

3次元 spline 帯板法を用いた 粘弾性直交異方性厚板の振動解析と損失正接について

Vibration and loss tangent of viscoelastic and orthotropic thick plates
using the three-dimensional spline strip method

名木野晴暢* 水澤富作**

Harunobu NAGINO, Tomisaku MIZUSAWA

*大同工業大学大学院 工学研究科 建設工学専攻 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents an analysis of the vibration and the loss tangent of viscoelasticity, orthotropic thick rectangular plates using the three-dimensional spline strip method. To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by other numerical methods based on the theory of elasticity and Mindlin plate theory. Good accuracy is obtained. The effects of thickness/width ratio and variation of elastic modulus on frequency parameters of wooden plates are investigated.

A loss tangent of wooden plates is calculated by the present method on the basis of MacIntyres procedure, and the influence of thickness/width ratio and boundary conditions on the loss tangent is examined.

Key Words: three-dimensional spline strip method, viscoelastic and orthotropic thick plates, vibration, loss tangent

1. まえがき

衝撃荷重を受ける木構造物や木製楽器の動的応答や音響特性を明らかにするためには、木材の材料学的な異方性(繊維方向と放射方向の弾性係数比, $E_L/E_R \approx 10$, 繊維方向の弾性係数と放射面のせん断弾性係数の比, $E_L/G_{RT} \approx 300$)を考慮すると同時に、木材の粘弾性による損失正接($\tan \delta = Q^{-1}$)も評価する必要がある。定常振動を仮定した粘弾性ばりや粘弾性板の振動解析に用いられる使用材料の複素弾性率などは、実部に相当する材料の動的ヤング率、動的せん断弾性率、ポアソン比と同時に、虚部のこれらの物性値に対応した損失正接を実験的に求める必要があり、これまでに多くの実験結果が報告されている。周辺単純支持された粘弾性等方性板の振動解析は、早くから Srinivas ら¹⁾により研究されている。

一方, McIntyres²⁾は、等方性薄板の内部摩擦に起因する損失正接の理論的な評価法を提案し、実験値と比較について検討している。また、中尾ら³⁾は、McIntyres 方法を薄板理論に基づく粘弾性異方性板の振動解析に適用し、木板の振動特性に与える損失正接の影響や実験値との比較検討を行っているが、損失正接に与える横せん断変形の影響については十分検討されていないように思われる。最近、近藤ら⁴⁾は、横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した粘弾性直交異方性 Mindlin 板理論を適用し、木板の振動特性に与える損失正接の影響について検

討している。しかしながら、木板の損失正接に与える厚さ方向の弾性係数の影響については、さほど検討されていないように思われる。

これまでに、3次元弾性理論に基づく等方性厚板の振動解析に関する研究は、数多く報告されているが^{5), 6), 9), 10)}、直交異方性厚板の振動解析や振動特性に与える厚さ方向の影響について研究した報告は、比較的少ないように思われる^{5), 8), 9)}。

本論文では、3次元直交異方性理論に基づき、図-1に

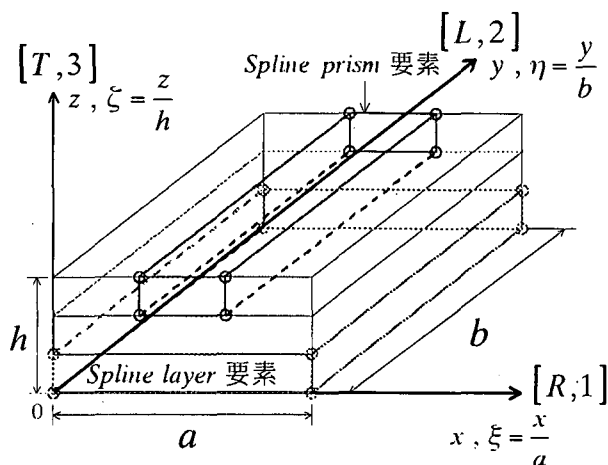


図-1 3次元 spline 帯板モデルと座標系

示すような, 1 方向に Fourier 級数展開した spline prism 法 (SPM) 及び 2 方向に Fourier 級数展開した spline layer 法 (SLM) である 3 次元 spline 帯板法 (3D-SSM) を用いて, 直交異方性厚板の振動解析を行い, 本手法の解の収束性及精度比較について検討を行い, 直交異方性厚板の振動特性に与える板厚比や異方性パラメータの影響について明らかにしている。

また, McIntyer らの微小減衰近似法²⁾を用いて, 直交異方性を有する木板の損失正接を算定し, 木板の損失正接に与える振動モード, 板厚比や境界条件などの影響について検討を行っている。

2. 式の定式化

本論文では, 直交異方性理論に基づき, 1 方向に Fourier 級数展開した SPM 及び 2 方向に Fourier 級数展開した SLM である 3 次元 spline 帯板法を用いているが, 本文では, SPM の定式化について示す。

2.1 振動解析

3 次元弾性理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて, 図-1 に示すような 3 次元 spline prism 要素モデルを導く。Spline prism 法は, 2 方向の変位には B-spline を仮定し, 長手方向の変位には Fourier 級数展開し, 関数の直交性を利用して 3 次元問題を 2 次元問題に変換した半数値解析法である。また, spline 次数を高めることによって, 任意の spline prism 要素モデルが導ける。

式の定式化にあたり, 以下のような解析仮定を設ける。

- (i) 微小変形を仮定する。
- (ii) 厚板は直交異方性, 線形弾性であると仮定する。
- (iii) 長方形板の板厚は, 一定であると仮定する。
- (iv) 相対する 2 面は, ダイヤフラムタイプの単純支持されていると仮定する。

また, 式の定式化にあたり, 次式で表される無次元直交座標, (ξ, η, ζ) を用いる。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h \quad (1)$$

ここで, a は厚板の幅, b は長さ, h は厚さである。

prism 要素における ξ, η, ζ 方向の変位 U, V, W は, それぞれ, 相対する $\xi\zeta$ 面がダイヤフラムタイプの単純支持されていると仮定すれば, 次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{l=1}^r S_x(\xi, \zeta) \cdot Y_l(\eta) \\ V(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{l=1}^r S_y(\xi, \zeta) \cdot \bar{Y}_l(\eta) \\ W(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{l=1}^r S_z(\xi, \zeta) \cdot Y_l(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで, $S_\alpha(\xi, \zeta)$ ($\alpha = x, y, z$) は spline 関数を用いて, 式 (3) で表される。また, $Y_l(\eta)$ と $\bar{Y}_l(\eta)$ は, それぞれ与えられた境界条件を満足した固有関数であり,

r は固有関数の級数展開の項数である。

$$\left. \begin{aligned} S_x(\xi, \zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_z} A_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_l \\ S_y(\xi, \zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_z} B_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_l \\ S_z(\xi, \zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_z} C_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\zeta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_l \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} は未定係数であり,

$N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\zeta)$ は, $k-1$ 次の正規化された B-spline 関数である。また, $[N]_{mn}$ は,

$$[N]_{mn} = \begin{bmatrix} N_{1,k}(\xi) \cdot N_{1,k}(\zeta), \\ N_{1,k}(\xi) \cdot N_{2,k}(\zeta), \\ \cdots, N_{i_x,k}(\xi) \cdot N_{i_z,k}(\zeta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

