

材料内部の微視構造が初期降伏特性に及ぼす影響と巨視的構成則

Effects of micro-structures of materials on the characteristics of initial yielding and phenomenological constitutive laws

廣瀬恒太*・岩熊哲夫**・小山茂***

Kota HIROSE, Tetsuo IWAKUMA and Shigeru KOYAMA

*正会員 修(工) 仙台市(〒980-8671 仙台市青葉区国分町三丁目7-1)

**正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

***正会員 博(工) 信州大学工学部社会開発工学科(〒380-8553 長野市若里4-17-1)

Incremental elasto-plastic average behaviors of composites with many different inhomogeneities are simulated on the basis of the Mori-Tanaka theory. An emphasis is put on the initial yielding and flow rule of such composites, and the average behaviors are compared with the classical plasticity models. It is shown that an approximate model of yielding of composites which have random slip systems can be described by the von Mises yield condition and the ordinary associated flow rule.

Key Words : *composites, overall flow rule, overall yield surface, Mori-Tanaka theory, double slip model*

1. はじめに

社会基盤施設はそれそのものの材料はもちろん、建設サイトの地盤をはじめとする周辺環境に存在する材料も均質なものは無く、内部に微視構造を有している。代表的な金属系建設材料の鋼も微視的には不完全な単結晶や介在物が不規則に分布した集合体であるし、コンクリートも代表的な複合材料である。しかし、こういった材料を用いた構造設計では、古典的な塑性論やそれがある程度拡張した巨視(現象論)的な構成則を用いることが多く、その内部の微視構造を直接考慮した材料抵抗則を構築することは現実的ではなく、実際にも行われていない。さらに、その現象論的構成則の代表である von Mises の降伏条件や関連流れ則・塑性ひずみの法線則等は、鋼の場合は実験的にもその精度が工学的許容範囲で確認された上で用いられ、微視構造のスケールと巨視的なスケールがある程度以上異なる現実の構造材料では問題はなさそうである。ただコンクリートの場合には実験に基づく経験的な構成則が主で、Bazant らの研究を除いて理論的な現象論的構成則はあまり議論されていない印象を持っている。

一方で、超長大橋梁等を念頭に置いて、繊維補強材等の新しい複合材料を主構造に用いるアイデアが近年提案されているが、まだ具体的・現実的な材料の製造には至っておらず、可能性を議論することの方が多く見受けられる。このような複合材料を開発する場合には、微視構造の特性を考慮した巨視的な力学特性を何らかの数値的な方法で予測できる方が、開発コストや手間の観点からは望ましい。また、砂地盤のような非連続体

をそのまま粒子の集合として捉えることによって、その巨視的な挙動を評価する研究¹⁾も近年積極的に行われており、微視構造を有する材料特性についての基礎研究も盛んになっている。米国では近年、DEMを用いた基礎研究にも大きな予算が付く等の動き²⁾もあるようだ。

内部の微視構造を考慮して連続体としてその挙動を数値解析する有力な手法に均質化手法がある。現在標準的に行われているその手法では、周期境界を持つユニットセルで微視構造特性を評価し、マクロな数値解析と連成させるやり方を用いている。この手法を用いると、非均質な材料でできた領域の境界値問題を、微視的な応力分布も含めて解析することができ、実際の顕微鏡写真等を元にした現実的なユニットセルを用いた解析が可能である。しかし、その手法で例えば金属材料の繊維補強複合材料を解析³⁾した場合、一例として微視領域での最初の降伏発生で巨視的な初期降伏も定義してしまうと、高剛性繊維による補強であるにも拘わらず、微視構造における応力集中のために、巨視的な初期降伏が母材だけの場合の初期降伏に先んじてしまう結果を示すこともある。つまり、実際に観察される巨視的な降伏を定義することが困難である。

これに対し、平均的な量しか求められないとはいえ、解析的に平均挙動を予測するものとして古典的には混合体理論がある。近年それをマイクロメカニクスを用いて改善した森・田中手法⁴⁾や Hashin-Shtrikman の上下界⁵⁾、さらには self-consistent 法⁶⁾等の平均化手法が提案されてきている。こういった手法を用いた場合には、平均化された応力によって巨視的な降伏を簡便に定義でき、高剛性繊維による巨視的な降伏の遅れ等を容易に予測

できるが、逆にその巨視的な降伏の物理的な定義そのものは曖昧にはなる。しかし、実験値との比較^{7),8)}においては定量的にも良い結果を示すこともわかっている。また、しよせん微視構造はランダムに分布していることを考えると、平均的な挙動だけではなく、その上下界が予測できる点で、こういった解析的な扱いには有用性がある。

そこでここでは、この解析的な手法を用い、新材料開発も念頭に置きながら、現実の複合材料のように内部に微視構造を有する材料の初期降伏特性についての基礎的な検討をする。具体的には、複数種類の介在物を有する複合材料や、母材部分を極端に小さくした複合材料で模擬した多結晶体の、巨視的な降伏条件や流れ則を求め、設計等で実際に用いている現象論的塑性論との比較をする。用いる手法はいわゆる森・田中理論であり、塑性理論を全ひずみ成分で表示した定式化⁹⁾を、複数種類の介在物が存在する場合の増分理論に拡張して⁸⁾用いる。特に弾塑性のモデル化の場合、増分理論そのままを用いた定式化ではやや剛な予測しか得られないこともわかっており、例えば平均化における線形比較体の剛性に弾塑性関係の割線係数⁹⁾や弾塑性接線係数¹⁰⁾を用いて、実験値に近い剛性を得ようとする近似的試みが主流である。しかしここでは、基礎研究として平均化以外の近似を導入することは望ましくないため、増分理論をそのまま定式化に用いている点が、これまでの研究とは異なっている。

降伏のモデルとしては通常の von Mises の降伏関数を用いた関連流れ則と、結晶構造を念頭に置いたすべりによる降伏モデルを用いる。特にすべりメカニズムで降伏する場合は、Coulomb 摩擦則からも容易に類推できるようにその降伏面は応力空間内のある一平面になる。しかし、鋼のように単結晶がランダムに分布して多結晶体を形作ると、その巨視的な降伏は J_2 流れ則のような応力の二次形式の降伏曲面になることが実験でも確かめられている。このような性質は self-consistent 法を用いた研究で既に文献¹¹⁾でも明らかにされており、Bauschinger 効果が現れることも示されているが、ここではさらに流れ則の検討を加えたい。なお、実験値との比較は文献⁸⁾において 2 相材料について示しており、少なくとも弾性と初期降伏については実測と極端に異なる結果は出ないことを確かめてあるので、本論文では実測との比較は割愛する。

2. 多種介在物を含む複合材料の巨視的弾塑性挙動の予測

2.1 多種介在物を含む複合材料に対する森・田中理論

なお本論文では微小変形理論の枠組みの中で論ずる。また森・田中の考え方は既存の文献にも詳しいが、明示的に増分型で表した代表的な文献⁹⁾では近似が行われて

いるため、ここでは定式化の概略を少し詳細に示すことにする。森・田中理論は無限体中に多くの介在物がランダムに分布しているものを対象としている。介在物の形状は回転楕円体ではあるが様々な寸法比率や方向を有し、また材料特性も塑性的な異方性等の様々な特性をそれぞれの介在物および母材が持っているものとする。母材と介在物は共に弾性は等方であるものとし、それぞれの弾性係数テンソルを C_M , C_i とする。ここに添え字 'M' は母材部分の量であることを表し、'i' は介在物部分を示す添え字であり、 n 種類の介在物が存在するとして i は 1 から n の値を持つ。母材と各介在物のそれぞれの領域では、その増分応力・ひずみ関係は平均量同士が

$$\dot{\sigma}_M = C_M (\dot{\epsilon}_D - \dot{\epsilon}_M^p) \quad (1a)$$

$$\dot{\sigma}_i = C_i (\dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_i^p) \quad (1b)$$

