

平板の振動モードの縮退と連成挙動について

Degenerate modes and modal coupling in vibration of rectangular plates

水澤富作*, 近藤八重**, 木村健一***, 名木野晴暢***

Tomisaku MIZUSAWA, Yae KONDO, Kenichi KIMURA and Harunobu NAGINO

*大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学 非常勤講師 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

***大同工業大学大学院 院生 建設工学専攻 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents the degenerate modes and modal coupling in vibrating rectangular plates with the same boundary conditions along four edges. The spline element method is applied to analyze frequencies and mode shapes of orthotropic rectangular plates with tapered thickness. Some of degenerate mode pairs are split in frequency in vibration of isotropic square plates with the four edges clamped, free or simply supported, respectively. And nondegenerate modes such as X mode or ring mode can occur in tapered square plates and orthotropic rectangular plates having certain width/thickness ratio and aspect ratio.

Key Words: modal coupling, degenerate modes, orthotropic Mindlin plate, rectangular plate

1. まえがき

2次元問題である平板の自由振動では、ポアソン比により2軸方向の板曲げの運動が関係付けられている。このような2方向の連成挙動は、平板の縦波と曲げ波の伝播速度にも影響を及ぼすので、平板の振動モード形状が異なって現れる。

クラドニーによる平板の振動モードの可視化実験¹⁾以来、長方形板に関する自由振動問題は、振動実験や種々の解析手法を用いて研究されてきており、その研究結果が Leissa²⁾により、モノグラフとしてまとめられている。

相対する2辺が単純支持された長方形板の振動問題では³⁾、Levy法を適用すれば、閉じた解が求められる。しかしながら、周辺自由な長方形板や変厚板の振動問題では、厳密な解を求めることが困難になるので、Ritz法や有限要素法などの数値解析法が適用されている。

Gorman⁴⁾は、重ね合わせ法を用いて、周辺自由な長方形薄板と長方形 Mindlin 板の振動解析を行っている。近藤ら⁵⁾は、Mindlin 板理論に基づくスプライン要素法を用いて、変厚断面を有する直交異方性厚板の振動解析を行い、解の収束性や解析精度について検討を行っている。

しかしながら、これらの研究では、解析手法の定式化や解の精度比較に重点が置かれ、長方形板の振動モードの連成問題を取り扱った研究報告は、少ないように思われる。

井口⁶⁾は、級数法を用いて、周辺自由な長方形薄板の詳細な振動モード形状を求めている。また、Rossing⁷⁾と Molin⁸⁾は、周辺固定板と周辺自由板の振動実験から、等方性正方形板の振動モード形状に X モード形状とリングモード形状が現れることを報告している。また、Hutchins⁹⁾は、これらのモード形状の振動数の相異が、楽器響板の音響放射や製作に重要な指標になることを指摘している。

これまでに報告されている長方形板の振動モード形状に関する研究は、一定厚さの等方性板を対象にしたものであり、モード形状は、たわみを生じない節線 (nodal line) で表わし、直線で表される節線で囲まれたサブパネルの変形が通常梁タイプの変形モードになっている。

また、周辺固定 (CC-CC)、周辺単純支持 (SS-SS) および周辺自由 (FF-FF) を有する2軸対称な正方形板には、

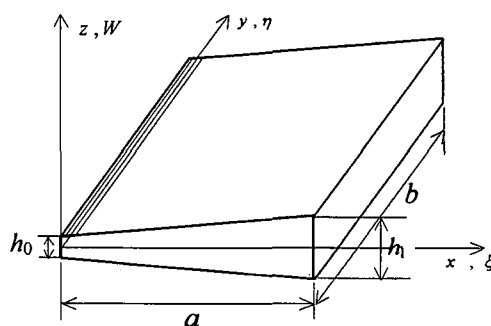


図-1 変厚板と座標系

対を成す同一の振動数と振動モード形状である縮退モードが多数現れ、また梁タイプの変形モードとは異なる結合モードであるX形モードやリング形モードも現れてくるが、その発生条件は、必ずしも明確にされていないように思われる。また、直交異方性板や変厚板の振動モード性状や結合モードの発生条件も、明確でないように思われる。

本論文では、Mindlin 板理論に基づくスプライン要素法を用いて、図-1 に示す変厚を有する直交異方性長方形板の振動解析を行い、振動モード形状に表れる結合モードと縮退モードに与える境界条件、幅厚比、変厚比や異方性の影響について検討を行い、また結合モード形状の発生条件についても検討を行っている。

2. 式の定式化

本文では、直交異方性理論と Mindlin 板理論に基づく spline 要素法¹⁰⁾を用いて式の定式化をする。この方法は、独立した3つの変位関数（たわみと2つの回転角）に高次の連続性を有する区分多項式である B-spline 関数を用いた数値解析法である。

Mindlin 板の x, y, z 方向の変位 U, V, W は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= z\theta_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\ W(x, y) &= W'(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 W' はたわみであり、 θ_x と θ_y は、それぞれ y 軸と x 軸回りの回転角である。

ここでは、次式で示す無次元座標系を用いて、式の定式化を行う。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad W' = W/b \quad (2)$$

ここで、 a と b はそれぞれ x 軸と y 軸方向の長さを示す。

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \theta_x &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W' &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、それぞれ正規化された B-spline 関数である¹⁰⁾。また、 $i_x = k-1 + M_x$ 、 $i_y = k-1 + M_y$ 、 $[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi)N_{1,k}(\eta), \dots, N_{i_x,k}(\xi)N_{i_y,k}(\eta)]$ である。未定係数ベクトルは、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \{A_{11}A_{12} \cdots A_{i_x i_y}\}^T, \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \{B_{11}B_{12} \cdots B_{i_x i_y}\}^T, \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \{C_{11}C_{12} \cdots C_{i_x i_y}\}^T \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ x 方向と y 方向の要素分割数である。

したがって、式 (3) をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (5)$$

ここで、

$$[S]_{mn} = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} N_{mk}(\xi)N_{nk}(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_{mk}(\xi)N_{nk}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_{mk}(\xi)N_{nk}(\eta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

ただし、

$$\{d\} = \{\theta_x, \theta_y, W'\}^T, \quad \{\Delta\}_{mn} = \{\{\delta_A\}_{mn}, \{\delta_B\}_{mn}, \{\delta_C\}_{mn}\}^T$$