であり, 未定係数ベクトルは, 次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_A\}_l &= \{A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{i_x i_z}\}_l^T \\ \{\delta_B\}_l &= \{B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{i_x i_z}\}_l^T \\ \{\delta_C\}_l &= \{C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{i_x i_z}\}_l^T \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで, $i_x = k-1+M_x, i_z = k-1+M_z$ であり, M_x と M_z は, それぞれ x と z 方向の prism 要素の分割数, $k-1$ は spline 次数である。

式 (2) は, 次式のように表わすことができる。

$$\{d\} = \sum_{l=1}^r [S]_{mn}^l \{\Delta\}_l \quad (6)$$

ここで,

$$\{d\} = \{U, V, W\}^T, \\ \{\Delta\}_l = \{\{\delta_A\}_l, \{\delta_B\}_l, \{\delta_C\}_l\}^T,$$

$$[S]_{mn}^l = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Y_l & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} \bar{Y}_l & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{mn} Y_l \end{bmatrix} \quad (7)$$

である。

3 次元弾性理論で定義される垂直ひずみ及びせん断ひずみを無次元直交座標で表せば, 次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/a)(\partial U / \partial \xi) \\ (1/b)(\partial V / \partial \eta) \\ (1/h)(\partial W / \partial \zeta) \\ (1/b)(\partial U / \partial \eta) + (1/a)(\partial V / \partial \xi) \\ (1/h)(\partial V / \partial \zeta) + (1/b)(\partial W / \partial \eta) \\ (1/a)(\partial W / \partial \xi) + (1/h)(\partial U / \partial \zeta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

これをマトリックス表示すると、

$$\{\varepsilon\} = [T] \{d\} \quad (9)$$

で表される。

ここで、 $[T]$ は微分演算マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/a)(\partial/\partial\xi) & 0 & 0 \\ 0 & (1/b)(\partial/\partial\eta) & 0 \\ 0 & 0 & (1/h)(\partial/\partial\zeta) \\ (1/b)(\partial/\partial\eta) & (1/a)(\partial/\partial\xi) & 0 \\ 0 & (1/h)(\partial/\partial\zeta) & (1/b)(\partial/\partial\eta) \\ (1/h)(\partial/\partial\zeta) & 0 & (1/a)(\partial/\partial\xi) \end{bmatrix} \quad (10)$$

したがって、式(8)に式(6)を代入すると、次式が得られる。

$$\{\varepsilon\} = \sum_{l=1}^r [T][S]_{mn}^l \{\Delta\}_l = \sum_{l=1}^r [B]_{mn}^l \{\Delta\}_l \quad (11)$$

ここで、

$$[B]_{mn}^l = \sum_{n=1}^{i_1} \sum_{n=1}^{i_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} Y_l & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \bar{Y}_l & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} \dot{N}_{m,k} \dot{N}_{n,k} Y_l \\ \frac{1}{b} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \dot{Y}_l & \frac{1}{a} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \bar{Y}_l & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} \dot{N}_{m,k} \dot{N}_{n,k} \bar{Y}_l & \frac{1}{b} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \dot{Y}_l \\ \frac{1}{h} \dot{N}_{m,k} \dot{N}_{n,k} Y_l & 0 & \frac{1}{a} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} Y_l \end{bmatrix} \quad (12)$$

である。ただし、 $N_{m,k} = N_{m,k}(\xi)$,

$$N_{n,k} = N_{n,k}(\zeta), \quad Y_l = Y_l(\eta), \quad \bar{Y}_l = \bar{Y}_l(\eta),$$

$$\dot{N}_{m,k} = \partial N_{m,k}(\xi)/\partial\xi, \quad \dot{N}_{n,k} = \partial N_{n,k}(\zeta)/\partial\zeta,$$

$$\dot{Y}_l = \partial Y_l(\eta)/\partial\eta, \quad \dot{\bar{Y}}_l = \partial \bar{Y}_l(\eta)/\partial\eta \text{ である。}$$

3次元弾性体の構成式は、次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (13)$$

ここで、 $\{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$,

$\{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$ である。 $[D]$ は、直交異方性弾性マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[D] = D_{00} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ただし、 $D_{12} = D_{21}$, $D_{13} = D_{31}$, $D_{23} = D_{32}$ であり、 $D_{00} = E_x$ である。また、 D_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) は、それぞれ次式で表される。

$$D_{11} = (1 - \nu_{zy} \nu_{yz}) \times 1/S$$

$$D_{12} = D_{21} = (\nu_{yx} + \nu_{zx} \nu_{yz}) \times 1/S$$

$$D_{13} = D_{31} = (\nu_{zx} + \nu_{yx} \nu_{zy}) \times 1/S$$

$$D_{22} = \frac{E_y}{E_x} (1 - \nu_{zx} \nu_{xz}) \times 1/S$$

$$D_{23} = D_{32} = \frac{E_y}{E_x} (\nu_{zy} + \nu_{zx} \nu_{xy}) \times 1/S$$

$$D_{33} = \frac{E_z}{E_x} (1 - \nu_{yx} \nu_{xy}) \times 1/S$$

$$D_{44} = G_{xy}/E_x, \quad D_{55} = G_{yz}/E_x, \quad D_{66} = G_{zx}/E_x \quad (15)$$

ただし、 $S = 1 - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{xz} \nu_{yx} \nu_{zy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy}$ である。

直交異方性体においては、以下に示すような相反定理が成り立つ。

$$\nu_{xy}/E_x = \nu_{yx}/E_y, \quad \nu_{yz}/E_y = \nu_{zy}/E_z,$$

$$\nu_{zx}/E_z = \nu_{xz}/E_x \quad (16)$$

したがって、直交異方性厚板のひずみエネルギー U_p は、無次元直交座標で表せば次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} (abh) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} (abh) \int_0^1 \int_0^1 \sum_{l=1}^r \sum_{q=1}^s \{\Delta\}_l^T [B]_{mn}^l [D] [B]_{ij}^q \{\Delta\}_q d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^r \sum_{q=1}^s \{\Delta\}_l^T [K]_{mnij}^{lq} \{\Delta\}_q \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $[K]_{mnij}^{lq}$ は剛性マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[K]_{mnij}^{lq} = (abh) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [B]_{mn}^l [D] [B]_{ij}^q d\xi d\eta d\zeta \quad (18)$$

調和振動を仮定すれば、運動エネルギー T は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
T &= (\rho \omega^2)(abh) \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (U^2 + V^2 + W^2) d\xi d\eta d\zeta \\
&= (\rho \omega^2)(abh) \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left[\{d\}^T \{d\} \right] d\xi d\eta d\zeta \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left\{ \Delta \right\}_i^T [M]_{mnij}^{iq} \left\{ \Delta \right\}_j
\end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $[M]_{mnij}^{iq}$ は、質量マトリックスであり、次式で表される。

$$[M]_{mnij}^{iq} = (\rho abh) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [S]_{mn}^{Tq} [S]_{ij}^q d\xi d\eta d\zeta \quad (21)$$