で表される。ここに $\dot{\sigma}_M$ と $\dot{\epsilon}_D$ は母材部分の応力増分とひずみ増分の母材中の体積平均量を表し、 $\dot{\sigma}_i$ と $\dot{\epsilon}_i$ は各介在物中の応力増分とひずみ増分の平均量である。また $\dot{\epsilon}_M^p$ と $\dot{\epsilon}_i^p$ はそれぞれ母材中と各介在物中の塑性ひずみ増分の平均量を表す。

介在物は多数存在するため、平均化する場合には大きく分けて 2 つの相互作用がある。ひとつは母材と介在物の間の相互作用で、もうひとつは介在物間の相互作用である。前者は後述のように無限体に 1 個のみの介在物があるとして近似するが、後者の取り扱いが難しい。そこで森・田中のオリジナルの考え方では、母材中での平均ひずみを $\dot{\epsilon}_M$ とは表さず、上式 (1a) のように $\dot{\epsilon}_D$ と別の添え字を用いている。つまり、この $\dot{\epsilon}_D$ を何らかの平均から求められる量ではなく、ひとつの未知量あるいは自由度としているところに、この森・田中理論の特徴がある。こうすることで多数の介在物が存在することによる相互作用を考慮できると考えている。

したがって森・田中は、この $\dot{\epsilon}_D$ で介在物同士の相互作用は考慮済みと考え、母材と介在物の相互作用は次のような簡単な問題で考慮できるとした。つまり、すでに介在物同士の相互作用が組み込まれている母材中にさらに 1 個だけ介在物を付加しても母材部分にはほとんど何も変化は生じないと考え、ある代表的な介在物 i の中のひずみ場は、 $\dot{\epsilon}_D$ のひずみ場にある無限体中に 1 個だけの介在物が存在するときの問題で求めることができるとしたのである。したがって介在物中の全ひずみ増分が

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_i \quad (2)$$

のように乱れる。ここに $\dot{\gamma}_i$ は、 i 番目の介在物が存在することによってそれ自身の中に生じる乱れのひずみ増分成分である。

このように母材と介在物の間の相互作用は、非常に単純な 1 個だけしか介在物が存在しない無限体の問題で取り扱えるようになってきているため、いわゆる標準的なマイクロメカニクス¹²⁾の手法で解くことができる。このような近似については多くの研究者が改善を試みているが、

最近、介在物の確率分布をある程度考慮した高次近似手法も提案¹³⁾されている。しかし、弾性の範囲での差異は一般的に小さいので、初期降伏までが議論の対象になる本論文では、オリジナルの森・田中理論の範囲内で相互作用を取り扱うことにする。

無限体に1個だけの介在物が存在する問題に戻ると、標準定式化として Eshelby¹⁴⁾の解を用いた上で、等価介在物法¹²⁾を用いると比較的に容易にその力学問題が解ける。つまり介在物の材料を母材のそれと同一にする代わりに、介在物中のみに増分 eigen ひずみ $\dot{\epsilon}_i^*$ を導入する。そうした上で式(1b)を式(2)と式(1a)を用いて書き換えると各介在物の増分応力とその等価性を示す関係式は

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_i &= C_i (\dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma}_i - \dot{\epsilon}_i^p) \\ &= C_i (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\gamma}_i - \Delta \dot{\epsilon}_i^p) \quad (3a)\end{aligned}$$

$$= C_M \{C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\gamma}_i - (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*)\} \quad (3b)$$

で与えられる。ここに $\Delta \dot{\epsilon}_i^p$ は各介在物中の平均塑性ひずみ増分と母材中の平均塑性ひずみ増分との差で

$$\Delta \dot{\epsilon}_i^p \equiv \dot{\epsilon}_i^p - \dot{\epsilon}_M^p \quad (4)$$

で定義した。

等価な介在物で置き換えられた方の問題は、弾性が等方的で介在物形状が回転楕円体である場合には陽な形でつり合い式が解ける。すなわち、いわゆる Eshelby テンソル S_i と呼ばれる定数テンソル¹²⁾を用いて、乱れ成分 $\dot{\gamma}_i$ が

$$\dot{\gamma}_i = S_i (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*) \quad (5)$$

という関係になる。式(3)に式(5)を代入すると

$$\dot{\sigma}_i = C_i C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + C_i S_i (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*) - C_i \Delta \dot{\epsilon}_i^p \quad (6a)$$

$$= \dot{\sigma}_M + C_M (S_i - I) (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*) \quad (6b)$$

となる。ここに I は4階の単位テンソルを表す。さらに式(6a)と式(6b)を等値することによって、eigen ひずみ増分は

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^* &= \{C_M - (C_M - C_i) S_i\}^{-1} \{ (C_M - C_i) \\ &\quad C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + C_i \Delta \dot{\epsilon}_i^p \} \quad (7)\end{aligned}$$

のように求められる。

i 番目の介在物 ' i ' の集合が占める体積比率を f_i と表すと、母材の体積比率は $(1 - \sum f_i)$ になる。以下総和記号の範囲は略記するが、 $i = 1$ から n までの総和である。したがって、巨視的な応力・ひずみ増分は全体の体積平均によって

$$\dot{\bar{\sigma}} = (1 - \sum f_i) \dot{\sigma}_M + \sum (f_i \dot{\sigma}_i) \quad (8a)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = (1 - \sum f_i) \dot{\epsilon}_D + \sum (f_i \dot{\epsilon}_i) \quad (8b)$$

と定義できる。この式(8a)に式(6b)を代入し、また式(8b)に式(2)、(1a)、(5)を代入すると

$$\dot{\bar{\sigma}} = (1 - \sum f_i) \dot{\sigma}_M$$

$$+ \sum (f_i \{ \dot{\sigma}_M + C_M (S_i - I) (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*) \})$$

$$= \dot{\sigma}_M + \sum (f_i C_M (S_i - I) (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*)) \quad (9a)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = (1 - \sum f_i) (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\epsilon}_M^p)$$

$$+ \sum (f_i \{ (C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \dot{\epsilon}_M^p) + S_i (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*) \})$$

$$= C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \sum (f_i S_i (\Delta \dot{\epsilon}_i^p + \dot{\epsilon}_i^*)) + \dot{\epsilon}_M^p \quad (9b)$$

となる。さらに式(9a)、(9b)に式(7)をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\sigma}} &= \left[I + \sum (f_i C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_i) C_M^{-1} \right] \dot{\sigma}_M + \sum (f_i C_M (S_i - I) \\ &\quad \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \Delta \dot{\epsilon}_i^p) \quad (10a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\epsilon}} &= \left[I + \sum (f_i S_i \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_i) \right] C_M^{-1} \dot{\sigma}_M + \sum (f_i S_i \{ C_M \\ &\quad - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \Delta \dot{\epsilon}_i^p) + \dot{\epsilon}_M^p \quad (10b)\end{aligned}$$

のように、全体の平均量を例えば $\dot{\sigma}_M$ と $\dot{\epsilon}^p$ の成分で表すことができる。この2式から $\dot{\sigma}_M$ を消去すれば、巨視的な応力増分・ひずみ増分関係が求められる。これが森・田中理論の平均化である。

なお、以上の式を並べ替えることで母材中の平均応力増分は

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_M &= \left[I + \sum (f_i C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_i) C_M^{-1} \right]^{-1} \left[\dot{\bar{\sigma}} - \sum (f_i C_M (S_i - I) \right. \\ &\quad \left. \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \Delta \dot{\epsilon}_i^p) \right] \quad (11)\end{aligned}$$

となる。また式(6b)に式(7)を代入すると各介在物中の平均応力増分が

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_i &= \left[I + C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_i) C_M^{-1} \right] \dot{\sigma}_M + C_M (S_i - I) \\ &\quad \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \Delta \dot{\epsilon}_i^p \quad (12)\end{aligned}$$