である。

次に、Mindlin 板理論で定義される曲げひずみ $\{\epsilon\}_b$ および横せん断ひずみ $\{\epsilon\}_s$ を無次元座標系 (ξ, η) で表せば、次式で与えられる。

$$\{\epsilon\}_b = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (z/a)\partial\theta_x/\partial\xi \\ (z/b)\partial\theta_y/\partial\eta \\ (z/b)\partial\theta_x/\partial\eta + (z/a)\partial\theta_y/\partial\xi \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\{\epsilon\}_s = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x + (b/a)\partial W'/\partial\xi \\ \theta_y + \partial W'/\partial\eta \end{Bmatrix} \quad (8)$$

したがって、式 (5) を式 (7) と (8) に代入すれば、ひずみベクトル $\{\chi\}$ は、次式で与えられる。

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \{\epsilon\}_b \\ \{\epsilon\}_s \end{Bmatrix} = [T][S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad (9)$$

ここで、 $[T]$ は演算子であり、またひずみマトリックス $[B]_{mn}$ は次式で定義される。

$$[T] = \begin{bmatrix} (1/a)\partial/\partial\xi & 0 & 0 \\ 0 & (1/b)\partial/\partial\eta & 0 \\ (1/b)\partial/\partial\eta & (1/a)\partial/\partial\xi & 0 \\ 1 & 0 & (b/a)\partial/\partial\xi \\ 0 & 1 & \partial/\partial\eta \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[B]_{mn} = [T][S]_{mn}$$

$$= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{a}\right) \dot{N}_m N_n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{b}\right) N_m \dot{N}_n & 0 \\ \left(\frac{1}{b}\right) N_m \dot{N}_n & \left(\frac{1}{a}\right) \dot{N}_m N_n & 0 \\ N_m N_n & 0 & \left(\frac{b}{a}\right) \dot{N}_m N_n \\ 0 & N_m N_n & N_m \dot{N}_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} [B_b]_{mn} \\ [B_s]_{mn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで, $N_m = N_{m,k}(\xi)$, $N_n = N_{n,k}(\eta)$

$\dot{N}_m = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$, $\dot{N}_n = \partial N_{n,k}(\eta) / \partial \eta$ である。

板の板厚は, ξ -方向に直線的に変化すると仮定している。 $\xi=0$ と $\xi=1$ での板厚を h_0 と h_1 とすると, 次式で定義される。

$$h(\xi) = h_0 \{(\delta-1)\xi + 1\} = h_0 H(\xi) \quad (12)$$

ここで, δ は変厚比であり, h/h_0 で表される。

直交異方性変厚板の曲げおよびせん断弾性マトリックスは, それぞれ次式で表される。

$$[D]_b = \frac{E_x h(\xi)^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{xy} & 0 \\ \nu_{yx} & \frac{E_y}{E_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{xy}}{E_x} (1-\nu_{yx}\nu_{xy}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[D]_s = \kappa h(\xi) \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ただし, E_x, E_y は, それぞれ x, y 方向のヤング係数であり, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} は, それぞれ xy 面, xz 面, yz 面のせん断変形に対するせん断弾性係数であり, κ はせん断修正係数である。

また, ν_{xy}, ν_{yx} はポアソン比であり, 直交異方性板では, 次式の関係が成り立つ。

$$\nu_{xy} E_y = \nu_{yx} E_x \quad (15)$$

したがって, 変厚直交異方性 Mindlin 板のひずみエネルギー, U は,

$$U = \left(\frac{ab}{2}\right) \int_0^1 \int_0^1 \left[\{\varepsilon\}_b^T [D]_b \{\varepsilon\}_b + \{\varepsilon\}_s^T [D]_s \{\varepsilon\}_s \right] d\xi d\eta$$

$$= \left(\frac{abD_x^0}{2a^2}\right) \int_0^1 \int_0^1 \left[H(\xi)^3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{E_y}{E_x}\right) H(\xi)^3 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) \nu_{yx} H(\xi)^3 \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \eta}\right) + 4(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) \left(\frac{G_{xy}}{E_x}\right) H(\xi)^3 \left\{ \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta}\right) \right\}^2 + 12(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) \kappa \left(\frac{b}{h_0}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{G_{xz}}{E_x}\right) H(\xi) \left\{ \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{\partial W'}{\partial \xi}\right) + \theta_x \right\}^2 + 12(1-\nu_{xy}\nu_{yx}) \kappa \left(\frac{b}{h_0}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{G_{yz}}{E_x}\right) H(\xi) \left\{ \left(\frac{\partial W'}{\partial \eta}\right) + \theta_y \right\}^2 \right] d\xi d\eta \quad (16)$$

また, この板の運動エネルギー, T は,

$$T = \left(\frac{\rho h_0}{2}\right) \omega^2 ab^3 \int_0^1 \int_0^1 \left[H(\xi) W'^2 + \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{h_0}{b}\right)^2 H(\xi)^3 (\theta_x^2 + \theta_y^2) \right] d\xi d\eta \quad (17)$$

で与えられる。ここで, ρ は密度, ω は円振動数(rad/sec)であり, $D_x^0 = E_x h_0^3 / 12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})$ である。

変厚板の全ポテンシャルエネルギー, Π は, 次式で示される。

$$\Pi = U - T \quad (18)$$

したがって, 式 (5) を式 (18) に代入し, Π を極値化すれば, 次式の固有方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{mn} = 0 \quad (19)$$

式 (19) をマトリックス表示すれば, 次式のようになる。

$$\sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \sum_{r=1}^{i_x} \sum_{s=1}^{i_y} ([K]_{mnrs} \{\Delta\}_{mn} - n^*{}^2 [M]_{mnrs} \{\Delta\}_{mn}) = 0 \quad (20)$$

ここで, n^* は振動数パラメータであり, $\omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_x^0}$ で表している。

剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ と質量マトリックス $[M]_{mnrs}$ は, それぞれ次式で与えられる。

$$[K]_{mnrs} = \frac{D_x^0 ab}{a^2} \begin{bmatrix} [K\theta_x\theta_x] & [K\theta_x\theta_y] & [K\theta_x W'] \\ [K\theta_y\theta_x] & [K\theta_y\theta_y] & [K\theta_y W'] \\ [KW'\theta_x] & [KW'\theta_y] & [KW'W'] \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[M]_{mnrs} = \rho h_0 \omega^2 ab^3 \begin{bmatrix} [M\theta_x\theta_x] & [M\theta_x\theta_y] & 0 \\ [M\theta_y\theta_x] & [M\theta_y\theta_y] & 0 \\ 0 & 0 & [MW'W'] \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで, $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ のマトリックスの大きさは, $3(k+M_x-1)(k+M_y-1)$ で与えられる。ただし, $k-1$ はスプライン関数の次数であり, また M_x と M_y はそれぞれ x -方向と y -方向の要素分割数である。

Appendixには、これらのマトリックスの要素が示してある。

式 (20) で与えられた固有方程式の固有値計算は、ダブル QR 法を適用して、また逆反復法により固有値ベクトルを求めている 10)。

3. 数値計算例および考察

(a) 本手法の収束性と精度比較

はじめに、本手法の収束性や解析精度を示すために、周辺自由な等方性正方形板を対象にして、振動実験と音響実験から求めた結果との比較検討を行っている。

表-1 は、3つの剛体モードを除いた周辺自由な正方形板の振動数パラメータ n^* の収束性を示している。また、精度比較のために、Gorman の重ね合わせ法による数値解 ψ も示してある。ここで、幅厚比 b/h は 50、ポアソン比 ν は 0.333 である。また、要素分割数 $M_x=M_y$ は 8 から 20 まで変化させている。これより、本手法で求めた値は、要素分割数の増大と共に、一定値への収束状態を示しており、また Gorman の重ね合わせ法による値¹⁾ と良く一致した結果を示している。

図-2 には、それぞれ圧電式加速度計(リオン PV-90I)と精密騒音計(リオン NL-31)を用いて、鋼球の打撃を板面中央に受ける周辺自由な鋼板(200x200x4.3mm)から求めた加速度波形や音圧波形の FFT 分析から求めた周波数スペクトル図が示してある 11)。ただし、鋼板の2隅を細いワイヤーで吊り下げ、精密騒音計は反衝突側の板面に近接して設置し、また加速度計は、裏面の中央に設置している。これより、加速度計および精密騒音計により求めた可聴域での卓越周波数の値は、良く一致している。

表-2 には、図-2 で示した鋼板の対称モードの卓越周波数(Hz)と本手法で求めた振動数(Hz)との精度比較が示してある。この表には、解析で求めた対称な振動モード形状も示してある。ただし、モード図における濃淡の境が節線(nodal line)を表している。

これより、鋼球で板中央を打撃しているので、対称モード形状が現れており、本手法で求めた値は、加速度計および騒音計から求めた卓越周波数と比較して2%以内の精度で一致している。

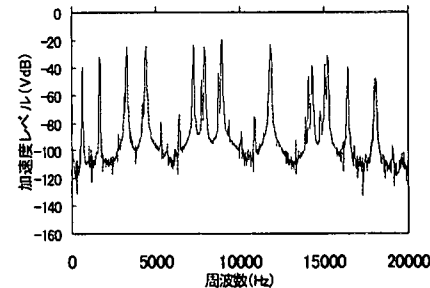
(b) 正方形板の振動数と振動モード形状

4 辺が同一である境界条件を有する等厚な等方性正方形板は、2 軸対称な幾何形状であるので、対を成す振動モ

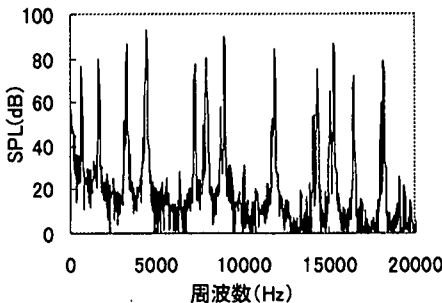
表-1 正方形板の振動数パラメータの収束性と精度比較 : $b/h=50, \nu=0.333$

振動モード*		要素分割数 $M_x=M_y$				GORMAN
		8 × 8	12 × 12	16 × 16	20 × 20	
1st	ASYM	13.27	13.13	13.08	13.07	13.08
2nd	SYM	19.52	19.65	19.16	19.20	19.20
3rd	SYM	24.97	24.34	24.48	24.39	24.37
4th	S-A	34.55	34.04	33.95	34.00	33.91
5th	S-A	63.93	61.68	60.92	60.68	60.63
6th	SYM	66.29	62.53	62.25	62.23	61.91
7th	ASYSM	71.70	68.39	67.80	67.61	67.36
8th	ASYSM	82.81	77.57	76.74	76.50	76.25
9th	S-A	108.5	104.1	103.3	103.0	102.5
10th	SYM	140.3	120.1	116.7	115.9	115.4

* ASYM: 逆対称, SYM: 対称, S-A: 対称-逆対称



a) 加速度の周波数スペクトル



b) 音圧の周波数スペクトル

図-2 鋼球の衝突を受ける鋼板の加速度と音圧の周波数スペクトル

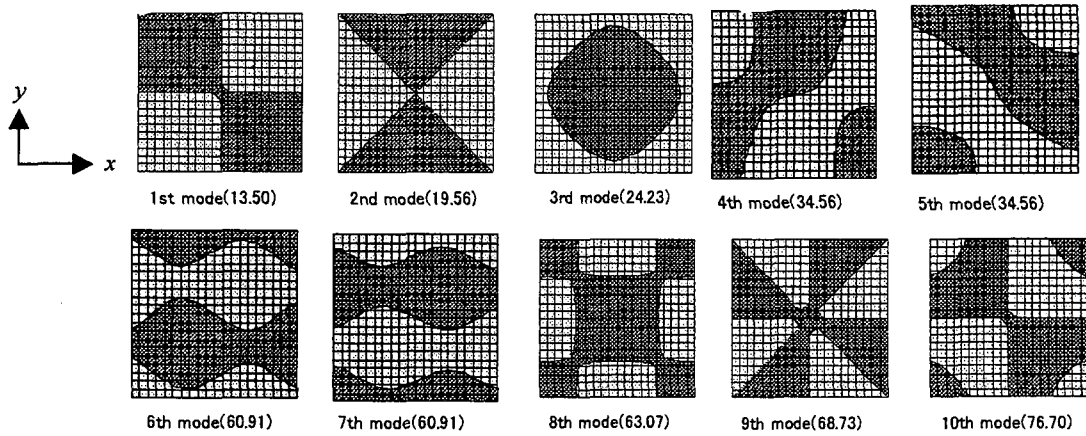
表-2 正方形鋼板の対称モードに関する振動数 (Hz) の実験値と理論値 (解析値) との比較 : $b/h=46.5$