ただし、 ρ は密度、 ω は円振動数(rad/sec)である。

次に、 ξ 軸に垂直な厚板の境界面 $\xi = \xi_{ic}$ で任意の境界条件を考慮するために、仮想バネ法を用いる⁹⁾。すなわち、 $\xi = \xi_{ic}$ の境界面で、各変位 U 、 V 、 W 、 $\partial U / \partial \xi$ に対応する仮想バネ法係数 α 、 β 、 δ 、 χ を導入する。これらの仮想バネによるひずみエネルギー U_b は、次式で与えられる。

$$U_b = (bh) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \alpha U^2 + \beta V^2 + \delta W^2 + \chi (\partial U / \partial \xi)^2 \right\} d\eta d\zeta \Big|_{\xi = \xi_{ic}} \quad (22)$$

ここで、 N_c は、境界条件を導入する境界面の数である。

したがって、板の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_p + U_b - T \quad (23)$$

ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、次式の固有方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{ \Delta \}_i^T = 0 \text{ より,}$$

$$\sum_{i=1}^r \left[\sum_{j=1}^s \left([K]_{mnij}^{iq} - \omega^2 [M]_{mnij}^{iq} \right) \{ \Delta \}_j \right] = 0 \quad (24)$$

ここで、剛性マトリックス $[K]_{mnij}^{iq}$ と質量マトリックス $[M]_{mnij}^{iq}$ は、次式のようなサブマトリックスから構成されている。

$$[K]_{mnij}^{iq} = \begin{bmatrix} [K]_{uu} & [K]_{uv} & [K]_{uw} \\ [K]_{vu} & [K]_{vv} & [K]_{vw} \\ [K]_{wu} & [K]_{wv} & [K]_{ww} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[M]_{mnij}^{iq} = \begin{bmatrix} [M]_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & [M]_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & [M]_{ww} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Appendixには、それぞれ、サブ剛性マトリックス $[K]_{ij}$ および、サブ質量マトリックス $[M]_{ij}$ が示してある。

η 軸に垂直な相対する2辺がダイヤフラムタイプの単純支持、つまり $\eta = 0, 1$ で、 $U = W = 0$ 及び、 $\partial V / \partial \eta = 0$ を仮定すれば、適用する固有関数は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Y_l(\eta) &= \sin(l\pi\eta) \\ \bar{Y}_l(\eta) &= \cos(l\pi\eta) \end{aligned} \right\} \quad (l = 1, 2, \dots, r) \quad (27)$$

よって、固有関数の直交性を用いれば、級数の連成項が消えるので、(24) 式は次式ようになる。

$$\sum_{i=1}^r \left([K]_{mnij}^{il} - \omega^2 [M]_{mnij}^{il} \right) \{ \Delta \}_i = 0 \quad (28)$$

ここで、 $[K]_{mnij}^{il}$ の大きさは (未知数の数)、 $3 \times (k-1+M_x) \times (k-1+M_z)$ で表される。

2.2 損失正接の算定方法

厚板の損失正接は、以下の解析仮定を用いて算定する。

- (i) 内部摩擦による材料の損失正接は小さい。
 - (ii) ポアソン比の損失正接は、十分小さいので無視する。
 - (iii) 物性値は、周波数、時間に依存せず一定である。
- 粘弾性直交異方性体の複素弾性率は、次式で与えられる。

$$E_j^* = E_j + i E_j \tan \delta_{E_j} \quad (j = x, y, z) \quad (29)$$

$$G_{jl}^* = G_{jl} + i G_{jl} \tan \delta_{G_{jl}} \quad (j, l = x, y, z)$$

ここで、 i は虚数単位であり、 $\tan \delta_{E_j}$ 、 $\tan \delta_{G_{jl}}$ は、それぞれ実験で求められた木材の動弾性係数 E_j 、 G_{jl} に対応する損失正接である。

直交異方性厚板の内部減衰による損失正接 $\tan \delta_p$ は、McIntyer ら²⁾の微小減衰近似法を適用すれば、実部と虚部のエネルギー概念に基づき、複素弾性率の実部の物性値より得られる固有値 $\tilde{\omega}_n$ および複素弾性率の虚部の物性値より得られる固有値 $\tilde{\omega}_n$ とすれば、近似的に、次式で評価することができる。

$$\tan \delta_p \equiv \tilde{\omega}_n^2 / \omega_n^2 \quad (30)$$

ここで、 n はモード次数である。

表-1 シトカスブルース柾目板の物性値及び損失正接³⁾

密度 [kg/m ³]	ヤング係数 [GPa]			せん断弾性係数 [GPa]			ポアソン比		
ρ	E_L	E_R	E_T	G_{RT}	G_{LT}	G_{LR}	ν_{LR}	ν_{LT}	ν_{RT}
390	11.6	0.90	0.50	0.03	0.72	0.76	0.37	0.47	0.43
	Material loss tangent [$\times 10^3$]								
	6.0	19.3	20.6	19.6	13.9	13.3	≈ 0		

L (繊維方向), R (放射方向) 及び T (接線方向) は, それぞれ y, x, z 方向に対応している。

表-2 アラゴナイト結晶の剛性値^{8),9)}

Properties of Aragonite crystal							
D_{22}/D_{11}	D_{33}/D_{11}	D_{12}/D_{11}	D_{13}/D_{11}	D_{23}/D_{11}	D_{44}/D_{11}	D_{55}/D_{11}	D_{66}/D_{11}
0.543103	0.530172	0.23319	0.010776	0.098276	0.262931	0.26681	0.159914

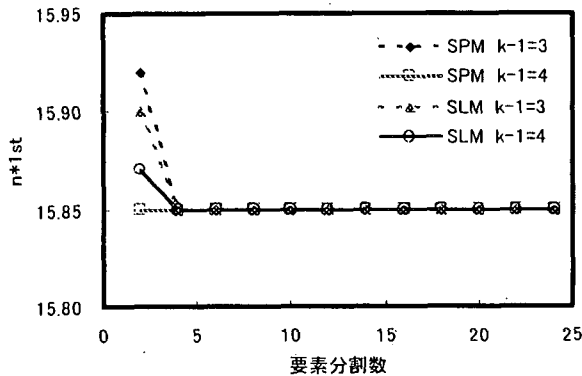


図-2 振動数パラメータ n^* に与える spline 次数と要素分割数の影響: SS-SS, $h/a=0.2$, $b/a=1.0$

3. 数値計算例及び考察

3.1 振動解析

ここでは, spline prism 法(SPM) と spline layer 法(SLM) を用いて, η 軸に垂直な相対する 2 面がダイヤフラム型の単純支持された直交異方性厚板の振動解析を行い, 解の収束性と精度比較を行っている。また, 直交異方性厚板の振動特性に与える板厚比や厚さ方向のヤング係数の変動の影響について検討している。

本数値計算例では, 厚さ方向と幅方向の要素分割数は同一とし, Gauss の数値積分法を採用している。また, 計算例に用いた直交異方性板は, 表-1 に示す物性値を持つシトカスブルース柾目板である。