と求められる。

2.2 巨視的塑性ひずみ増分の定義

以上の結果を整理し、巨視的な塑性ひずみ増分を定義したい。式(11)、(12)、(10b)を用いて整理すると、各増分量は

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\bar{\sigma}} + \sum (D_i) \dot{\epsilon}_M^p - \sum (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \quad (13a)$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_i &= B_i \dot{\bar{\sigma}} + \left\{ L_i \sum (D_i) - M_i \right\} \dot{\epsilon}_M^p + M_i \dot{\epsilon}_i^p \\ &\quad - L_i \sum (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \quad (13b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} = & \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} + \left\{ I + N \sum (D_i) - \sum (P_i) \right\} \dot{\epsilon}_M^p \\ & + \sum \{ (P_i - N D_i) \dot{\epsilon}_i^p \} \end{aligned} \quad (13c)$$

のような関係式で表すことができる。ここに、 $\bar{C}$ は複合材料全体の巨視的接線弾性係数テンソルであり、したがって $\bar{C}^{-1}$ は巨視的接線弾性コンプライアンスで

$$\begin{aligned} \bar{C}^{-1} = & \left[I + \sum \left(f_i S_i \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. (C_M - C_i) \right) \right] \left[C_M + \sum \left(f_i C_M (S_i - I) \right. \right. \\ & \left. \left. \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} (C_M - C_i) \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

と表現できる。その他の4階のテンソルは

$$\begin{aligned} A \equiv & \left[I + \sum \left(f_i C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. S_i \}^{-1} (C_M - C_i) C_M^{-1} \right) \right]^{-1} \\ B_i \equiv & \left[I + C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ & \left. (C_M - C_i) C_M^{-1} \right] A \\ D_i \equiv & A \left[f_i C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \right] \\ L_i \equiv & \left[I + C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \\ & \left. (C_M - C_i) C_M^{-1} \right] \\ M_i \equiv & C_M (S_i - I) \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \\ N \equiv & \left[I + \sum \left(f_i S_i \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. (C_M - C_i) \right) \right] C_M^{-1} \\ P_i \equiv & f_i S_i \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} C_i \end{aligned}$$

と定義した。

巨視的塑性ひずみ増分は、その定義に純粋に従えば、巨視的な全ひずみ増分から弾性的なひずみ増分を引いた成分で定義されるべきである。したがって、式(13c)から弾性部分を除いたもの、つまり

$$\dot{\epsilon}^p \equiv \dot{\epsilon} - \bar{C}^{-1} \dot{\sigma} \quad (14)$$

で定義する。すなわち、巨視的な塑性ひずみ増分は各相のその体積平均にはならず

$$\dot{\epsilon}^p \neq \left(1 - \sum f_i \right) \dot{\epsilon}_M^p + \sum (f_i \dot{\epsilon}_i^p)$$

であることに注意すべきである。

2.3 各相の塑性ひずみ増分の算定

以上の表現式(13)に各相の流れ則が与えられれば、複合材料の弾塑性関係が完全に記述できる。例えば次節で扱う J_2 流れ則の場合のように、塑性ひずみ増分が現

応力状態と応力増分によって、母材中も介在物中も

$$\dot{\epsilon}_M^p = Q_M(\sigma_M) \otimes R_M(\sigma_M) \dot{\sigma}_M \quad (15a)$$

$$\dot{\epsilon}_i^p = Q_i(\sigma_i) \otimes R_i(\sigma_i) \dot{\sigma}_i \quad (15b)$$

のように表される。 $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$ はそれぞれ現応力の関数となった2階のテンソルである。この式(15a)に式(13a)を、式(15b)に式(13b)をそれぞれ代入すると一般に

$$\dot{\epsilon}_M^p = Q_M \otimes R_M \left[A \dot{\sigma} + \sum (D_i) \dot{\epsilon}_M^p - \sum (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \right] \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i^p = & Q_i \otimes R_i \left[B_i \dot{\sigma} + \left\{ L_i \sum (D_i) - M_i \right\} \dot{\epsilon}_M^p + M_i \dot{\epsilon}_i^p \right. \\ & \left. - L_i \sum (D_i \dot{\epsilon}_i^p) \right] \end{aligned} \quad (16b)$$

となる。この式(16)を $\dot{\epsilon}_M^p$, $\dot{\epsilon}_i^p$ について連立させて解けば個々の塑性ひずみ増分が求められ、複合材料全体の平均挙動が記述できる。

ただしテンソルの連立方程式であるため、1種類の介在物しかない場合にはこの連立方程式を陽な形で解くことができる⁸⁾が、任意の種類数の介在物が存在する場合には困難である。そこでここでは本式を逐次代入的に解く。つまり、ある降伏した相中において便宜的にその降伏直前の応力増分 $\dot{\sigma}_M$, $\dot{\sigma}_i$ を流れ則の式(15)に代入して第1次近似の塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_M^p$, $\dot{\epsilon}_i^p$ を求める。このとき与えた応力増分をそれぞれ $\dot{\sigma}_M^1$, $\dot{\sigma}_i^1$ としておく。ここで求められた塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_M^p$, $\dot{\epsilon}_i^p$ を式(13)に代入して各相の応力増分 $\dot{\sigma}_M$, $\dot{\sigma}_i$ を求め、それをそれぞれ $\dot{\sigma}_M^2$, $\dot{\sigma}_i^2$ とする。これを再度、式(15)に代入して第2近似の $\dot{\epsilon}_M^p$, $\dot{\epsilon}_i^p$ を求める。このとき $\dot{\sigma}_M^1$, $\dot{\sigma}_i^1$ と $\dot{\sigma}_M^2$, $\dot{\sigma}_i^2$ が一致すれば逐次代入法を終了させる。一致しない場合はこれを繰り返すという方法をとることにした。以下の例では、具体的に逐次代入法の収束を

$$|\sigma_M^1 - \sigma_M^2| < \varepsilon |\sigma_M^2|, \quad \varepsilon = 0.5\% \quad (17)$$

で判定した。この0.5%という値は、文献⁸⁾で例とした2相問題を初期降伏後まで実際に逐次代入で解いた上で、結果を図示したときに逐次代入を用いない結果と重なる程度の誤差に収まるように設定したものである。

3. J_2 流れ則に従う材料の場合

3.1 降伏条件

母材も介在物もいわゆる J_2 流れ則に従う場合を例示する。降伏条件は母材・各介在物ともに von Mises の降伏条件に従うものとし、その降伏関数は

$$f_M = \sqrt{(J_2)_M} - F_M(\epsilon_M^p) \quad (18a)$$

$$f_i = \sqrt{(J_2)_i} - F_i(\epsilon_i^p) \quad (18b)$$

で与えられるものとする。ここに、相当応力は

$$\sqrt{(J_2)_M} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_M : \sigma'_M}, \quad \sqrt{(J_2)_i} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_i : \sigma'_i} \quad (19)$$

で定義した。また降伏曲面の半径に相当する F の硬化則については、代表的な文献でよく用いられているべき乗則で

$$F_M(\epsilon_M^p) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \sigma_M^Y + h_M (\epsilon_M^{eq})^{n_M} \} \quad (20a)$$

$$F_i(\epsilon_i^p) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \sigma_i^Y + h_i (\epsilon_i^{eq})^{n_i} \} \quad (20b)$$

と与えられるものと仮定する。ここに σ_M^Y , σ_i^Y はそれぞれ母材・各介在物の単軸引張り初期降伏応力を表し、 h_M , h_i , n_M , n_i は硬化パラメータを表す。また各相における相当塑性ひずみ ϵ_M^{eq} , ϵ_i^{eq} は式 (19) の相当応力に対応させ

$$\epsilon_M^{eq} \equiv \sqrt{2\epsilon_M^p : \epsilon_M^p}, \quad \epsilon_i^{eq} \equiv \sqrt{2\epsilon_i^p : \epsilon_i^p} \quad (21)$$

で定義されるものとする。

3.2 流れ則

ここでは関連流れ則を例にすると、塑性ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} \dot{\sigma}_M \quad (22a)$$

$$\dot{\epsilon}_i^p = \frac{1}{H_i} \frac{\sigma'_i \otimes \sigma'_i}{4(J_2)_i} \dot{\sigma}_i \quad (22b)$$