騒音計	加速度計	理論値	振動モード形状	騒音計	加速度計	理論値	振動モード形状
650	650	643		7250	7225	7257	
1675	1675	1674		7900	7900	7861	
3275	3275	3227		8975	8925	8962	
4425	4400	4400					

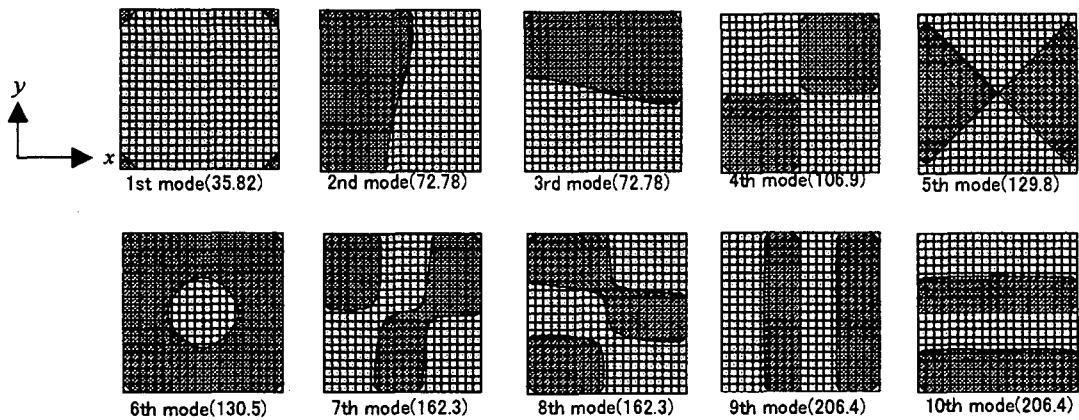
ード形状が現れる。

図-3 には、幅厚比 b/h を 50 に仮定し、4 辺がそれぞれ自由、固定及び単純支持された正方形板の 10 次までの振動数パラメータ n^* と振動モード形状が示してある。

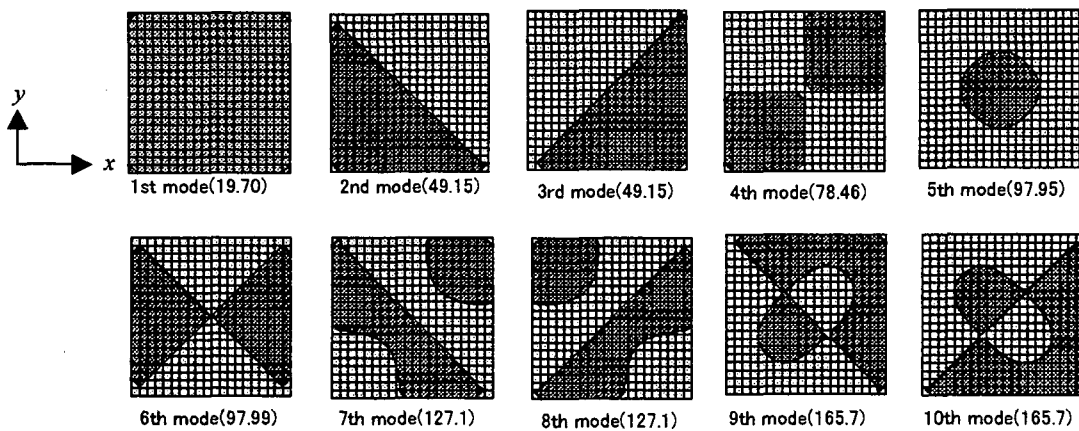
ただし、図中の () 内の値は振動数パラメータである。これより、自由板では、4 次と 5 次および 6 次と 7 次の振動モードが、同一の振動数パラメータを持つ縮退モード



a) 周辺自由な正方形板の振動モード形状



b) 周辺固定された正方形板の振動モード形状



c) 周辺単純支持された正方形板の振動モード形状

図-3 4 辺がそれぞれ自由、固定および単純支持された正方形板の 10 次までの振動モード形状 及び振動数パラメータ n^* : $a/b=1.0$, $b/h=50$, $\nu=0.3$

ドである。同様にして、周辺固定板および周辺単純支持板では、2次と3次、7次と8次および9次と10次が対を成す縮退モードである。しかしながら、自由板の2次と3次のモード形状は同一でない。また周辺固定板と周辺単純支持板でも、5次と6次のモード形状が同一でなく、それぞれの振動数パラメータも異なった値を示している。すなわち、4辺が同一の境界条件を持つ正方形板には、振動モードの節線の形状からXモードとリングモードが発生している。Xモードとリングモードは結合モードであり、2軸方向のひずみの連成が強く現れるために生じるものと考えられる。

(c) 正方形板の振動モードの縮退と連成挙動

ここでは、(b)で述べたXモード形状とリングモード形状の発生機構と振動特性について考察する。

図-3 a)に示した周辺自由な正方形板の振動モード次数は、1次モードから8次モードまで示すと、(1, 1), (2, 0)-(0, 2), (2, 0)+(0, 2), (2, 1), (1, 2), (3, 0), (0, 3), (2, 2)の順番になっている。ただし、モード次数(i, j)のi, jは、それぞれy軸およびx軸に平行な節線の数を示す。ここで、(2, 1)と(1, 2)および(3, 0)と(0, 3)は、それぞれ同一の振動数を有する縮退モードである。一方、結合モードである(2, 0)-(0, 2)と(2, 0)+(0, 2)は、それぞれXモードとリングモードを表し、振動数も異なった値を示す。結合モードの発生は、x方向とy方向のひずみの連成効果により生じるモード形状の位相差によるものと考えられる。しかしながら、等方性な長方形板では、結合モード(Xモードやリングモード)が現れず、また節線が直線を成し、振動モード形状は梁形モードから構成されている。また、図-3 a)に示す(2, 1)と(1, 2)および(3, 0)と(0, 3)の結合は、連成モードを示さず、同一の振動モード形状と振動数から成る縮退モードになっている。これは、2方向のひずみの連成効果が小さいからと思われる。