振動数パラメータは, $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D_x}$ で表し,

$D_x = E_x h^3 / 12 (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ は板の曲げ剛性である。

(a) 本手法の収束性と精度比較の検討

図-2 には, 周面ダイヤフラム型の単純支持された (SS-SS) シトカスブルース柾目正方形板 (板厚比 $h/a = 0.2$) の基本振動数パラメータ, $n_{1st}^* = \omega_1 b^2 \sqrt{\rho h / D_x}$ の収束性に与える spline 次数 $k-1$ と prism 要素と layer 要素の分割数の影響が示してある。ここで, $k-1$ は 3 次と 4 次に設定して, 要素分割数は, 2 から 24 まで変化させている。

これより, 本手法は, 要素分割数を増大すると, 一

表-3 シトカスブルース柾目正方形板の振動数パラメータ n^* の精度比較: $b/a=1.0$, SS-SS

Boundary Condition	h/a	Method	modes				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
SS-SS	0.01	SPM	(1,1,0)	(2,1,0)	(3,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)
			40.86	64.88	110.9	137.8	156.2
		SLM	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
			40.86	64.88	110.9	137.8	156.2
	0.1	MPT ⁷⁾	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
			41.03	65.35	111.8	137.9	156.7
		CPT	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
			41.73	66.23	112.7	147.2	166.9
	0.2	SPM	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(1,3,0)	(2,2,0)
			22.34	43.18	45.67	63.40	64.83
		SLM	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)
			22.34	43.18	45.67	63.40	64.83
SS-CC	0.01	MPT	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)
			22.13	41.96	45.39	62.16	62.47
	0.1	SPM	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(1,3,0)	(2,2,0)
			15.85	26.96	38.22	38.38	47.88
		SLM	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)
			15.85	26.96	38.22	38.37	47.88
	0.2	MPT	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)
			15.61	26.10	36.71	37.68	46.84
	0.01	SPM	(1,1,0)	(2,1,0)	(3,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)
			46.47	81.98	139.7	140.1	165.6
		MPT	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
			46.57	82.13	140.2	140.5	166.0
SS-FF	0.01	CPT	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
			47.24	82.95	140.8	149.5	176.0
	0.1	SPM	(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(1,3,0)	(2,2,0)
			29.68	47.59	62.69	68.01	76.53
		MPT	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)
			29.37	46.37	61.87	65.39	75.24
	0.2	SPM	(1,1,0)	(1,2,0)	(1,3,0)	(2,1,0)	(1,4,0)
			23.42	31.64	41.43	50.89	51.50
		MPT	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)
			22.93	30.63	39.64	48.76	49.56
SS-FF	0.01	SPM	(1,1,0)	(2,1,0)	(3,1,0)	(4,1,0)	(1,2,0)
			34.68	39.33	56.30	91.19	132.4
		MPT	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(1,2)
			34.67	39.54	56.94	92.16	132.2
	0.1	CPT	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(1,2)
			35.28	40.34	58.35	94.24	141.2
	0.2	SPM	(1,1,0)	(2,1,0)	(3,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)
			16.92	20.06	33.83	37.91	42.30
		MPT	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)
			16.62	19.90	33.73	36.44	41.11
SS-FF	0.01	SPM	(1,1,0)	(2,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)	(3,1,0)
			9.476	13.06	19.90	25.94	26.82
		MPT	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
			9.109	12.90	18.70	25.19	26.68

(m,n,l) は, 振動モードを表しており, m,n は, それぞれ x,y 方向のモード次数を, l は, 厚さ方向の変形モード次数を表す。

定値への一様な収束性を示しており、また、spline 次数を高めれば、4 分割で収束値が得られている。同様に、高次の振動数や他の境界条件を有する場合についても検討を行ってみたが、同様な収束状態が得られている。

以上の計算結果を踏まえて、以後の数値計算例では、 $k-1=4$ 、要素分割数は 12 としている。

表-3 には、周面単純支持 (SS-SS)、相対する 2 面が単純支持され、他の 2 面が固定面 (SS-CC) および自由面 (SS-FF) である正方形シトカスブルース桁目板の振動数パラメータ n^* の精度比較が示してある。ここで、板厚比 h/a は、0.01, 0.1 と 0.2 に変化させている。また、比較のために、近藤らの Mindlin 板理論 (MPT) を用いた解⁷⁾と薄板理論 (CPT) による値も示してある。ただし、MPT で用いたせん断修正係数は、 $\kappa = \pi^2/12$ である。表中に示した振動モードは、 (m, n, l) で示しており、 m, n はそれぞれ x, y 方向のモード次数を、 l は厚さ方向のモード次数を示している。MPT の振動モードも、 (m, n) で示してある。

これより、SPM と SLM の値は、非常に良く一致しており、また MPT の結果と比較して、板厚が厚い場合には、やや大きめの値を示している。板厚比が大きくなると、振動モード (m, n) のスイッチ現象が見られる。これは、Mindlin 板理論では考慮できない厚さ方向の弾性係数を考慮しているので、厚さ方向の弾性係数の影響によるものと考えられる。

表-4 には、表-2 で示した剛性値を持つ周面単純支持された正方形アラゴナイトクリスタル板の振動数パラメータ $n^* = \omega \sqrt{\rho h^2 / D_{11}}$ の精度比較が示してある。ここで、板厚比 h/a は 0.1, 0.3, 0.5 まで変化させている。また、比較のために、Srinivas らの厳密解⁹⁾や Teo らの DQ 法による数値解¹⁰⁾も示してある。

これより、本手法による解は、他の手法による値と良

表-4 アラゴナイトクリスタル正方形厚板の振動数パラメータ n^* の精度比較： $b/a=1.0$, SS-SS

h/a	Method	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
0.1	3D-SSM	0.04742	0.10329	0.11880	0.16942	0.18881
	DQM ⁸⁾	0.04742	0.10329	0.11880	-	0.18876
	Exact ⁹⁾	0.04742	0.10329	0.11880	0.16942	0.18881
0.3	3D-SSM	0.33205	0.64984	0.65050	0.65621	0.89754
	DQM ⁸⁾	0.33200	0.64974	0.65043	0.65612	0.89742
	Exact ⁹⁾	0.33200	-	0.65043	-	-
0.5	3D-SSM	0.70338	1.0824	1.2424	1.3043	1.6878
	DQM ⁸⁾	0.70338	1.0824	1.2423	1.3043	-
	Exact ⁹⁾	0.70338	1.0824	-	-	-