となる。あるいは式 (15) の記号を用いると

$$Q_M = R_M = \frac{\sigma'_M}{2\sqrt{H_M} \sqrt{(J_2)_M}} \quad (23a)$$

$$Q_i = R_i = \frac{\sigma'_i}{2\sqrt{H_i} \sqrt{(J_2)_i}} \quad (23b)$$

である。ここに H_M , H_i はそれぞれ母材・介在物の硬化係数で

$$H_M \equiv -\frac{\partial F_M}{\partial \sigma_M} \frac{\partial F_M}{\partial \epsilon_M^p}, \quad H_i \equiv -\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_i} \frac{\partial F_i}{\partial \epsilon_i^p} \quad (24)$$

と定義される。ここでは硬化をべき乗則で与えているから、式 (20) を式 (24) に代入すると

$$H_M = \frac{2^{(n_M/2)-1} n_M h_M}{\sqrt{3} (J_2)_M} (\epsilon_M^p : \epsilon_M^p)^{(n_M/2)-1} \times (\sigma'_M : \epsilon_M^p) \quad (25a)$$

$$H_i = \frac{2^{(n_i/2)-1} n_i h_i}{\sqrt{3} (J_2)_i} (\epsilon_i^p : \epsilon_i^p)^{(n_i/2)-1} \times (\sigma'_i : \epsilon_i^p) \quad (25b)$$

と具体的には表現できる。

3.3 初期降伏曲面の特性

(1) 母材が降伏する場合の降伏曲面の特性

J_2 流れ則の例は、複数の介在物の相互作用を考慮しなかった報告⁷⁾の結果との差異は小さいので、概略の結果を示すに留める。

最初の例は母材が降伏する場合で、通常の金属母材の補強に相当する。介在物形状は半径比が 1:1:2 のフットボール型の回転楕円体で、簡単のためにその長軸は x_3 - x_1 面内に常に含まれるように配置されているものとする。材料定数は SiC で補強した 2124Al を想定して文

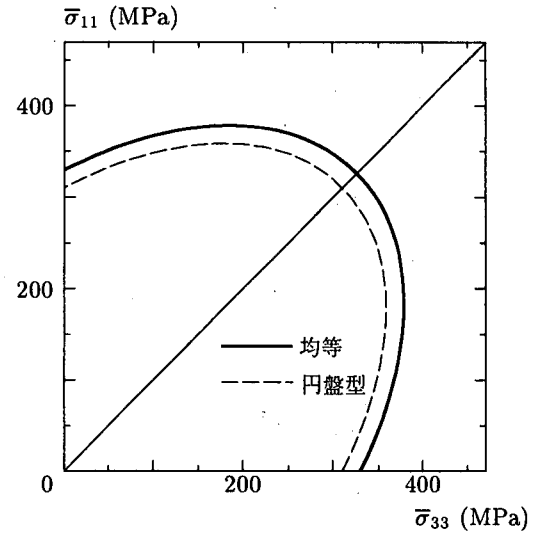


図-1 介在物の長軸方向を均等に分布させた場合の巨視的初期降伏曲面 (母材降伏)

献¹⁷⁾から引用したもので、母材の材料定数はヤング率 $E_M = 60$ GPa, ポアソン比 $\nu_M = 0.3$, 単軸引張り降伏応力 $\sigma_M^Y = 290$ MPa, 硬化パラメータ $h_M = 700$ MPa, $n_M = 0.55$ とした。介在物の材料定数は $E_i = 450$ GPa, $\nu_i = 0.2$ で、降伏しないものとした。また、同じ文献に合せて介在物集合の総体積比率 f_i を $f_i = 13.2\%$ とする。なお 4 階のテンソル演算は、用いるテンソルがすべて対称テンソルなので、文献¹⁸⁾の方法を用いて行列計算で処理している。

ここでは短繊維補強材のように、介在物の方向が個々にランダムである場合を想定する。つまり、介在物の長軸の x_3 軸に対する向き θ が、0 度から 170 度までに 10 度刻みの 18 種類が同比率でランダムに分布しているものとし、介在物の総体積比率を 18 等分した $13.2/18 = 0.733\%$ ずつで分布しているものとする。このときの巨視的な応力 σ_{33} - σ_{11} 平面内での巨視的初期降伏曲面を図-1 に示した。この場合は容易に予想できるように σ_{33} - σ_{11} 平面内で等方な降伏曲面になっている。同じ図中には、同じ材料定数と体積比率を持つ尖った円盤状 (半径比で 1:2:1) の介在物が存在する場合の降伏曲面を長破線で描いた。上述の楕円介在物の向きが 18 方向に均等に分布している場合の実線の答が、円盤状介在物の場合の答と同心楕円となっており、横等方な挙動になっていることが明らかである。

(2) 介在物が降伏する場合の降伏曲面の特性

次の例は介在物が降伏する場合である。材料や介在物形状は前の例と同じにした。ただし、母材は降伏しないものとし、逆に介在物の塑性特性が $\sigma_i^Y = 700$ MPa, $h_i = 1$ GPa, $n_i = 0.5$ で与えられるものとした。介在物集合の総体積比率も前の例と同じく $f_i = 13.2\%$ とし、長軸の分布も同様とした。

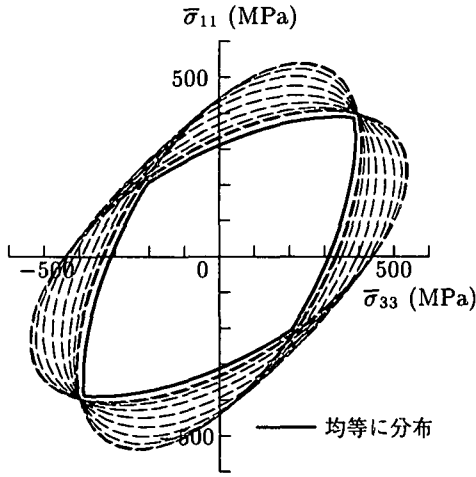


図-2 介在物の長軸方向を均等に分布させた場合の巨視的初期降伏曲面（介在物降伏）

この複合材料の、 σ_{33} - σ_{11} 平面内での巨視的初期降伏曲面を図-2 に示した。一番内側の実線がその降伏曲面である。この場合も巨視的初期降伏曲面は等方性を示すが、母材が降伏する場合と異なり、その曲面は楕円形状とはならず角を持つ。図中に破線で示したのは、長軸方向を $\theta = 0 \sim 170$ 度の範囲で 10 度刻みとした 18 種類の介在物のうち、どれか 1 種類のみを 13.2% 含む複合材料の場合の巨視的降伏曲面である。破線で示した曲面の最も内側の線を構成しているのは $\theta = 0$ 度と $\theta = 90$ 度方向の介在物がある場合の 2 つである。これに対してランダムに分布している場合の実線はその 2 つの破線の若干内側に位置している。この最も内側の破線と実線の差が、複数種類の介在物同士の相互作用を表している。ただし、ランダムに分布しているとはいえ、この図のような载荷条件下では 18 種類の介在物のうち、 $\theta = 0$ 度と 90 度方向を向いた楕円介在物のどちらかひとつか、あるいは両方が同時に必ず降伏するため、巨視的な降伏もこのどちらかの介在物内の降伏によって決定されている。そのため降伏曲面は角をもつ形状となる。

4. すべりメカニズムで降伏する材料

金属のように結晶構造を持つ材料の降伏は、転位の存在の元での結晶格子の稠密面上のすべり変形によって起きることが知られている。単結晶であればそのようなすべりで降伏するが、それがランダムに分布する多結晶体である鋼等の材料では、巨視的には前節のような J_2 流れ則のような応力の 2 次形式の降伏曲面になることは実験でも確かめられており、一見、すべりメカニズムで生じているようには見えない。ここでは、そのすべり則で微視的には支配されるメカニズムを有する多結晶体や複合材料の巨視的降伏を考察したい。すべり変形のメカニズムの塑性モデルとしては、ここでは簡単のために

