagisawa, E.: Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials, *Soils and Foundations*, 32, 1, pp.85-99, 1992
- 8) Ghaboussi, J. and Momen, H.: Modelling and analysis of cyclic behavior of sands, in *Soil Mechanics-Tansient and Cyclic loads*, (eds. Pande and Zienkiwicz), John Wiley & Sons Ltd. ,Pp.313-342, 1987
- 9) 飛田善雄：構造テンソルによる異方性の表現，講座：地盤の異方性，土と基礎，41，9，pp.77-84，1993
- 10) 小田匡寛：地盤力学におけるマイクロメカニクスとマクロメカニクスの関係（その1），講座：土の構造とメカニクス—ミクロからマクロへ，土と基礎，50，12，pp.67-72，2002
- 11) 徳岡辰雄：続有理連続体力学入門、機械の研究，

32 pp.1211-1216, pp.1328-1334, 1980

- 12) 飛田善雄，加茂謙一：増分非線形モデルの数学的構造・定式化と主応力軸回転時の挙動の検証，応用力学論文集 Vol.5 ,pp.295-306 ,2002
- 13) Cowin, S.C.: The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor, *Mechanics of Materials*, 4, pp.137-147, 1985
- 14) T.Nakai: An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses, *Soils and Foundations*, 29, 1, 119-173, Mar, 1989
- 15) Oka, F.: Anisotropic and pseudo-anisotropic elasto-visco-plastic constitutive models for clay, in *Modern Approaches to Plasticity* (ed, Kolymbas), Elsevier Science Publishers, pp.505-526, 1993
- 16) Nakai, T., Taki, H. and Funada, T.: Simple and generalized modeling of various soil behavior in three dimensional stresses, in *Modern Approaches to Plasticity* (ed, Kolymbas), Elsevier Science Publishers, pp.561-584, 1993
- 17) Ogden, R.W.: *Non-linear elastic deformations*, Dover Pub. 1997
- 18) Mirsky, L.: *An introduction to linear algebra*, Dover Pub., 1990
- 19) Pettofrezzo, A.J.: *Matrix and Transformations*, Dover Pub., 1978
- 20) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, in *Constitutive Equations of Soils*, Spec. Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo, pp.229-238, 1977
- 21) Hashiguchi, K.: Description of inherent /induced anisotropy of soils: Rotational hardening with objectivity, *Soils and Foundations*, 41, 6, pp.139- 145, 2001
- 22) 田村武：連続体力学の基礎，朝倉書店，2000，あるいは Marsden J.E. and Hughes, T.J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover Pub. ,1994
- 23) Asaro, R.J.: Micromechanics of Crystals and Polycrystals, *Advances in Applied Mechanics*, 23, pp.1- 115, 1983
- 24) Maeda, K., Miura, K. and Toki, S.: Mechanical properties of elliptic microstructure formed in granular materials, *Soils and Foundations*, 35, 2, pp.1-13, 1995
- 25) Kolymbas, D. and Wu, W.: Introduction to hypoplasticity, in *Modern Approaches to Plasticity* (ed. Kolymbas), Elsevier Science Publishers, pp.213-223, 1993

(2003年4月18日受付)