表-5 振動数パラメータ n^* に与える板厚比 h/a の影響： SS-SS, $b/a=1.0$

h/a	Method	modes								
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
0.05		(1,1,0)	(2,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)	(3,1,0)	(1,3,0)	(3,2,0)	(2,3,0)	(1,4,0)
	SPM	31.28	54.19	72.02	89.35	97.95	114.2	126.0	130.2	156.5
	SLM	31.27	54.19	72.02	89.35	97.95	114.2	126.0	130.2	156.5
	MPT ⁷⁾	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)	(3,2)	(2,3)	(1,4)
0.1		(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(2,2,0)	(1,3,0)	(2,3,0)	(1,4,0)	(3,1,0)	(3,2,0)
	SPM	22.34	43.18	45.67	63.40	64.83	85.02	86.55	86.94	101.0
	SLM	22.34	43.18	45.67	63.40	64.83	85.02	86.55	86.94	101.0
	MPT	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(1,4)	(2,3)	(3,1)	(3,2)
0.2		(1,1,0)	(1,2,0)	(2,1,0)	(1,3,0)	(2,2,0)	(1,4,0)	(2,3,0)	(1,5,0)	(1,1,1)
	SPM	15.85	26.96	38.22	38.37	47.88	49.43	59.56	60.10	70.20
	SLM	15.85	26.96	38.22	38.37	47.88	49.43	59.56	60.10	70.20
	MPT	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)	(2,2)	(1,5)	(2,3)	*
0.3		(1,1,0)	(1,2,0)	(1,3,0)	(2,1,0)	(1,4,0)	(2,2,0)	(1,5,0)	(1,1,1)	(2,3,0)
	SPM	13.37	21.04	28.52	33.11	35.45	39.65	42.05	46.12	47.11
	SLM	13.37	21.04	28.52	33.11	35.45	39.65	42.05	46.12	47.11
	MPT	13.18	20.47	27.42	32.51	33.72	38.85	39.63	*	40.06
0.4		(1,1,0)	(1,2,0)	(1,3,0)	(1,4,0)	(2,1,0)	(1,5,0)	(2,2,0)	(1,1,1)	(1,6,0)
	SPM	11.97	17.82	23.21	28.12	29.19	32.83	34.01	34.61	37.50
	SLM	11.97	17.82	23.21	28.12	29.19	32.83	34.01	34.61	39.21
	MPT	11.74	17.22	22.12	26.45	27.82	28.39	30.57	*	33.02
0.5		(1,1,0)	(1,2,0)	(1,3,0)	(1,4,0)	(2,1,0)	(1,5,0)	(1,1,1)	(2,2,0)	(1,6,0)
	SPM	10.87	15.45	19.49	23.17	25.84	26.76	27.03	29.47	30.38
	SLM	10.87	15.45	19.49	23.17	25.84	26.76	27.03	29.47	30.38
	MPT	10.63	14.90	18.52	21.35	21.72	24.82	*	25.04	27.92
0.6		(1,1,0)	(1,2,0)	(1,3,0)	(1,4,0)	(1,1,1)	(1,5,0)	(2,1)	(1,2,1)	(2,1,1)
	SPM	9.974	13.65	16.80	19.71	21.20	22.61	23.09	24.62	24.86
	SLM	9.974	13.65	16.80	19.71	21.20	22.61	23.09	24.62	24.86
	MPT	9.729	13.14	15.92	17.41	*	18.42	20.91	*	*

(m,n,l) は、振動モードを表しており、 m,n は、それぞれ x,y 方向のモード次数を、 l は、厚さ方向の変形モード次数を表す。

く一致した結果を示している。

(b) 振動数パラメータに与える板厚比の影響

表-5 には、周面単純支持された正方形シトカスブルース桁目板の振動数パラメータ n^* に与える板厚比 h/a の影響が示されている。ここで、 h/a は、0.05 から 0.6 まで変化させている。また、比較のために、Mindlin 板理論 (MPT) に基づく spline 要素法により求めた解⁷⁾も示してある。表中の*は、2 次元理論である Mindlin 板理論では表せない厚さ方向の変形を含んだ振動数とモード形状である。

これより、本手法の値は、MPT による解と比較してよく一致しているが、やや大きめの値を示している。板厚比 h/a が増大すると、Mindlin 板理論では表せない厚

さ方向の断面変形モードが現れており、また本手法による解と MPT の値に差が現れてくる。

両者の差は、厚さ方向の弾性係数の影響であると考えられる。

以上の結果より、板厚の大きな板や高次の振動数と振動モード形状を必要とする衝撃応答問題や衝撃音問題では、厚さ方向の影響を考慮した3次元弾性理論を適用する必要があると思われる。

(c) 振動数パラメータに与える弾性係数の変動の影響

木材は、含水率等の影響により材料特性値が 20%程度変動することが知られている。したがって、曲げモード及び厚さ方向の変形モードの振動数パラメータ $n'' = \omega b^2 \sqrt{\rho/h^2 E_x}$ に与える繊維方向のヤング係数 E_y (E_L) や接線方向のヤング係数 E_z (E_T) の変動の影響を明らかにする必要がある。

図-3 には、曲げモードに関する振動数パラメータの変動率に与える E_y (E_L) と E_z (E_T) の変動の影響が示してある。ここで、振動数パラメータの変動率は、変動したヤング係数による値と変動前の値の割合で示している。

これより、低次の曲げモードの基本振動数パラメータ変動率は、繊維方向のヤング係数の変動の影響を大きく受け、板厚が小さいときに大きく見られる。また、接線方向のヤング係数の変動の影響はあまり見られない。

一方、高次の曲げモードの振動数パラメータ変動率に与える接線方向のヤング係数の変動の影響は、板厚の増大とともに顕著に見られるが、繊維方向のヤング係数の変動の影響はさほど見られない。これは、Appendix に示してあるサブ剛性マトリックス $[K]_{ww}$ の D_{33} に含まれる厚さ方向のヤング係数 E_z (E_T) と $(a/h)^2$ に関係するためであると思われる。

図-4 には、厚さ方向の変形モードの振動数パラメータ変動率に与える E_y (E_L) と E_z (E_T) の変動の影響が示してある。これより、低次の厚さ方向の変形モードの振動数パラメータ変動率に与える繊維方向のヤング係数の変動の影響は、板厚の増大につれて減少する。接線方向のヤング係数の変動の影響は、板厚の増大に伴いその影響は顕著に見られる。

高次の厚さ方向の変形モードの振動数パラメータ変動率に与える繊維方向のヤング係数の変動の影響は、板厚の増大とともに減少する傾向にある。また、接線方向のヤング係数の変動の影響は、板厚の増大とともに、大