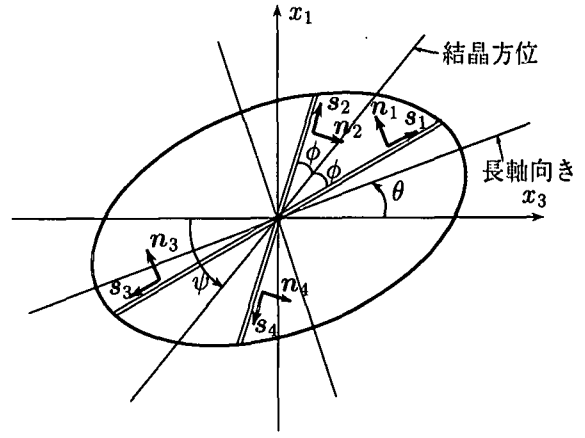


図-3 2重すべりモデルの模式図

Asaro の 2 重すべりモデル^{11),19)}を用いる。

4.1 すべり系を有する複合材料の構成則

図-3 は 2 重すべりモデルの模式図である。2 重すべりモデルでは x_3 - x_1 平面内で 4 つのすべり系を仮定しており、その 2 つのすべり面は x_3 軸から ψ の方向を向いた材料の結晶方位の代表向きを表す線に対して角度 ϕ だけ傾いているものとする。 n はすべり面の法線ベクトルで、 s はそのすべり面のすべり方向ベクトルである。このベクトルの成分は結晶方位の代表向きの角度を ψ とすると

$$\begin{aligned} s^1 &= -s^3 = \begin{bmatrix} \cos(\psi - \phi) \\ \sin(\psi - \phi) \end{bmatrix} \\ n^1 &= n^3 = \begin{bmatrix} -\sin(\psi - \phi) \\ \cos(\psi - \phi) \end{bmatrix} \\ s^2 &= -s^4 = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \phi) \\ \sin(\psi + \phi) \end{bmatrix} \\ n^2 &= n^4 = \begin{bmatrix} \sin(\psi + \phi) \\ -\cos(\psi + \phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

である。

滑動状態となったすべり面上のすべり変形 $\dot{\gamma}^\alpha$ によって生じる塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = p_{ij}^\alpha \dot{\gamma}^\alpha \quad (27)$$

となる。ここに添え字 α は滑動しているすべり系を区別するための記号であり、上式の α は通常の総和規約が適用されるものとし、その和は滑動しているすべり系、すなわち $\dot{\gamma}^\alpha > 0$ であるすべり系についてのみ加算されるものとする。 p_{ij}^α は各すべり系の法線ベクトル n とすべり方向ベクトル s で

$$p_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} (s_i^\alpha n_j^\alpha + s_j^\alpha n_i^\alpha) \quad (28)$$

と定義される。 α の総和は取らない。 具体的には

$$p^1 = -p^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin 2(\phi - \psi) & \cos 2(\phi - \psi) \\ \cos 2(\phi - \psi) & -\sin 2(\phi - \psi) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$p^2 = -p^4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin 2(\phi + \psi) & -\cos 2(\phi + \psi) \\ -\cos 2(\phi + \psi) & -\sin 2(\phi + \psi) \end{bmatrix}$$

である。 また流れ則に相当するすべり面上のせん断応力速度とすべり変形速度の関係は

$$\dot{\tau}^\alpha = K \dot{\gamma}^\alpha \quad (30)$$

で与えられるものとする。 ここに K は α -すべり系での抵抗係数である。 またすべり面上に発生するせん断応力速度は

$$\dot{\tau}^\alpha = \dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha \quad (31)$$

で表されるので、式 (30) に上式を代入するとすべり系の発展則は

$$\dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha = K \dot{\gamma}^\alpha \quad (32)$$

となる。

これに対し降伏関数は、すべり面上で発生するせん断応力 τ^α がそのすべり系の降伏せん断応力 τ_Y^α に達したときに材料が降伏すると仮定する Schmid 則に従うものとし

$$f^\alpha = \tau^\alpha - \tau_Y^\alpha = \sigma_{ij} p_{ij}^\alpha - \tau_Y^\alpha \quad (33)$$

で表されるものとする。 本論文での数値解析では厳密に上式を満足することが困難なため、少し緩和して $-0.001 \times \tau_Y^\alpha < f^\alpha < 0.001 \times \tau_Y^\alpha$ を満たしたときに材料が降伏するとした。 式 (30) と比較して明らかなように、微視的には塑性ひずみの法線則を仮定したことになる。 しかし、式 (14) で定義したように、巨視的な塑性ひずみは微視的なその平均ではないため、巨視的に法線則が成立するか否かについて、ここでは興味を持っている。 弾性・載荷・除荷の判定は

$$\text{弾性} \quad \text{もし } 0 \leq \sigma_{ij} p_{ij}^\alpha < \tau_Y^\alpha \quad (34a)$$

$$\text{除荷} \quad \text{もし } f^\alpha = 0 \text{ かつ } \dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha < K \dot{\gamma}^\alpha \quad (34b)$$

$$\text{載荷} \quad \text{もし } f^\alpha = 0 \text{ かつ } \dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^\alpha = K \dot{\gamma}^\alpha \quad (34c)$$

で行う。 式 (15) の表現を用いると

$$Q = R = \frac{1}{\sqrt{K}} p^\alpha \quad (35)$$

となるような関連流れ則を仮定したことになる。

4.2 問題の設定

ここでは多結晶体の模擬が念頭にあり、また母材にはある一方向の結晶方位しか与えることができないので、介在物が降伏する場合についてのみ報告する。 母材の材料定数は $E_M = 60 \text{ GPa}$, $\nu_M = 0.3$ で、介在物の材料定数は $E_i = 450 \text{ GPa}$, $\nu_i = 0.2$, せん断降伏応力 $\tau_Y^\alpha = 100 \text{ MPa}$, $K = 1.0 \text{ MPa}$ とした。 またすべり系の向きについては、立方晶の場合の稠密面のなす

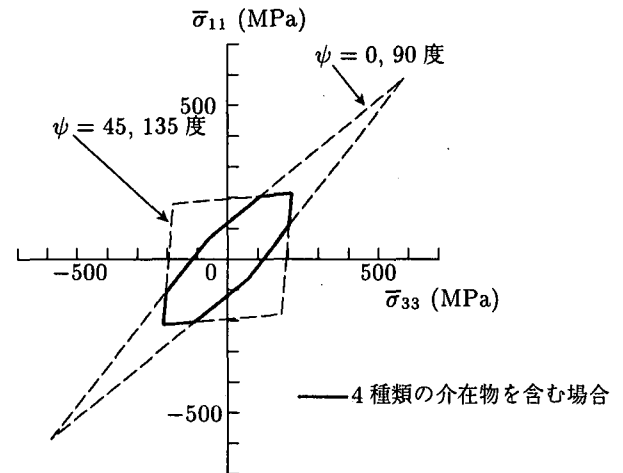


図-4 $\theta = 45$ 度で $\psi = 0, 45, 90, 135$ 度の4種類の介在物を含む場合の巨視的初期降伏曲面

角を3次的にはおよそ70度と考え、 $\phi = 35$ 度にした。 また介在物の形状は半径比が1:1.5の回転楕円体である。 定式化と解析は3次元で行っているが、Asaroの2重すべりを用いているため、介在物はその長軸が x_1 - x_3 面内に常に含まれている場合のみを扱う。

4.3 結晶方位のみ複数種存在する場合

図-4の実線は、介在物の長軸の向きは $\theta = 45$ 度の1種類だけであるものとし、結晶方位のみが $\psi = 0, 45, 90, 135$ 度の4種類を均等に含む場合の σ_{33} - σ_{11} 平面で描いた巨視的初期降伏曲面である。 4種類の介在物の体積比率の合計が16.2%となるようにそれぞれを4.05%とした。 また4本の破線はそれぞれ1種類の介在物のみを体積比率16.2%で含む場合の巨視的初期降伏曲面である。 前節の介在物が降伏する例と同様、4種類の介在物を含む場合の巨視的初期降伏曲面は、各1種類の介在物のみを含んだ場合の複数の降伏曲面のうち最も内側にくる線を結んだ形となっている。 しかも、介在物の向きが1種類しか存在しないため、介在物同士の相互作用は森・田中理論の枠組内では考慮できず、各1種類の場合の線と重なっている。