同様にして、周辺固定された正方形板と周辺単純支持された正方形板の5次と6次のモード形状に、結合モードが現れている。

結合モードであるXモードとリングモードの振動数パラメータの大きさを比較してみると、自由板では、リングモードの振動数がXモードの振動数よりかなり大きな値を示しているが、周辺固定板と周辺単純支持板での両者の差がかなり小さな値である。また、単純支持板では、リングモードの振動数がXモードの値より僅かに小さくなっている。

図-4は、周辺自由な正方形板を対象にして、結合モード(2, 0)±(0, 2)であるXモードとリングモードの発生機構を略図で示したものである。この図より、Xモードとリングモードは、位相を考慮した2つの振動モードの結合により、振動数とモード形状の異なった連成モードとして現れてくると考えられる。

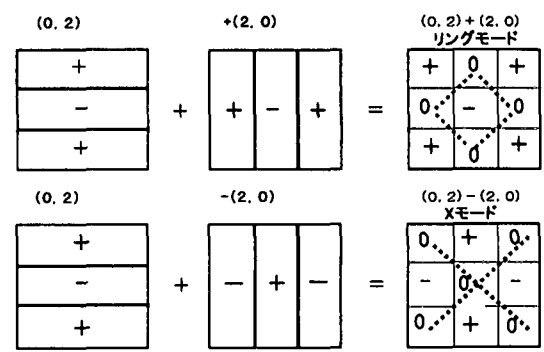


図-4 振動モード(0,2)と(2,0)の結合モード(リングモードと Xモード)の発生機構

表-3 等方性正方形板の振動数パラメータに与える幅厚比b/hと境界条件の影響; a/b=1.0, ν=0.3

境界条件 モード次数		b/h			
		100	20	10	5
FF-FF	1st	13.50	13.16	12.72	11.69
	2nd	19.57	19.42	18.94	17.39
	3rd	24.54	24.01	23.32	21.18
	4th	34.76	33.74	31.91	27.54
	5th	34.76	33.74	31.91	27.54
	6th	61.49	59.44	55.32	45.02
CC-CC	1st	35.94	34.98	32.52	26.52
	2nd	73.24	69.87	62.04	46.29
	3rd	73.24	69.87	62.04	46.29
	4th	107.9	101.1	86.94	62.16
	5th	131.1	121.7	102.4	70.83
	6th	131.8	122.5	103.4	71.80
SS-SS	1st	19.73	19.55	19.05	17.43
	2nd	49.30	48.24	45.46	38.13
	3rd	49.30	48.24	45.46	38.13
	4th	78.83	76.20	69.74	55.11
	5th	98.51	94.49	84.99	65.12
	6th	98.52	94.55	85.04	65.15

図-5と表-3には、それぞれ4辺が同じ境界条件を有する正方形板の振動モード形状と振動数パラメータに与える幅厚比b/hの影響が示してある。ここで、幅厚比は、100, 50, 20, 10, 5と変化させている。

これより、板厚が増大すると、横せん断変形の影響が大きく現れてくるので、振動数パラメータは減少し、また高次の振動モード形状の現れ方に相異が見られるが、等方性な正方形板に現れる結合モードであるXモードとリングモードに与える幅厚比の影響がさほど顕著に見られない。

また、図-6には、周辺自由な長方形板の振動モード(1, 1), (0, 2)および(2, 0)に与える辺長比b/aの影響が示してある。ここで、幅厚比は10, ポアソン比は0.3に仮定し、また辺長比は0.5から2.0まで変化させている。

これより、辺長比が1である正方形板になると、結合モードである(0, 2)±(2, 0)モードが生じており、またXモードとリングモードの振動数が異なるので、不連続なグラフになっている。

(d) 正方形板の振動特性に与える変厚および異方性の影響

図-7には、 x 方向に直線的に変厚な周辺自由な等方性正方形板の2次と3次のモード形状に与える変厚比と幅厚比の影響が示してある。ここで、変厚比 h/h_0 は、2.0と仮定し、幅厚比 b/h_0 は、5から60まで変化させている。

等厚な正方形板で現れる結合モードは、図に示すように、変厚板の幅厚比により、異なった性状を示している。幅厚比が10より小さくなるとXモードやリングモードが顕著に現れなくなる。これは、極厚な変厚板では、平板の一方向の力学特性が強化され、梁モードが現れ易くなるからと思われる。

図-8には、一様厚さで、周辺自由な直交異方性正方形板の6次までの振動モード形状が示してある。ここで、直交異方性板は、表-4に示す材料特性値を持つシトカスプルス柃目板であり、また幅厚比は50に仮定している。

これより、直交異方性正方形板には、 $(2, 0) \pm (0, 2)$ の結合したXモードとリングモードが生じておらず、また振動モードの節線が直線で表される梁モードが顕著に生じている。

(e) 直交異方性長方形板の結合モード

4辺がそれぞれ自由、固定または単純支持された一様厚さの等方性正方形板の振動モードには、2方向のひずみの連成効果により、振動モード $(2, 0)$ と $(0, 2)$ の結合モードがXモードとリングモードとして現われるが、長方形板には、結合モードが現れず、節線が直線である梁モードが支配的に現れている。

図-9には、一定厚さである周辺自由な直交異方性長方形板の振動モード $(0, 2)$ と $(2, 0)$ に与える辺長比 a/b の影響が示してある。ただし、板の材料特性値は、表-4に示してあり、また幅厚比は $b/h=50$ に仮定している。

これより、辺長比 a/b が0.55になると、結合モードであるXモードとリングモードが現れている。しかしながら、この結合モードは、非常に狭く限られた辺長比に対して現れてくる。

また、図-10には、与えられた幅厚比に対する周辺自由な直交異方性長方形板の結合モード $(0, 2) \pm (2, 0)$ の発生する辺長比が示してある。ここで、図に示した辺長比は、辺長比を増大させながら結合モードの発生を調べたときの最小値である。また、結合モードの発生する辺長比の範囲は、 b/h が50の場合には、 $0.55 \leq b/h \leq 0.59$ であり、また b/h が10の場合には、 $0.790 \leq b/h \leq 0.795$ となり、幅厚比が小さくなるほど、結合モードの発生する辺長比の範囲が狭くなっている。