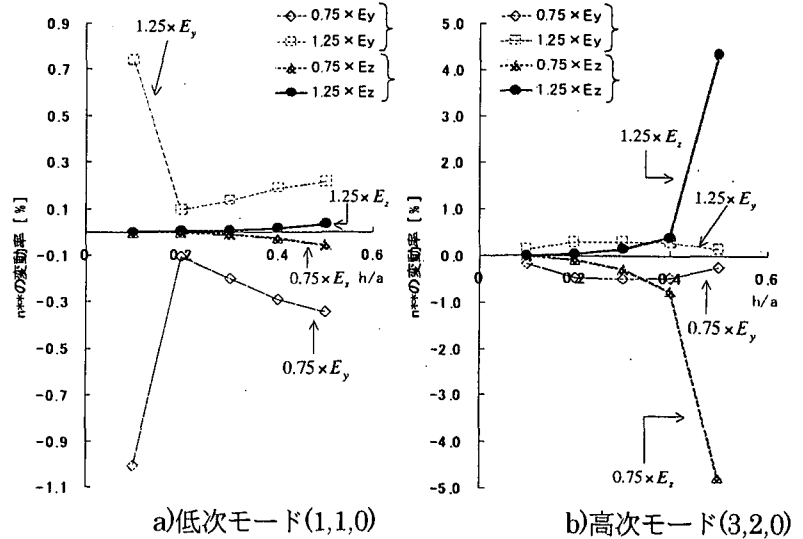


図-3 曲げモードの振動数パラメータ変動率に与えるヤング係数の変動と板厚比の影響：SS-SS, $b/a=1.0$

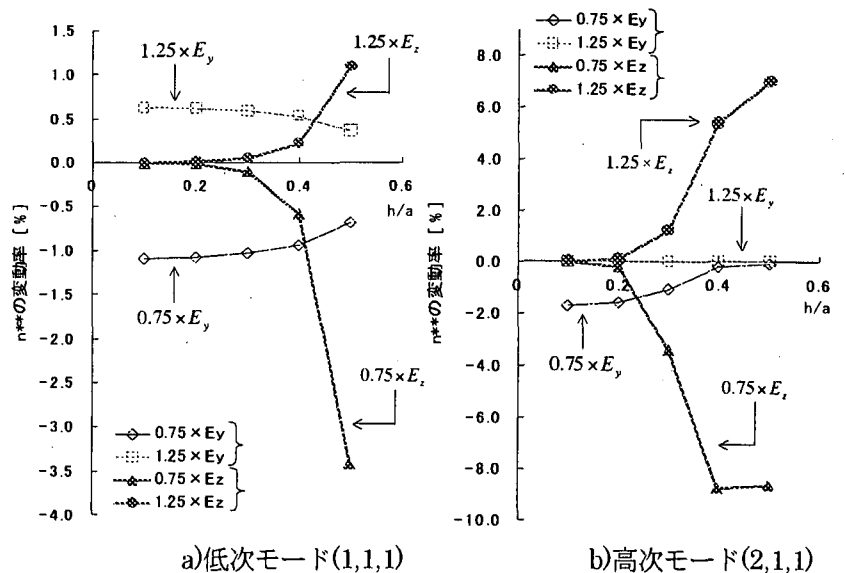


図-4 厚さ方向の変形モードの振動数パラメータ変動率に与えるヤング係数の変動と板厚比の影響：SS-SS, $b/a=1.0$

く見られる。

これらの結果より、厚さ方向の変形モードは、厚さ方向の弾性係数 E_z (E_T) に依存するので、厚さ方向のヤング係数の変動の影響を大きく受ける。

3.2 木板の損失正接

ここでは、表-1 に示す物性値を持つシトカスプレース 柾目板の損失正接 $\tan \delta_p$ を McIntyer らの微小減衰近似法を用いて評価する。なお、数値計算例では、3 次元 spline 帯板法の要素分割数は 20 とし、また $k-1=4$ としている。

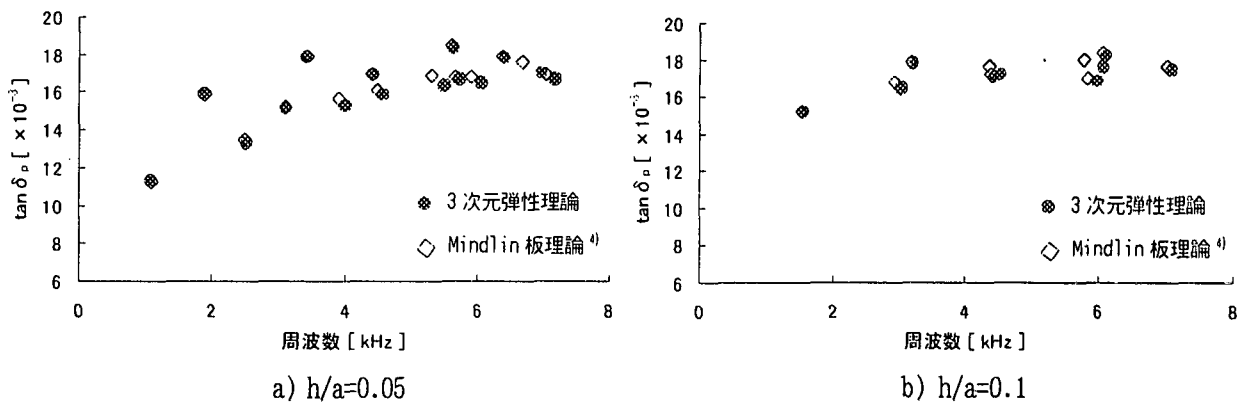


図-5 シトカスプルス柁目板の損失正接 $\tan \delta_P$ の比較 : $a=b=10\text{cm}$, SS-SS

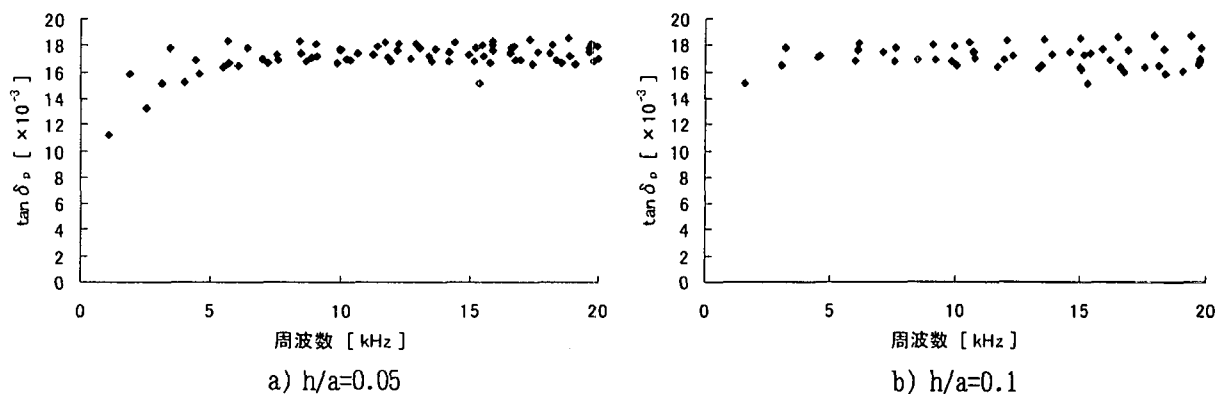


図-6 スプルス柁目板の損失正接と周波数の関係 : $a=b=10\text{cm}$, SS-SS

(a) シトカスプルス柁目板の損失正接の精度比較

図-5 には、本手法を用いて求めた周面単純支持されたシトカスプルス柁目板の損失正接が示してある。ここで、木板の幾何寸法は、 $a=b=10\text{cm}$ 、板厚比 h/a は、0.05 と 0.1 に仮定している。また、比較のために近藤らの Mindlin 板理論による結果⁴⁾も示してある。

これより、本手法により求めた損失正接は、Mindlin 板理論に基づく spline 要素法の結果と良く一致しているが、高次の振動数域で多少の差が見られる。また、板厚が大きくなると、両者の結果に差が見られる。この相違の主な原因は、厚さ方向の弾性係数と複素弾性率の影響によるものと考えられる。