これに対し、結晶方位の向きの分布を増やし、 ψ を $0 \sim 175$ 度までに5度ずつ変化させた36種類の介在物を含む場合の巨視的初期降伏曲面を描いたのが図-5である。 図中の左上のイラストのような複合材料を考えていることになる。 得られた曲面は区分的には直線であるが、巨視的にはほぼ楕円形状になっており、いわゆる von-Mises の降伏曲面のような応力の二次形式で降伏関数を定義できることを示している。

4.4 介在物の向きと結晶方位を均等に分布させた場合

実際の複合材料あるいは多結晶体の場合には、介在物あるいは単結晶の形状の例えば長軸方向の向きの分布も

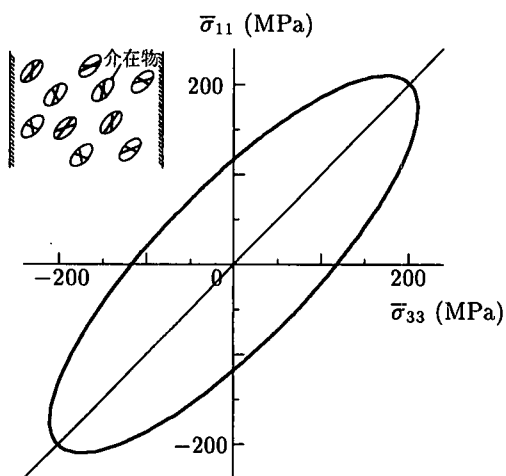


図-5 $\theta = 45$ 度で均等な (36 種類の) ψ の分布を持つ場合の巨視的初期降伏曲面

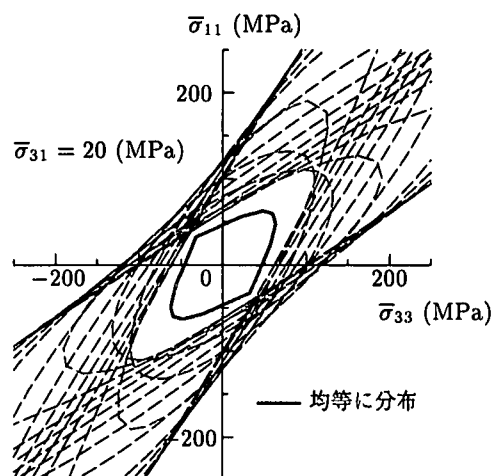


図-7 ランダムな介在物の分布を持つ場合に $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{11}$ 平面で描いた巨視的初期降伏曲面 ($\bar{\sigma}_{31} = 20$ MPa)

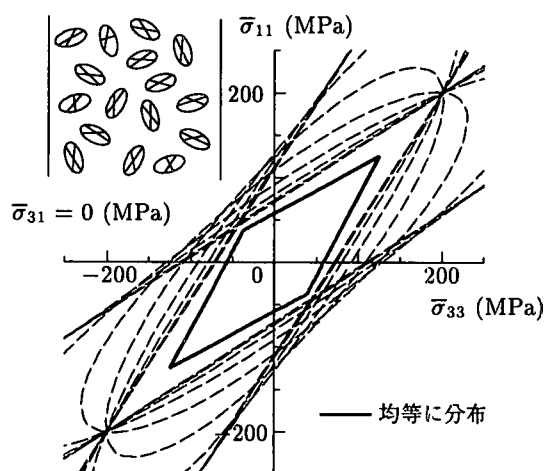


図-6 ランダムな介在物の分布を持つ場合に $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{11}$ 平面で描いた巨視的初期降伏曲面 ($\bar{\sigma}_{31} = 0$ MPa)

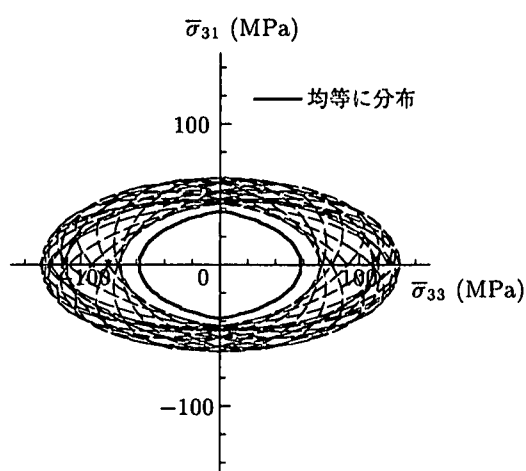


図-8 ランダムな介在物の分布を持つ場合に $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{31}$ 平面で描いた巨視的初期降伏曲面

ランダムで、かつ、各々の介在物あるいは単結晶の中の結晶方位も長軸方向の向きに依らずランダムなはずである。そのように考えると前節の結果は例えば圧延されて粒子の向きが揃った材料のモデルと考えてよいだろう。

ここでは介在物の長軸方向 θ も $0 \sim 170$ 度まで 10 度刻みで分布させ、かつ各 θ に対する結晶方位の代表向き ψ も $\psi = 0 \sim 175$ 度までを 5 度刻みで与え、全部で 648 種類の介在物が均等に分布する複合材料を対象とする。介在物の体積比率も合計で 16.2% となるように 0.025% ずつとした。この場合の巨視的初期降伏曲面が図-6と図-7である。この2つの図はそれぞれ $\bar{\sigma}_{31} = 0, 20$ MPa の2つの平面で切り、 $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{11}$ 平面に投影して描いた前出と同様の巨視的降伏曲面を別々に描いたものである。同図中の破線は前節のように介在物の長軸の向きをひとつに固定した場合の結果である。つまり、それぞれ結晶方位の代表向きのみを $\psi = 0 \sim 175$ 度の範囲に

分布させ、介在物の長軸向きは $\theta = 0 \sim 170$ 度のうちどれかひとつに固定した 36 種類の介在物が含まれる場合の巨視的初期降伏曲面である。体積比率は合計で 16.2% となるようにしてある。

図-6 の $\bar{\sigma}_{31} = 0$ MPa の場合、複合材料の巨視的初期降伏曲面は4つの角を持つ菱形をしている。これは $\theta = 0$ 度と $\theta = 90$ 度の場合の個々の降伏曲面が最も内側にあることから類推できるように、この2つの長軸方向を持った介在物中の降伏によって巨視的な降伏が決定されるためである。また様々な長軸向きを持つ介在物が同時に含まれるため、相互作用によって $\theta = 0$ 度の介在物のみが含まれる場合と $\theta = 90$ 度の介在物のみが含まれる場合の降伏曲面を結んだ破線よりも若干内側に降伏曲面が位置している。

一方、図-7 の $\bar{\sigma}_{31} = 20$ MPa の場合には、巨視的初期降伏曲面では4つのうち2つの角が丸くなっている。

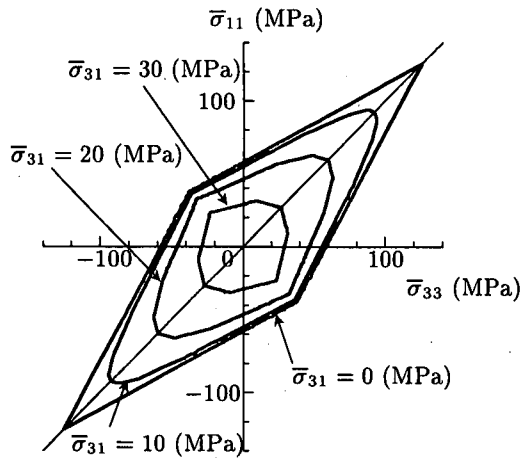


図-9 ランダムな介在物の分布を持つ場合に $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{11}$ 平面に投影した巨視的初期降伏曲面のコンター図