これより、直交異方性板の結合モードの発生条件は、辺長比と幅厚比に依存し、幅厚比を減少させると、辺長比が1に近づいてくる。

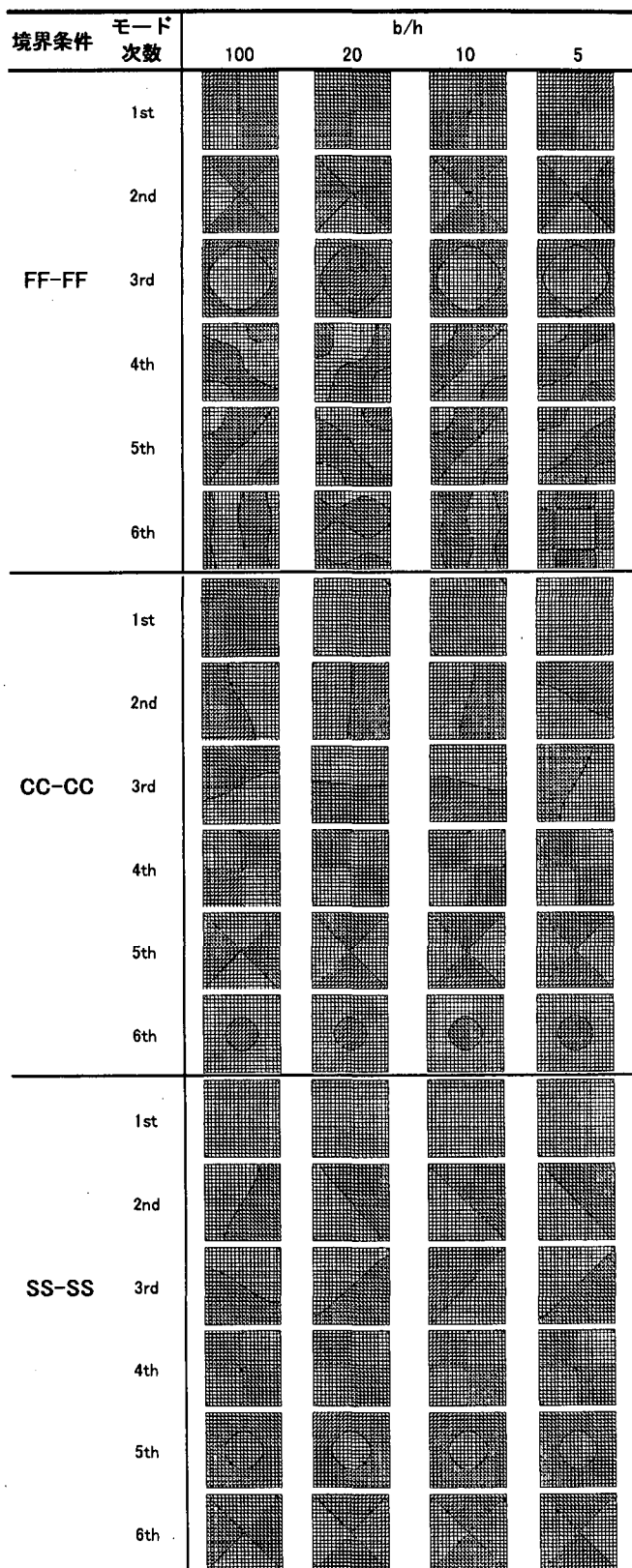


図-5 等方性正方形板の振動モード形状に与える幅厚比 b/h と境界条件の影響； $a/b=1.0$ ， $\nu=0.3$

表-4 シトカスプルスの材料特性値⁵⁾

密度 [g/cm ³]	ヤング率 [GPa]			せん断弾性率 [GPa]			ポアソン比
	E_L	E_R	E_T	G_{LR}	G_{LT}	G_{RT}	μ_{LR}
0.39	11.6	0.90	0.50	0.76	0.72	0.03	0.37