(b) シトカスプルス柁目板の損失正接に与える振動モードの影響

図-6 には、それぞれ板厚比 h/a が 0.05 と 0.1 である正方形柁目板の可聴周波数域での損失正接が示してある。また、図-7 は、同様にして、15kHz までの損失正接に与える振動モードの影響を示している。ここで、振動モードは、 x 方向、 y 方向に卓越するモードおよび厚さ方向の変形モードに分けている。

図-6 より、シトカスプルス柁目板の損失正接は 7 kHz を超えると、ほぼ一定な値を示し、さほど周波数に依存しない状態が示されている。しかしながら、7 kHz 以下の周波数帯域では、損失正接が周波数により変化しており、図-7 より、振動モードによっても異なった性状

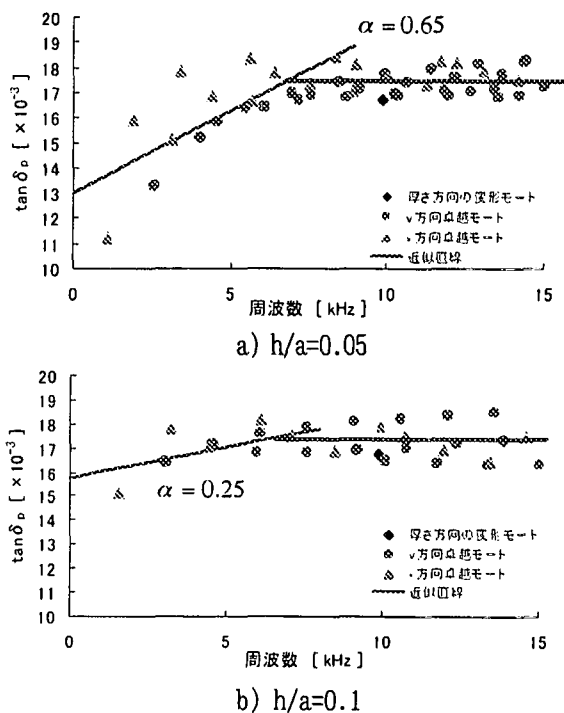


図-7 スプルス柁目板の損失正接に与える振動モードの影響 : $a=b=10\text{cm}$, SS-SS

が示されている。また、図-7 より、板厚が大きくなると、損失正接の周波数に依存する領域が狭まり、 y 方向卓越モードが支配的になってくる。また、周波数に依存する

領域での損失正接の傾き α を線形回帰分析から求めてみると、板厚の増大にしたがって、その傾きが小さくなっている。

(c) 損失正接に与える板厚比と境界条件の影響

図-8 a), b), c)には、それぞれ相対する2面がダイヤフラム型の単純支持、他の2面が固定(SS-CC)および自由(SS-FF)であるシトカスプルス桁目板の損失正接に与える板厚比と境界条件の影響が示してある。ここで、板厚比 h/a は、0.05, 0.1, 0.4と仮定している。

これより、板厚の増大に伴い、損失正接はほぼ一定な値を示している。また境界面での拘束が大きいほど、損失正接はやや大きめの値を示している。

4. あとがき

本文では、3次元弾性理論に基づく3次元spline帯板法を用いて、直交異方性厚板の振動解析を行い、直交異方性厚板の振動特性に与える板厚比や弾性係数の変動の影響について検討を行った。また、McIntyerらの微小減衰近似法を用いて、木板の損失正接を算定し、木板の損失正接に与える振動モード、板厚比や境界条件などの影響について明らかにしてきた。

本研究で得られた主な結果をまとめると、以下のとおりである。

- 1) 本手法は、直交異方性厚板の振動数パラメータの安定した収束性と高い解析精度を示している。
- 2) 本手法で求めた振動数パラメータの値は、MPTによる解と比較して良く一致しているが、少し大きな値を示している。板厚比 h/a が増大すると、比較的低次の振動モードに、厚さ方向の変形モードが現れてくる。また、本手法による解とMPTの解の値に差が見られるが、これは、厚さ方向の弾性係数の影響であると思われる。
- 3) 低次の曲げモードの基本振動数パラメータは、繊維方向のヤング係数の変動の影響を大きく受け、板厚が小さいほど大きな影響が見られる。一方、高次の曲げモードの振動数パラメータは、繊維方向のヤング係数の変動の影響をさほど受けず、接線方向のヤング係数の変動の影響が板厚の増大にともない顕著に現れてくる。
- 4) 厚さ方向の変形モードの振動数パラメータは、低次、高次に関わらず、繊維方向のヤング係数の変動の影響を受けている。また、接線方向のヤング係数の変動の影響は、板厚の増大にともないその影響が顕著に現れる。
- 5) 低い振動数域での損失正接は、振動数により大きく変化し、また振動モードによっても異なった性状が示されている。
- 6) 木板の損失正接は、板厚の増大にともない、周波数に関わらずほぼ一定な値を示している。また、境界面での拘束が大きいほど、損失正接は少し大きな値を示している。