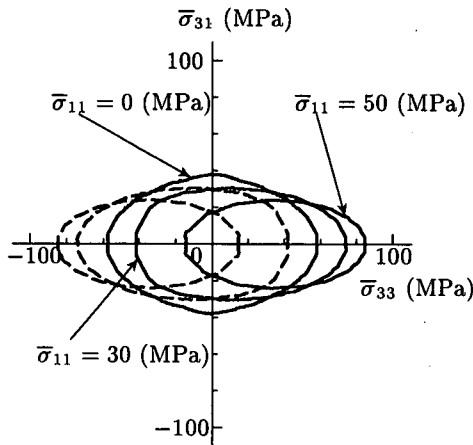


図-10 ランダムな介在物の分布を持つ場合に $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{31}$ 平面に投影した巨視的初期降伏曲面のコンター図

この場合、巨視的な降伏は $\theta = 0$ 度と $\theta = 90$ 度の介在物のみによっては決まらず、いく種類かの長軸向きを持つ介在物を含む場合の降伏曲面が重なりあって決まるために、降伏曲面の角が消えたように若干丸く（区分的には直線）になっている。またこの場合も、介在物同士の相互作用のために長軸向き θ を固定した個々の場合の降伏曲面（破線）を結んだ線よりも若干内側に降伏曲面が位置している。

別の応力軸から眺めるために $\bar{\sigma}_{11} = 0$ MPa と固定して $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{31}$ 平面で描いた巨視的初期降伏曲面を図-8 に実線で示した。破線は介在物の長軸向き θ をどれか1つに固定して介在させた場合の巨視的初期降伏曲面である。この向きで眺めた降伏曲面にはほとんど角は現れていない。また、介在物の長軸方向をひとつに固定して描いた降伏曲面を結んだ線はやや内側にくるのは、やはり介在物同士の相互作用があるためである。

以上をまとめて $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{11}$ 平面と $\bar{\sigma}_{33}$ - $\bar{\sigma}_{31}$ 平面に投影し

てコンター図のように描いた巨視的初期降伏曲面が図-9 と図-10 である。均等な介在物の分布を持つ場合、巨視的初期降伏曲面の3次元的な形は、一部の頂点が尖った8面体状の曲面になっている。角点を除けば、古典的な現象論的構成則による降伏曲面の定義を複合材料にも用いることの可能性を示唆している。

5. 初期降伏曲面における発展則

最後に巨視的な塑性ひずみ増分の特性について考察をしたい。前節では初期降伏曲面の特性を考察した。おそらく x_3 - x_1 平面内だけで介在物や結晶方位の向きを変化させているために、降伏曲面にかなり鋭角な角点が残っていると考えられるため、3次元的な介在物の分布を対象とした研究が課題として残っている。しかしここでは、特にこの角点での巨視的な流れ則に着目して、その付近での巨視的發展則を考察する。

5.1 降伏曲面の法線方向

降伏関数は式 (33) つまり

$$f^\alpha = \tau^\alpha - \tau_Y^\alpha = \sigma_{ij} p_{ij}^\alpha - \tau_Y^\alpha \quad (36)$$

で表される。ここに σ_{ij} は介在物内部における局所的な応力成分である。介在物内部の応力を巨視的な応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ で記述すると、式 (13b) の増分関係がそのまま初期降伏までは成立するので、上付きドットを取り去って

$$\sigma_{ij} = B_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (37)$$

が成り立つ。よって上式を式 (36) に代入するすることにより、巨視的な降伏関数は

$$f = B_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} p_{ij}^\alpha - \tau_Y^\alpha \quad (38)$$

と書き換えられる。したがって、巨視的初期降伏曲面の法線方向は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} &= B_{klmn} \frac{\bar{\sigma}_{mn}}{\bar{\sigma}_{ij}} p_{kl}^\alpha \\ &= B_{klmn} \delta_{mi} \delta_{nj} p_{kl}^\alpha \\ &= B_{klji} p_{kl}^\alpha \end{aligned} \quad (39)$$

と表現できることになる。一方巨視的な塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^p$ は式 (14) から求められる。ここでは巨視的初期降伏曲面の法線ベクトルと塑性ひずみ増分の向きとを9次元空間のベクトル成分のように扱い、その正規化したもの同士のベクトルの内積を計算することによって法線則が満たされるか否かを調べることにする。

5.2 介在物の体積比率が比較的小さい場合

まず前節で取り扱ったような、介在物の体積比率が母材に比べて比較的小さい複合材料を対象とする。材料定数や介在物の形状・体積比率は前節と同様である。図-11 の上の図は介在物の長軸向きも結晶方向の代表向きとともに均等に分布した場合を考え、介在物の長軸向き

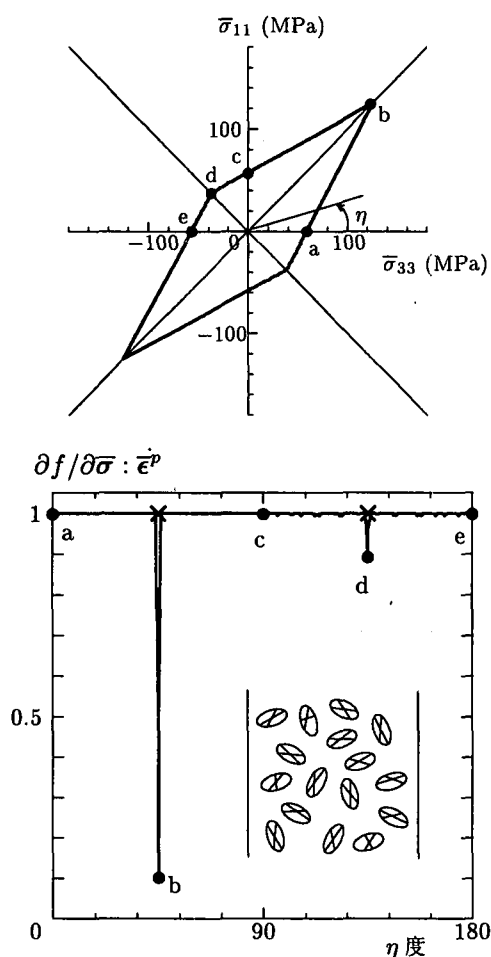


図-11 θ と ψ を均等に与えた場合の巨視的初期降伏曲面の法線方向と塑性ひずみ増分の向きとの内積

を $\theta = 0 \sim 170$ 度の範囲で 10 度刻みに与え、各 θ に対して結晶方向の代表向きを $\psi = 0 \sim 175$ 度の範囲で 5 度刻みに与えた 648 種類の介在物を含んだ場合の σ_{33} - σ_{11} 平面における巨視的初期降伏曲面で、図-6 と同じものである。この下の図が、降伏曲面の外向き法線ベクトルと巨視的塑性ひずみ増分の向きを正規化したもの同士の内積を縦軸にとり、横軸には σ_{33} - σ_{11} 平面内での載荷方向の向きを表す角度 η をとったものである。上の図と下の図で a, b, c, d, e といった記号はお互いに対応しており、それぞれ σ_{33} - σ_{11} 平面内での角度 $\eta = 0, 45, 90, 135, 180$ 度の位置におけるものである。

この場合の降伏曲面は菱形になり、4 つの角が存在する。どの載荷方向についても降伏曲面の法線ベクトルと巨視的塑性ひずみ増分の向きとの内積はほぼ 1 (0.9994) になっている。しかしその中でも、降伏曲面の角点に位置する b 点と d 点では内積値が小さくなっている。図-6 から分かるように、実は降伏曲面の b 点は多種の介在物の長軸方向を持つ場合の降伏曲面が一点に集中しており、いく種類かの介在物が同時に降伏する点である。また d 点も $\theta = 0$ 度と 90 度の介在物が同時に降伏す

る点である。そこで b 点と d 点で交わる降伏曲面のそれぞれの法線方向をベクトルとして足し合わせて正規化し直し、すべての滑動しているすべり系の法線方向の中間的な法線方向を求めた。その中間的な法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の向きとの内積を求めたのが図中の $\times$ 印である。これらの内積の値 ($\times$ 印) はいずれの応力状態でもほぼ 1 になっており、「中間的な法線則¹」が満足されていることになる。ただし、c 点と e 点の間の応力状態ではある一つの介在物しか降伏しておらず、その内積の値が 1 にはならない場合もあってグラフのプロットが凸凹しているが、その理由については解明できなかった。