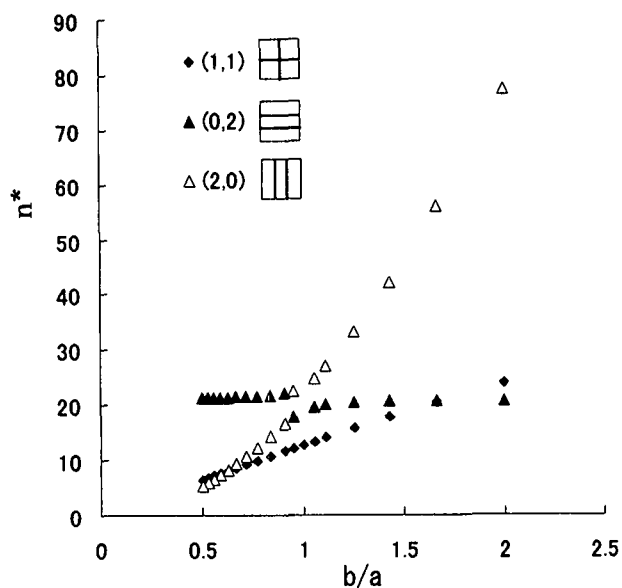


図-6 等方性長方形板の結合モード $(0, 2) \pm (0, 2)$ の発生に与える辺長比の影響 : $b/h=10$, FF-FF

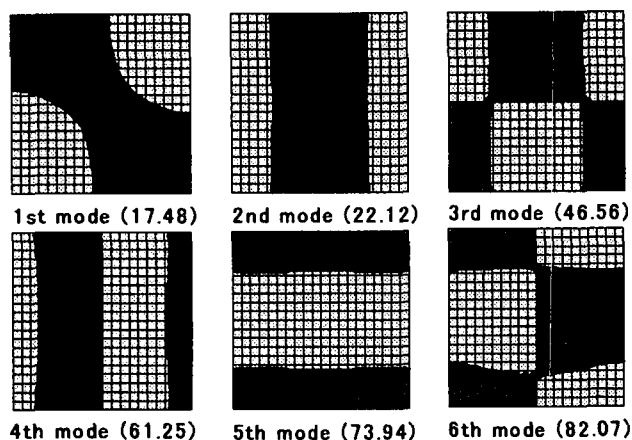


図-8 直交異方性板の振動モード形状 : $b/h=50$, $a/b=1.0$

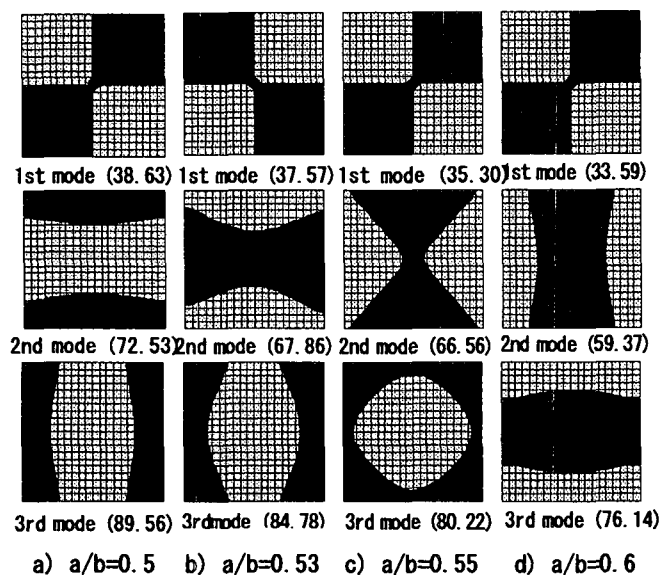


図-9 直交異方性長方形板の振動モード形状に与える辺長比 a/b の影響 : $b/h=50$

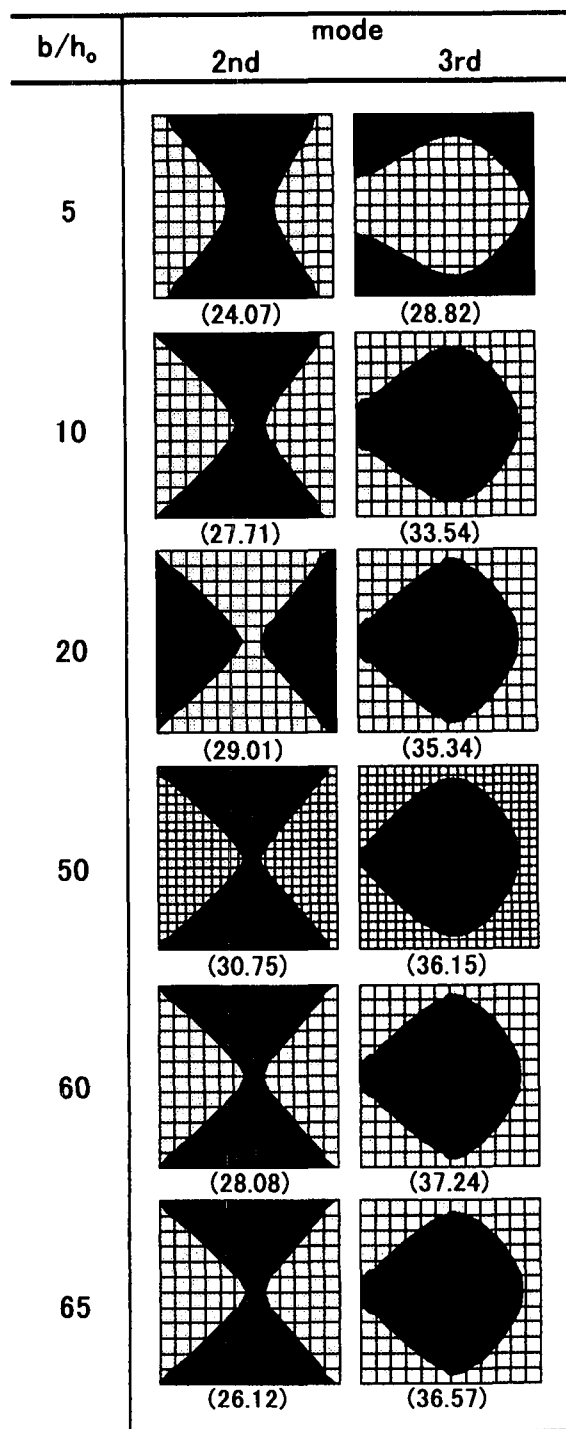


図-7 変厚正方形板の振動モード形状に与える幅厚比の影響 : $h_1/h_0=2.0$, $a/b=1.0$

4. あとがき

一様厚さの等方性長方形板や直交異方性正方形板では、一方向の力学特性が強くなるので、振動モードの縮退現象は現れず、振動モードの節線(nodal line)が直線で表される梁モードが卓越してくる。しかしながら、2方向のひずみの連成効果が大きな等厚の等方性正方形板の対称モードには、結合モードであるXモードやリングモードが現れる。

本論文では、spline要素法を用いて、4辺が自由、固定および単純支持である長方形板の振動モードの縮退および連成挙動について検討を行った。

本研究で得られた結果を纏めると、以下ようになる。

1. Spline要素法を用いれば、周辺自由な正方形板も含めて、精度の高い解析結果が得られている。
2. 4辺が自由、固定および単純支持された等厚で等方性正方形板の振動モードには、対称モードであるXモードとリングモードの結合モードが現れる。
3. 周辺自由な正方形板のXモードとリングモードの振動数の差は大きい、周辺固定と周辺単純支持である正方形板の両者の差は、比較的小さい。
4. 周辺単純支持された正方形板を除くと、リングモードの振動数は、Xモードの振動数より大きい。
5. 等厚である等方性正方形板の結合モードの発生に与える幅厚比 b/h_0 の影響は、顕著に見られない。
6. 一方向に変厚な等方性正方形板の結合モードは、限られた幅厚比の範囲で発生する。幅厚比で 65 を超えると連成モードは発生せず、また幅厚比が 10 より小さくなると、結合モードは顕著に現れなくなる。
7. 周辺自由な直交異方性長方形板には、ある限られた辺長比で、結合モードが発生する。その結合モードの発生条件は、辺長比と幅厚比に依存している。
8. 周辺自由な直交異方性長方形板の結合モードの発生条件は、板厚が大きくなると非常に狭く限定された辺長比の範囲内で生じてくる。
9. 2方向のひずみの連成が強くなると、平板の振動モード形状に現れる節線が曲線を描く。