今後、高次の振動モードや厚さ方向の変形モードが卓越してくる、直交異方性厚板の衝撃応答に与える損失正接の影響についても検討して行きたい。

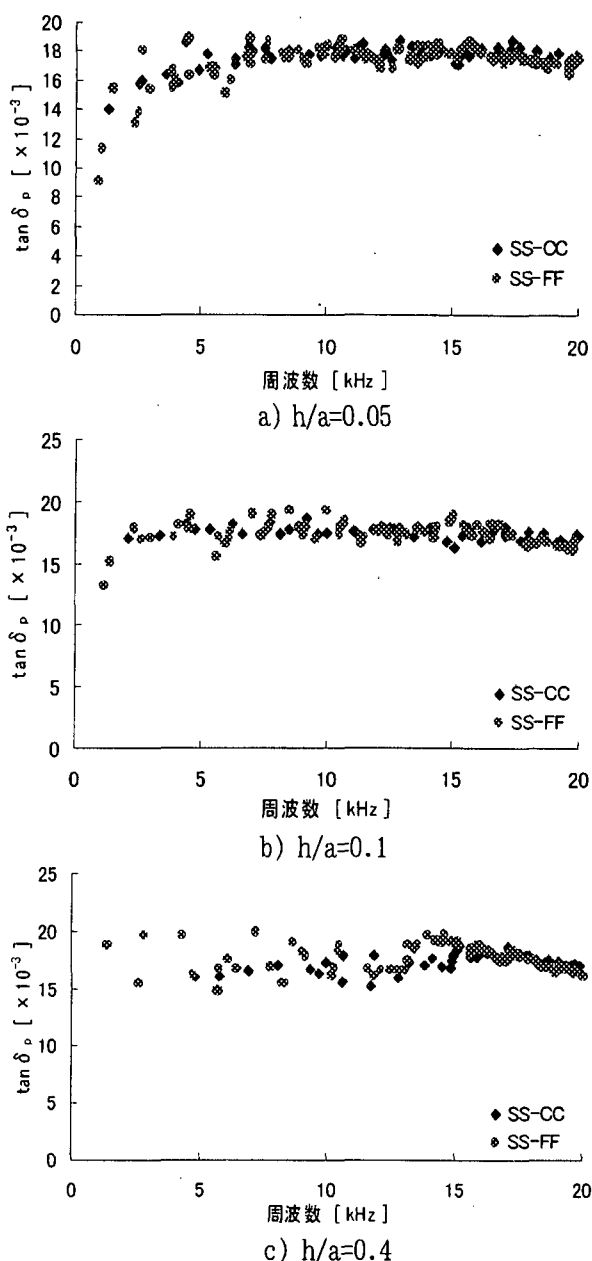


図-8 スプルス桁目板の損失正接に与える板厚比と境界条件の影響: $b/a=1.0$

謝辞 本論文の作成にあたり、有益な助言を頂いた大同工業大学非常勤講師の近藤八重先生に謝意を示します。また、貴重なご意見を頂きました査読者に謝意を表します。

Appendix

式(25)で与えられるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$[K]_{uv} = \frac{bh}{a} D_{(\infty)} \sum_{m=1}^{i_1} \sum_{n=1}^{i_2} \sum_{j=1}^{i_3} \sum_{l=1}^{i_4} \left\{ \begin{aligned} & D_{11} (I_{m_i}^{11} \times J_{n_j}^{00} \times A_1) \\ & + \left(\frac{a}{b}\right)^2 D_{44} (I_{m_i}^{00} \times J_{n_j}^{00} \times A_2) \\ & + \left(\frac{a}{h}\right)^2 D_{66} (I_{m_i}^{00} \times J_{n_j}^{11} \times A_1) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
[K]_{uv} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \frac{a}{b} D_{21} (I_{mi}^{10} \times J_{nj}^{00} \times A_3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{b} D_{44} (I_{mi}^{01} \times J_{nj}^{00} \times A_4) \right\} \\
[K]_{uw} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \frac{a}{h} D_{31} (I_{mi}^{10} \times J_{nj}^{01} \times A_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{h} D_{66} (I_{mi}^{01} \times J_{nj}^{10} \times A_1) \right\} \\
[K]_{vw} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \frac{a}{b} D_{12} (I_{mi}^{01} \times J_{nj}^{00} \times A_5) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{b} D_{44} (I_{mi}^{10} \times J_{nj}^{00} \times A_6) \right\} \\
[K]_{vw} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^2 D_{22} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{00} \times A_7) \right. \\
&\quad \left. + D_{44} (I_{mi}^{11} \times J_{nj}^{00} \times A_8) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{h} \right)^2 D_{55} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{11} \times A_8) \right\} \\
[K]_{vw} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{a}{h} \right) D_{32} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{01} \times A_5) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{a}{h} \right) D_{55} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{10} \times A_6) \right\} \\
[K]_{ww} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \frac{a}{h} D_{13} (I_{mi}^{01} \times J_{nj}^{10} \times A_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{h} D_{66} (I_{mi}^{10} \times J_{nj}^{01} \times A_1) \right\} \\
[K]_{ww} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{a}{h} \right) D_{23} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{10} \times A_3) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{a}{h} \right) D_{55} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{01} \times A_4) \right\} \\
[K]_{ww} &= \frac{bh}{a} D_{00} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ \left(\frac{a}{h} \right)^2 D_{33} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{11} \times A_1) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a}{b} \right)^2 D_{55} (I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{00} \times A_2) \right. \\
&\quad \left. + D_{66} (I_{mi}^{11} \times J_{nj}^{00} \times A_1) \right\}
\end{aligned}$$

式 (26) で与えられるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
[M]_{uv} &= (\rho abh) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{00} \times A_1 \right\} \\
[M]_{vw} &= (\rho abh) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{00} \times A_8 \right\} \\
[M]_{ww} &= (\rho abh) \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{i=1}^{i_z} \sum_{j=1}^{i_z} \left\{ I_{mi}^{00} \times J_{nj}^{00} \times A_1 \right\}
\end{aligned}$$

ここで、 A_i は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 Y_l(\eta) \cdot Y_q(\eta) d\eta, \quad A_2 = \int_0^1 \dot{Y}_l(\eta) \cdot \dot{Y}_q(\eta) d\eta \\
A_3 &= \int_0^1 Y_l(\eta) \cdot \ddot{Y}_q(\eta) d\eta, \quad A_4 = \int_0^1 \dot{Y}_l(\eta) \cdot \ddot{Y}_q(\eta) d\eta \\
A_5 &= \int_0^1 \ddot{Y}_l(\eta) \cdot Y_q(\eta) d\eta, \quad A_6 = \int_0^1 \ddot{Y}_l(\eta) \cdot \dot{Y}_q(\eta) d\eta \\
A_7 &= \int_0^1 \ddot{Y}_l(\eta) \cdot \ddot{Y}_q(\eta) d\eta, \quad A_8 = \int_0^1 \ddot{Y}_l(\eta) \cdot \ddot{Y}_q(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

I_{mi}^{tu} と J_{nj}^{tu} は次式で与えられる。また、 t と u は導関数の次数である。

$$I_{mi}^{tu} = \int_0^1 \frac{\partial^t}{\partial \xi^t} N_{m,k}(\xi) \cdot \frac{\partial^u}{\partial \xi^u} N_{i,k}(\xi) d\xi$$

$$J_{nj}^{tu} = \int_0^1 \frac{\partial^t}{\partial \xi^t} N_{n,k}(\xi) \cdot \frac{\partial^u}{\partial \xi^u} N_{j,k}(\xi) d\xi$$

参考文献

1. S. Srinivas and A.K. Rao : An exact analysis of free vibrations of simply supported viscoelastic plates, JSV, Vol. 19, 251-259, 1971.
2. M.E. McIntyer and J. Woodhouse: The influence of geometry on linear damping, Acustica, Vol. 39, 209-224, 1978.
3. 中尾他：木材板の振動的性質，木材学会誌，Vol. 31, 793-800, 1985.
4. 近藤八重，水澤富作：粘弾性直交異方性 Mindlin 板の振動解析と損失正接について，土木学会第 56 回年次学術講演会講演概要集，I-71, pp.468-469, 2001.
5. 名木野晴暢，水澤富作：3 次元 spline 帯板法を用いた直交異方性厚板の振動解析，土木学会第 57 回年次学術講演会講演概要集，I-194, pp.387-388, 2002.
6. 水澤富作，高木信治：Spline Prism 法を用いた長方形厚板の振動解析について，構造工学論文集，Vol.39A, pp.1-12, 1993.
7. 近藤八重，水澤富作：Spline 要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析，応用力学論文集，Vol.4, pp.183-194, 2001.
8. T.M. Teo and K.M. Liew : Three-dimensional elasticity solutions to some orthotropic plates problems. Int. J. Solids Struct. 36, 5301-5326, 1999.
9. S. Srinivas and K. Rao : Bending, vibration and buckling of simply supported thick rectangular plates and laminates. Int. J. Solids Struct. 6, 1463-1484, 1970.
10. M. Malik and C.W. Bert : Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method. Int. J. Solids Struct. 35, 299-318, 1998.

(2003 年 4 月 18 日 受付)