以上のように、降伏曲面の法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の方向の内積は、厳密に 1 にはならないものの、全体的には 1 に非常に近い。森・田中理論があくまでも平均場に対する近似的なモデルであることから、断定はできないが、近似的には法線則が成り立つものと考えていいのかもしれない。つまり、巨視的・現象論的には von-Mises の降伏条件や関連流れ則のような古典論で、ある程度以上の近似度で複合材料の塑性挙動を表現できる可能性がある。

5.3 介在物の体積比率を大きくした場合

最後に、多結晶体を近似的に模擬するために、介在物の体積比率を非常に大きくし、ほとんどが介在物で占められるような複合材料を対象としてみる。多結晶体は任意の結晶方位を持つ結晶構造がランダムな方向を向いて集まったものと考えられるので、ひとつの単結晶をひとつの介在物と考え、その長軸方向を $\theta = 0 \sim 170$ 度の範囲で 10 度刻みに均等に分布させ、各 θ に対して結晶方位の代表向きを $\psi = 0 \sim 175$ 度の範囲で 5 度刻みに均等に与えた 648 種類の介在物を含む複合材料によって多結晶体をモデル化する。介在物の体積比率は合計で 97.2% となるようにそれぞれを 0.15% とした。この体積比率の設定だけが前節の設定と異なる点である。

前節同様、図-12 の上の図はそのような複合材料の巨視的初期降伏曲面を σ_{33} - σ_{11} 平面で描いたものである。またその下の図は、その降伏曲面の法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の方向の内積の値を示したものである。介在物の長軸向きが面内の各方向に均等に向いているため補強効果が均等に働き、降伏曲面は介在物の体積比率が小さい場合の図-11 に示した降伏曲面をそのまま膨らました菱形になっている。図-11 の場合と同様に降伏曲面の角にあたる b 点では内積の値は負にすらなっているが、それ以外の応力状態では、もうひとつの角点の d 点も含めてほぼ 0.94 程度の値を持つことがわかった。また b 点 d 点の応力状態では、これも前節同様、滑動したすべてのすべり系の法線方向の中間方向との内積をとる

¹ 複数の法線の中間的な向きとの関係なので、正確ではないがわかり易さのためにこう呼ぶことにした。

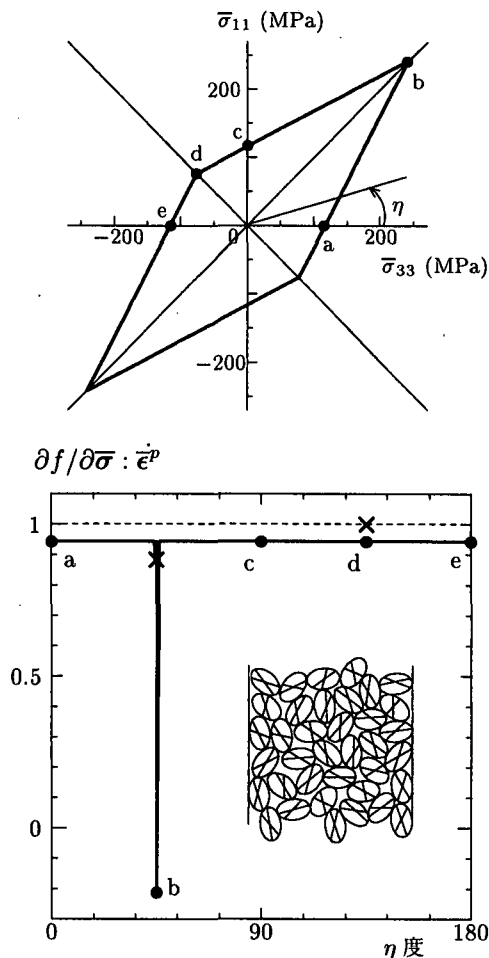


図-12 介在物の体積比率を非常に大きくしたときに \$\theta\$ と \$\psi\$ を均等に与えたときの巨視的初期降伏曲面の法線方向と塑性ひずみ増分の向きとの内積

と、図の×印のようにその内積が比較的大きな値を示した。また d 点では、中間的な法線方向との内積の×印は 1 になっており、「中間的な法線則」が満足されていることを示すことができた。

6. おわりに

森・田中理論を増分型弾塑性体の定式化に当てはめたものを近似的な巨視挙動予測に用い、複数種類の介在物を含む複合材料を対象として、初期降伏特性を数値的に検討した結果、次のような知見が得られた。

- 介在物間の相互作用による降伏曲面の特性を具体的に図示できた。
- 介在物が降伏する場合の巨視的降伏は、最初に降伏する少ない種類の介在物の降伏で決定されることが多く、降伏曲面には角が生じる。
- 微視的にはすべりメカニズムで降伏する場合にも、巨視的降伏曲面は von-Mises のそのような応力の二次形式状になり得る。

- 巨視的な法線則は完全には満たされていないが、極端に法線則が崩れることはない。
- 角点での塑性ひずみ増分は、載荷状態にある複数の材料の降伏面の複数の法線の中間的な法線方向に非常に近い方向を向いていることを定量的に確認した。

ただし、ここでは x_3 - x_1 面内でしか介在物の向きを分布させていない上に、すべりも 2 次元的である。このことが巨視的な降伏曲面の鋭角の角の発生や、流れ則の法線則からの遊離を導いた可能性もある。3 次元的な検討については今後の課題としたい。

この論文の主目的は、通常の構造設計レベルで用いられている巨視的な構成則が、微視構造によってどのように影響を受けるのかについて、できるだけ解析的に検討することであった。そういった視点での知見は上述のように得られたと考える。ただ、ここで用いた手法が将来にわたってそのまま構成モデルとして利用できるか否かについては、著者らも否定的である。特に構造降伏のシミュレーションに現時点では困難があり、そういう点からもこの手法に巨視的構成則の代わりをさせるのは難しい。しかし、新しい材料を開発する際には、このようなやや解析的な手段が経験による予測を補間し援助するのではないかと考えている。

参考文献

- 1) 石井建樹, 金子賢治, 岸野佑次: 真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5, pp.451-460, 2002.
- 2) 阪口秀: DEM による乾燥砂の三軸圧縮シミュレーション, 第 2 回地盤工学会 TC34 国内委員会での話題提供, 2003.
- 3) 松井和己, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岩熊哲夫: 弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価, 土木学会論文集, No.682/I-56, pp.335-346, 2001.
- 4) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 5) Hashin, Z. and Shtrikman S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- 6) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 7) 岩熊哲夫, 田辺将樹, 岩崎智明, 小山茂: 複合材料や多結晶体の初期降伏曲面の特性, 応用力学論文集, Vol.4, pp.405-412, 2001.
- 8) 岩崎智明, 岩熊哲夫, 小山茂: 複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測, 応用力学論文集, Vol.5, pp.273-282, 2002.
- 9) Tandon, G.P. and Weng, G.J.: A theory of particle-reinforced plasticity, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*,

- Vol.55, pp.126-135, 1988.
- 10) 岩熊哲夫, 堀宗朗, 木谷朋之, 村外志夫: 内部に微視構造を有する材料の平均弾塑性関係の一評価, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.375-380, 1993.
 - 11) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol.A394, pp.87-119, 1984.
 - 12) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., 1982.
 - 13) Ju, J.W. and Chen, T.-M.: Micromechanics and effective elastoplastic behavior of two-phase metal matrix composite, *J. Eng. Mater. Tech. ASME*, Vol.16, pp.310-318, 1994.
 - 14) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
 - 15) Ju, J.W. and Zhang X.D.: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.4045-4069, 2001.
 - 16) 小山茂, 岩熊哲夫, 岩崎智明, 小倉崇生, 三井康司: 複合材料と多結晶体の平均的性質, 土木学会論文集, No.661/I-53, pp.265-272, 2000.
 - 17) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
 - 18) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland, 1993.
 - 19) Asaro, R.J.: Micromechanics of Crystals and Polycrystals, *Advances in Appl. Mech.*, Vol.23, pp.1-115, 1983.

(2003 年 4 月 18 日 受付)