謝辞: 本研究は科学研究費補助金・基盤研究 C (2) および大同工業大学研究援助金を受けて行ったものである。また、衝突球を受ける平板の加速度波形および音圧波形の計測では、大学院生の滝沢宣人および河原田豊両君の協力を頂きました。ここに記して、感謝の意を表します。

最後に、貴重なご意見を頂いた査読者に謝意を表します。

Appendix

式(22)で示されるサブ質量マトリックスは、次式で与えられる。

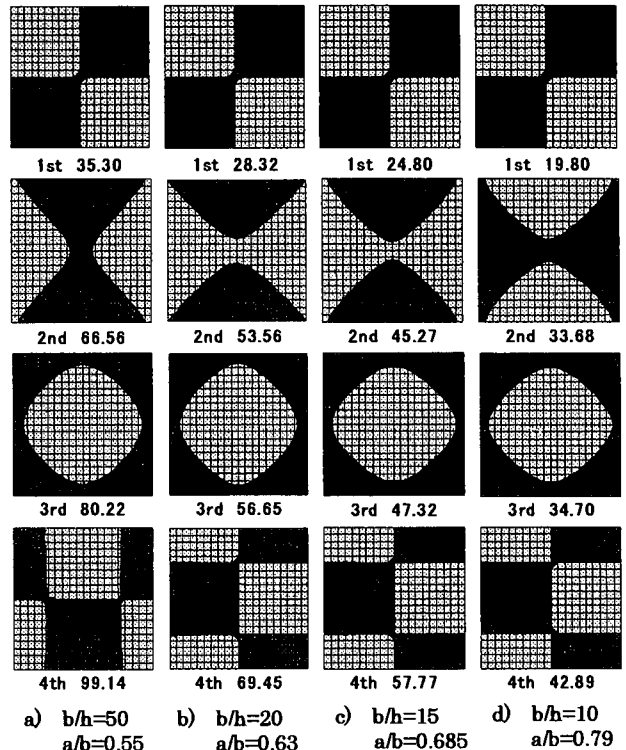


図 - 10 直交異方性長方形板の結合モードの発生条件

$$M\theta_x\theta_x = I_{mr}^{001} J_{ns}^{00}$$

$$M\theta_x\theta_y = 0$$

$$M\theta_y\theta_y = (1/12)(h_0/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{00}$$

$$M\theta_y\theta_x = 0$$

$$MW'W' = (1/12)(h_0/b)^2 I_{mr}^{003} J_{ns}^{00}$$

また、式(21)で示されるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K\theta_x\theta_x &= (b/a)^2 I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} + (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xy}/E_x) I_{mr}^{003} J_{ns}^{11} \\ &+ 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xz}/E_x) (b/h_0)^2 I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\ K\theta_x\theta_y &= \kappa_{yx} (b/a) I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} + (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xy}/E_x) (b/a) I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} \\ K\theta_xW' &= 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xz}/E_x) (b/a) (b/h_0)^2 I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\ K\theta_y\theta_x &= \nu_{yx} (b/a) I_{mr}^{013} J_{ns}^{10} + (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xy}/E_x) (b/a) I_{mr}^{103} J_{ns}^{01} \\ K\theta_y\theta_y &= (E_y/E_x) I_{mr}^{003} J_{ns}^{11} + (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xy}/E_x) (b/a)^2 I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} \\ &+ 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{yz}/E_x) (b/h_0)^2 I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\ K\theta_yW' &= 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{yz}/E_x) (b/h_0)^2 I_{mr}^{001} J_{ns}^{01} \\ KW'\theta_x &= 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xz}/E_x) (b/a) (b/h_0)^2 I_{mr}^{001} J_{ns}^{00} \\ KW'\theta_y &= 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{yz}/E_x) (b/h_0)^2 I_{mr}^{001} J_{ns}^{01} \\ KW'W' &= 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{xz}/E_x) (b/a)^2 (b/h_0)^2 I_{mr}^{113} J_{ns}^{00} \\ &+ 12\kappa(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) (G_{yz}/E_x) (b/h_0)^2 I_{mr}^{001} J_{ns}^{11} \end{aligned}$$

ここで、 I_{mr}^{ij} と J_{ns}^{ij} は次式で表され、また数値積分には、

Gauss の数値積分公式を用いている。

$$I_{mr}^{ijk} = \int_0^1 [d^i N_{m,k}(\xi)/d\xi]^i [d^j N_{r,k}(\xi)/d\xi]^j H(\xi)^i d\xi$$

$$J_{ns}^{ij} = \int_0^1 [d^i N_{n,k}(\eta)/d\eta]^i [d^j N_{s,k}(\eta)/d\eta]^j d\eta$$

ただし、 i, j は導関数の次数であり、また l はベキ乗数を示す。

参考文献

- 1) Todhunter, I. And Pearson, K. : A history of the theory of elasticity, Vols 1 and 2, Dover Publications, New York, 1960.
- 2) Leissa, A.W. : Vibration of plates, NASA SP-160, 1969.
- 3) Leissa, A.W. : The free vibration of rectangular plates. J. Sound. Vib., Vol. 31, pp. 257-293, 1973.
- 4) Gorman, D.J. and Ding, W. : Accurate free vibration analysis of the completely free rectangular Mindlin plate, J. Sound. Vib., Vol. 189, pp. 341-353, 1996.
- 5) 近藤八重, 水澤富作 ; Spline 要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析, 応用力学論文集, Vol. 4, pp. 183-194, 2001.
- 6) Iguchi, S. : Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platten. Ingenieur-Archiv, Vol. 21, pp. 303-322, 1953.
- 7) Rossing, T.D. : Plate vibrations and applications to guitars. Journal of Guitar and Acoustics, No. 6, pp. 65-73, 1982.
- 8) Molin, N.E. and Lindgren, L.E. : Parameters of violin plates and their influence on the plate modes. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 83, pp. 281-291, 1988.
- 9) Hutchins, C.M. : The acoustics of violin plates. Scientific America, Vol. 245, pp. 126-135, 1981.
- 10) 水澤富作, 近藤八重 : Spline 要素法を用いた周辺自由な平板の振動解析. 平成 14 年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集, I-33, pp. 65-66, 2003.
- 11) 滝沢宣人, 河原田豊, 近藤八重, 水澤富作 : 平板から発生する衝突音に関する基礎的研究. 平成 13 年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集, I-18, pp. 35-36, 2002.

(2003 年 4 月 18 日 受付)